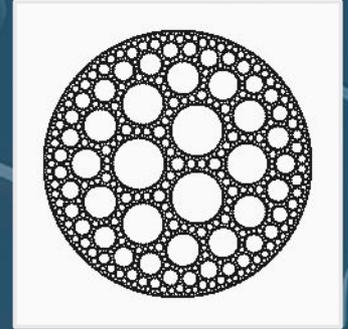


ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИИ



{ интервалы монотонного возрастания и убывания функции - выпуклость функции на промежутке - точки перегиба -
асимптоты - построение графика функции }



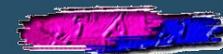
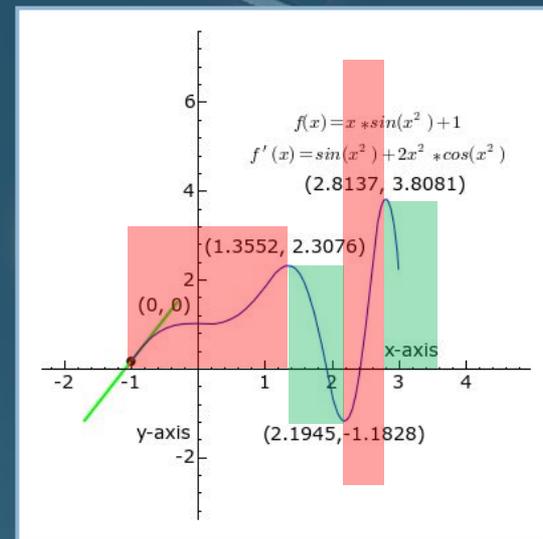
Интервалы возрастания и убывания функции

- Интервалы монотонного возрастания и убывания функции определяются знаком производной.

Если производная $f'(x)$ положительна на интервале, то функция $f(x)$ возрастает на нем.

$$\Delta x > 0, \Delta f > 0 \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) > 0$$

Если производная $f'(x)$ принимает отрицательные значения на интервале, то функция $f(x)$ на нем убывает.



Выпуклость функции на промежутке

- Функция $f(x)$, определенная и непрерывная в промежутке $(a; b)$, называется **выпуклой** (выпуклой вниз), если для любых точек x_1 и x_2 из $(a; b)$, $x_1 \neq x_2$, выполняется неравенство:

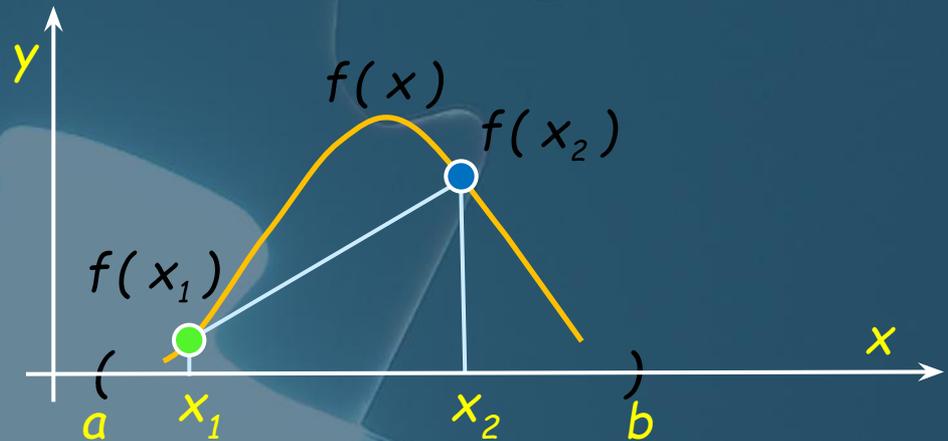
$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

каковы бы не были положительные числа λ_1 и λ_2 , дающие в сумме единицу.

При $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ функция $f(x)$ называется **вогнутой** (выпуклой вверх).



$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$



Выпуклость функции на промежутке

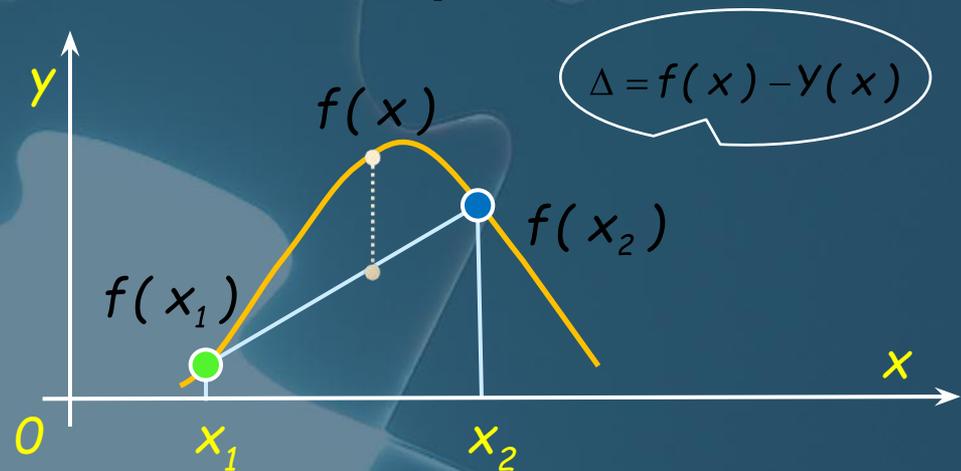
$$\Delta = f(x) - \left(f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1) \right) > 0$$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \quad x \rightarrow x_1 \quad c \in (x_1, x_2)$$

