РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

С 3

СОДЕРЖАНИЕ ПРОЕКТА

* ПРОСТЕЙШИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА
* АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА
* ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕМЕННУЮ В РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЯХ
* ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ИЗ ЕГЭ

БАЗОВЫЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

- Практически все сложные **иррациональные неравенства,** в конечном итоге сводятся к базовым иррациональным неравенствам трех типов.

$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$

$$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)}$$

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ 1 ТИПА

$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

$$\sqrt{x^2-6x} < 8+2x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x = x(x-6) \geq 0, \\ 8+2x = 2(x+4) > 0, \\ x^2-6x < (8+2x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty), \\ x > -4, \\ 3x^2+38x+64 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty), \\ x > -4, \\ x \in \left(-\infty; -\dfrac{32}{3}\right) \cup (-2; +\infty); \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-2; 0] \cup [6; +\infty).$$

$$\sqrt{24-10x} < 3-4x.$$

$$\sqrt{24-10x} < 3-4x \Leftrightarrow \begin{cases} 24-10x \ge 0, \\ 3-4x > 0, \\ 24-10x < (3-4x)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{12}{5}, \\ x < \frac{3}{4}, \\ 16x^2-14x-15 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \frac{12}{5}, \\ x < \frac{3}{4}, \\ x \in \left(-\infty; -\frac{5}{8}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right); \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{5}{8}\right).$$

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ 2 ТИПА

$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

НЕКОТОРЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$\sqrt{x+3} > x+1.$$

$$\begin{cases} x+3 > (x+1)^2, \\ x \geq -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 > x^2+2x+3, \\ x \geq -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2 < 0, \\ x \geq -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2) < 0, \\ x \geq -1. \end{cases}$$

$$x \in [-1;\, 1).$$

$$3\sqrt{-3+8x+3x^2} \ge 1+2x.$$

$$\sqrt{3x^2+8x-3} \ge \frac{1+2x}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{1+2x}{3} < 0, \\ 3x^2+8x-3 = 3(x+3)\left(x-\dfrac{1}{3}\right) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1+2x}{3} \ge 0, \\ 3x^2+8x-3 \ge \left(\dfrac{1+2x}{3}\right)^2. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -\dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -3, \\ x \ge \dfrac{1}{3}; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2}, \\ 23x^2+68x-28 \ge 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -3, \\ \left\{\begin{array}{l} x \ge -\dfrac{1}{2}, \\ x \le -\dfrac{34+30\sqrt{2}}{23}, \\ x \ge \dfrac{30\sqrt{2}-34}{23}. \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -3, \\ x \ge \dfrac{30\sqrt{2}-34}{23}. \end{array}\right.$$

$$x \in (-\infty; -3] \cup \left[\frac{30\sqrt{2}-34}{23}; +\infty\right).$$

РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА 3 ТИПА

$$\sqrt{f(x)} \le \sqrt{g(x)}$$

$$\sqrt{f(x)} \le \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) \le g(x). \end{cases}$$

НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА

$$\frac{13-3x+\sqrt{x^2-x-6}}{5-x}>1.$$

$$\frac{\sqrt{x^2-x-6}-(2x-8)}{5-x}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x-8<0,\\ 5-x>0;\end{cases}\\ \begin{cases}2x-8\ge 0,\\ \dfrac{x^2-x-6-(2x-8)^2}{5-x}>0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<4,\\ x<5;\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 4,\\ \dfrac{3\left(x-\frac{10}{3}\right)(x-7)}{x-5}>0;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<4\\ \begin{cases}x\ge 4,\\ x\in\left(\dfrac{10}{3};5\right)\cup(7;+\infty);\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[4;5)\cup(7;+\infty).$$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ РАЗЛИЧНЫЕ ФУНКЦИИ

$$\begin{cases} \dfrac{3^x - 9}{10 \cdot 3^{x+1} - 3^4 - 3^{2x}} < 0 \\ \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^{2x} + 5 + 2\sqrt{6} \le \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^x \left(\sqrt{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^3} + \sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\log_2 \dfrac{5x+4}{4x}\right)\sqrt{x^4 - 5x^2 + 4} > 0 \\ \left(3^x - 1\right)\sqrt{x^2 - 4x + 3} \le 0 \end{cases}$$

НЕРАВЕНСТВА ИЗ ЕГЭ

$$\begin{cases} (x^2-8x+12)\sqrt{x^2-10x+21}\geq 0 \\ 4^{x-1}+2^{x-2}-\dfrac{3}{2}\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}+\ldots+\sqrt{(x-2012)^2}-1007\cdot 503>\dfrac{1}{2}\cdot 1005\cdot 1006 \\ \sqrt{2x+12}\leq |x+5| \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x+1|-1 \le \sqrt{8x^2-2x^3} \\ \dfrac{2^{6-\frac{5x}{2}}-2^{7-2x}-2^{-\frac{x}{2}-1}+1}{2-2^{2-\frac{x}{2}}} \ge 0 \end{cases}$$

Решение: рассмотрим второе неравенство системы. Разложив на множители числитель левой части этого неравенства, преобразуем неравенство к виду:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(2^{-\frac{x}{2}}-2\right)\left(2^{7-2x}-1\right)}{2-2^{2-\frac{x}{2}}}\geq 0.$$

Корнями числителя будут числа -2 и $\frac{7}{2}$, а корнем знаменателя будет 2. Методом интервалов находим: $x\in[-2,\ 2)\cup\left[\frac{7}{2},\ +\infty\right)$. Рассмотрим теперь при $x\in[-2,\ 2)\cup\left[\frac{7}{2},\ +\infty\right)$ первое неравенство с учётом его ОДЗ: $x\leq 4$. 1) При $x\in[-1,\ 2)\cup\left[\frac{7}{2},\ 4\right]$ получим: $x\leq\sqrt{8x^2-2x^3}$. Последнее неравенство верно при всех $x\in[-1,\ 0]$, а при $x \in (0,\ 2) \cup \left[\frac{7}{2},\ 4\right]$ оно равносильно неравенству $x^2 \le 8x^2 - 2x^3$, то есть $x^2(2x-7) \le 0$ и $x \in (0,\ 2) \cup \left\{\frac{7}{2}\right\}$. 2) При $-2 \le x < -1$ получим: $-x - 2 \le \sqrt{8x^2 - 2x^3}$. Последнее неравенство справедливо для всех $-2 \le x < -1$, так как при $x \ge -2$ левая часть неравенства не больше 0 а правая часть не меньше 0. В итоге получим: $x \in [-2,\ 2) \cup \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

Ответ: $x \in [-2,\ 2) \cup \left\{\frac{7}{2}\right\}$.