

РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

СЗ

СОДЕРЖАНИЕ ПРОЕКТА

- * ПРОСТЕЙШИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА
- * АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА
- * ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕМЕННУЮ В РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЯХ
- * ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ИЗ ЕГЭ

БАЗОВЫЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

- * Практически все сложные **иррациональные неравенства**, в конечном итоге сводятся к базовым иррациональным неравенствам трех типов.

$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$$

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ 1 ТИПА

$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

$$\sqrt{x^2 - 6x} < 8 + 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x = x(x - 6) \geq 0, \\ 8 + 2x = 2(x + 4) > 0, \\ x^2 - 6x < (8 + 2x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty), \\ x > -4, \\ 3x^2 + 38x + 64 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty), \\ x > -4, \\ x \in \left(-\infty; -\frac{32}{3}\right) \cup (-2; +\infty); \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 0] \cup [6; +\infty).$$

$$\sqrt{24 - 10x} < 3 - 4x.$$

$$\sqrt{24 - 10x} < 3 - 4x \Leftrightarrow \begin{cases} 24 - 10x \geq 0, \\ 3 - 4x > 0, \\ 24 - 10x < (3 - 4x)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{12}{5}, \\ x < \frac{3}{4}, \\ 16x^2 - 14x - 15 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{12}{5}, \\ x < \frac{3}{4}, \\ x \in \left(-\infty; -\frac{5}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right); \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{5}{8}\right).$$

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ 2 ТИПА

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x)$$

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases}$$

НЕКОТОРЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$\sqrt{x+3} > x+1.$$

$$\begin{cases} x+3 > (x+1)^2, \\ x \geq -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 > x^2+2x+3, \\ x \geq -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2 < 0, \\ x \geq -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2) < 0, \\ x \geq -1. \end{cases}$$

$$x \in [-1; 1).$$

$$3\sqrt{-3 + 8x + 3x^2} \geq 1 + 2x.$$

$$\sqrt{3x^2 + 8x - 3} \geq \frac{1 + 2x}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 + 2x}{3} < 0, \\ 3x^2 + 8x - 3 = 3(x + 3)\left(x - \frac{1}{3}\right) \geq 0; \\ \frac{1 + 2x}{3} \geq 0, \\ 3x^2 + 8x - 3 \geq \left(\frac{1 + 2x}{3}\right)^2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2}, \\ x \leq -3, \\ x \geq \frac{1}{3}, \\ x \geq -\frac{1}{2}, \\ 23x^2 + 68x - 28 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3, \\ x \geq -\frac{1}{2}, \\ x \leq -\frac{34 + 30\sqrt{2}}{23}, \\ x \geq \frac{30\sqrt{2} - 34}{23}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3, \\ x \geq \frac{30\sqrt{2} - 34}{23}. \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -3] \cup \left[\frac{30\sqrt{2} - 34}{23}; +\infty \right).$$

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА 3 ТИПА

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$$

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g(x). \end{cases}$$

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА

$$\frac{13 - 3x + \sqrt{x^2 - x - 6}}{5 - x} > 1.$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - x - 6} - (2x - 8)}{5 - x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 8 < 0, \\ 5 - x > 0, \\ 2x - 8 \geq 0, \\ \frac{x^2 - x - 6 - (2x - 8)^2}{5 - x} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ x < 5, \\ x \geq 4, \\ 3 \frac{\left(x - \frac{10}{3}\right)(x - 7)}{x - 5} > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x \geq 4, \\ x \in \left(\frac{10}{3}, 5\right) \cup (7, +\infty); \end{cases} \Leftrightarrow x \in [4; 5) \cup (7; +\infty).$$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ РАЗЛИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

$$\begin{cases} \frac{3^x - 9}{10 \cdot 3^{x+1} - 3^4 - 3^{2x}} < 0 \\ (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{2x} + 5 + 2\sqrt{6} \leq (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x \left(\sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^3} + \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\log_2 \frac{5x+4}{4x} \right) \sqrt{x^4 - 5x^2 + 4} > 0 \\ (3^x - 1) \sqrt{x^2 - 4x + 3} \leq 0 \end{cases}$$

НЕРАВЕНСТВА ИЗ ЕГЭ

$$\begin{cases} (x^2 - 8x + 12)\sqrt{x^2 - 10x + 21} \geq 0 \\ 4^{x-1} + 2^{x-2} - \frac{3}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2} + \dots + \sqrt{(x-2012)^2} - 1007 \cdot 503 > \frac{1}{2} \cdot 1005 \cdot 1006 \\ \sqrt{2x+12} \leq |x+5| \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |x+1|-1 \leq \sqrt{8x^2-2x^3} \\ \frac{2^{6-\frac{5x}{2}} - 2^{7-2x} - 2^{\frac{-x}{2}-1} + 1}{2 - 2^{\frac{x}{2}}} \geq 0 \end{array} \right.$$

Решение: рассмотрим второе неравенство системы. Разложив на множители числитель левой части этого неравенства, преобразуем неравенство к виду:

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \left(2^{-\frac{x}{2}} - 2 \right) (2^{7-2x} - 1)}{2 - 2^{2-\frac{x}{2}}} \geq 0 .$$

Корнями числителя будут числа -2 и $\frac{7}{2}$, а

корнем знаменателя будет 2 . Методом интервалов находим:

$$x \in [-2, 2) \cup \left[\frac{7}{2}, +\infty \right) .$$

Рассмотрим теперь при $x \in [-2, 2) \cup \left[\frac{7}{2}, +\infty \right)$

первое неравенство с учётом его ОДЗ: $x \leq 4$. 1) При $x \in [-1, 2) \cup \left[\frac{7}{2}, 4 \right]$

получим: $x \leq \sqrt{8x^2 - 2x^3}$. Последнее неравенство верно при всех $x \in [-1, 0]$,

а при $x \in (0, 2) \cup \left[\frac{7}{2}, 4 \right]$ оно равносильно неравенству $x^2 \leq 8x^2 - 2x^3$, то

есть $x^2(2x-7) \leq 0$ и $x \in (0, 2) \cup \left\{ \frac{7}{2} \right\}$. 2) При $-2 \leq x < -1$ получим:

$-x - 2 \leq \sqrt{8x^2 - 2x^3}$. Последнее неравенство справедливо для всех $-2 \leq x < -1$, так как при $x \geq -2$ левая часть неравенства не больше 0 а

правая часть не меньше 0. В итоге получим: $x \in [-2, 2) \cup \left\{ \frac{7}{2} \right\}$.

Ответ: $x \in [-2, 2) \cup \left\{ \frac{7}{2} \right\}$.