$$f'(x_1) - f'(c) \geq 0 \quad \frac{f'(x_1) - f'(c)}{x_1 - c} \leq 0 \quad \lim_{x_1 \rightarrow c} \frac{f'(x_1) - f'(c)}{x_1 - c} = f''(c) \leq 0$$

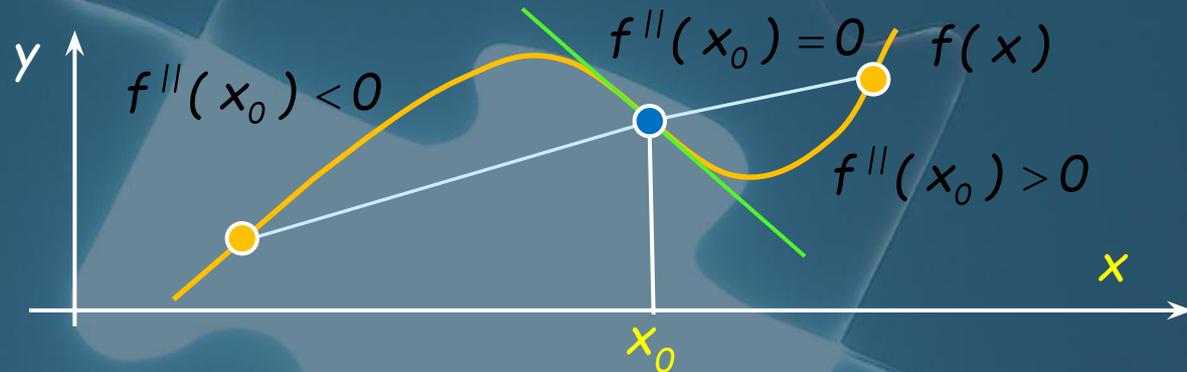
Функция $f(x)$ называется **вогнутой** (выпуклой вверх), если $f''(x) \leq 0$

Функция $f(x)$ называется **выпуклой** (выпуклой вниз), если $f''(x) \geq 0$



Точки перегиба

- Теорема. Для выпуклости (вогнутости) функции $y = f(x)$ в промежутке (a,b) необходимо и достаточно, чтобы здесь выполнялось неравенство $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$).
- Точку $M(x_0; f(x_0))$ кривой $y = f(x)$ называют её точкой перегиба, если она отделяет участок графика, где он выпуклый, от участка, где график функции $f(x)$ вогнут.
- В точке перегиба вторая производная функции обращается в ноль. Достаточным условием существования точки перегиба является смена знака $f''(x)$ при переходе через неё.



Асимптоты графика функции

- Прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ или $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.
- Прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой** графика функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если $f(x)$ представима в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow +\infty$ функция.



Построение графика функции

- Для построения рекомендуется следующая последовательность действий.
 - Найти множество определения функции, области непрерывности, точки разрыва.
 - При построении графика учитывать такие свойства, как четность, нечетность, периодичность.
 - Найти асимптоты графика функции.
 - Найти точки пересечения графика с осями координат.
 - Найти первую и, если нужно, вторую производную функции. Найти точки в которых первая и вторая производные либо не существуют, либо обращаются в нуль.
 - Составить таблицу изменения знака функции, первой и второй производных. Определить промежутки возрастания и убывания функции, выпуклости и вогнутости функции, найти точки экстремума и точки перегиба, вычислить значения функции в этих точках.
 - Окончательно вычертить график функции.



Пример построения графика функции

Исследуем и строим график функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$. Функция нечетная.

Найти множество определения функции, области непрерывности, точки разрыва:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow D : x \neq \pm 1 \Rightarrow D : x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty$$

Точки разрыва: $x = 1$ $x = -1$
- второго рода

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Пример построения графика функции

Найти нули функции, наклонные (горизонтальные) асимптоты.

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1} \Rightarrow$$

$$y = \frac{x^3 - x + x}{x^2 - 1} = \frac{x(x^2 - 1) + x}{x^2 - 1} = x + \frac{x}{x^2 - 1}$$

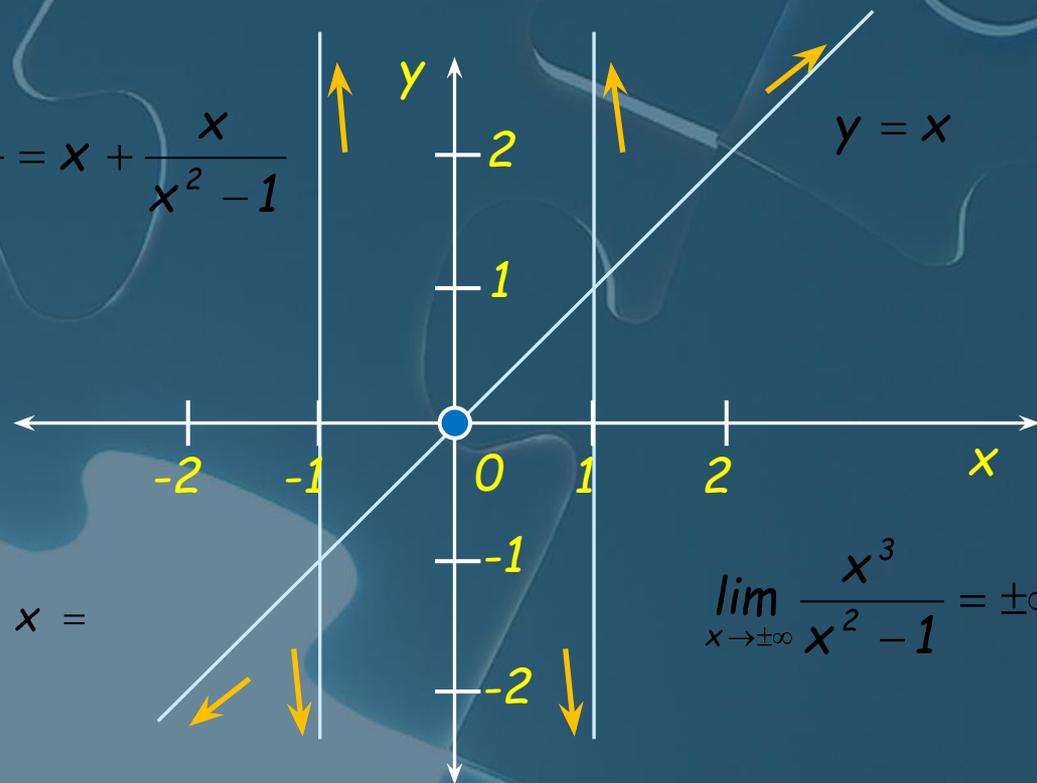
$$y(0) = \frac{x^3}{x^2 - 1} \Big|_{x=0} = 0$$

$$y = kx + b$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x^2 - 1)} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} - x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$$



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \pm\infty$$



Пример построения графика функции

- Найти первую производную функции. Найти точки в которых первая производная либо не существует, либо обращается в нуль. Найти точки экстремума.

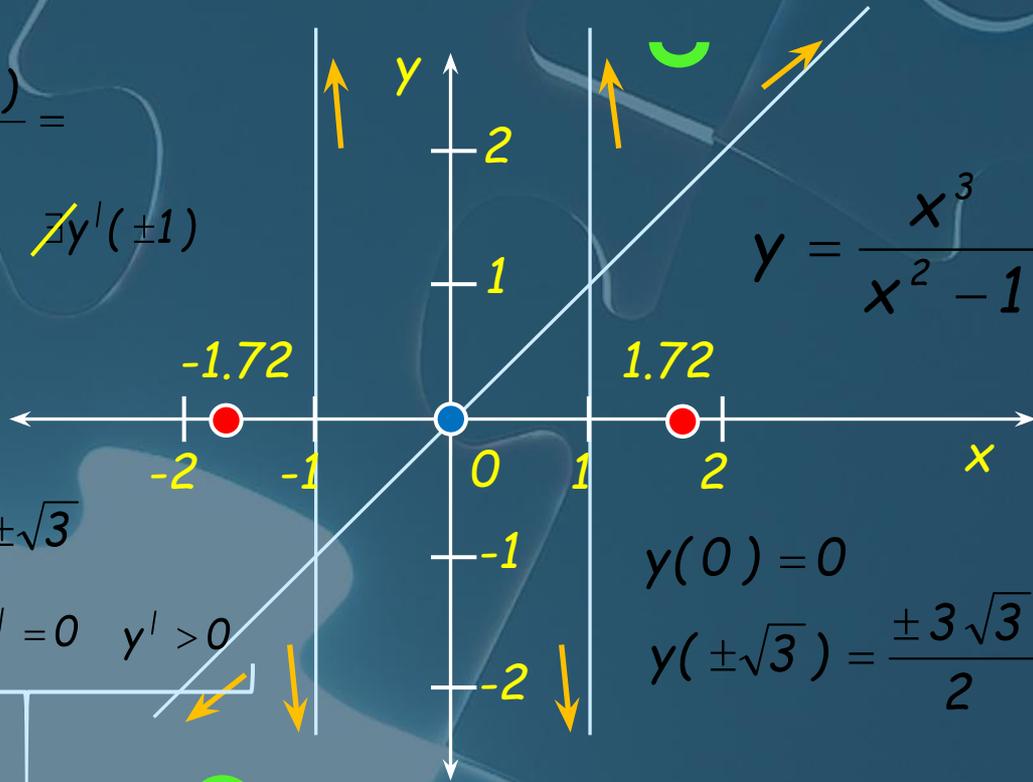
$$\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3(2x)}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x-1)^2(x+1)^2} \quad \cancel{y'(\pm 1)}$$

$$y'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x-1)^2(x+1)^2} = 0$$

$$x^2(x^2-3) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0, x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$$

$y' > 0$ $y' = 0$ $y' < 0$ $y' = 0$ $y' < 0$ $y' = 0$ $y' > 0$



$$y(0) = 0$$

$$y(\pm\sqrt{3}) = \frac{\pm 3\sqrt{3}}{2}$$



Пример построения графика функции

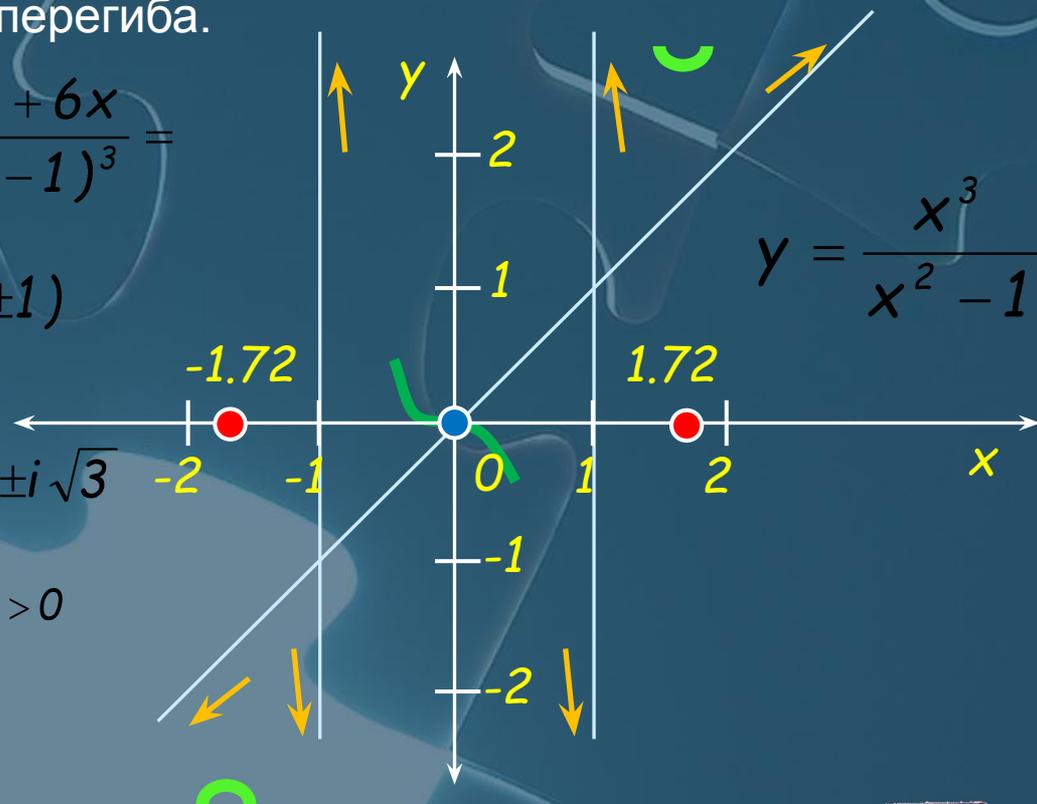
- Найти вторую производную функции. Найти точки в которых вторая производная либо не существует, либо обращается в нуль. Найти промежутки выпуклости, точки перегиба.

$$y''(x) = \left[\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} \right]' = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} =$$
$$= \frac{2x(x^2 + 3)}{(x - 1)^3(x + 1)^3} \quad \exists y''(\pm 1)$$

$$x(x^2 + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_{3,4} = \pm i\sqrt{3}$$

$$y''(x < -1) < 0 \quad y''(-1 < x < 0) > 0$$

$$y''(0 < x < 1) < 0 \quad y''(x > 1) > 0$$



Пример построения графика функции

- Построить график функции

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

