

Основоположник теории потока однородных событий



Александр Яковлевич

Хинчин (1894—1959)

профессор МГУ с 1927 года.

Создатель теории потока однородных
событий,

Совместно с А.Н. Колмогоровым –
создатель теории случайных процессов и
теории массового обслуживания.

Свойство марковости

В марковской сети вероятность события зависит только от текущего состояния сети, т.е.

$$P(X_{n+1}=i_{n+1} \mid X_n=i_n, X_{n-1}=i_{n-1}, \dots, X_0=i_0) = P(X_{n+1}=i_{n+1} \mid X_n=i_n)$$

где

$\{X_n\}$ – пространство состояний цепи

i – номер шага

Тогда вероятность попасть из состояние i в состояние j за m шагов равно:

$$p_{ij}^{(m)} = P[X_{n-1} = j \mid X_n = i] \quad (1)$$

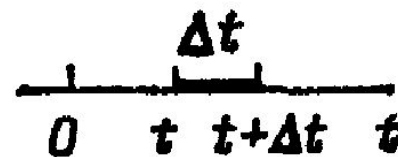
Выражение (1) можно переписать в виде рекуррентной формулы:

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^{(m-1)} p_{kj}$$

т.е. для того, чтобы попасть в состояние E_j , необходимо сначала за $m-1$ шагов попасть в множество состояние E_k , а затем уже из них перейти в состояние E_j .

процесс

Рассмотрим два состояния Марковской цепи s_i и s_j . Переход из состояния в состояние происходит под воздействием пуассоновского потока с интенсивностью λ_{ij} . Пуассоновский поток обладает свойством отсутствием последействия, поэтому нам не надо будет заботиться о том, как система попала в состояние s_i .



Рассмотрим элементарный участок на оси времени Δt , примыкающий в точке времени t . Вероятность того, что система, находящаяся в состоянии s_i , перейдет в состояние s_j будет равна $\lambda_{ij} P_i$.

процесс

Рассмотрим систему из n состояний $s_1 \dots s_n$. Пусть имеются интенсивности переходов между каждыми двумя состояниями λ_{ij} ($i \neq j$), если две вершина не связаны, то интенсивность переходов между ними равна нулю. Обозначим $p_i(t)$ вероятность того, система в момент t находится в состоянии s_i ($i=1 \dots n$). Пусть $p_i(t+\Delta t)$ вероятность того, что система будет в состоянии s_i в момент $t+\Delta t$. Обозначим эту вероятность $A: A=\{S(t+\Delta t)=s_i\}$.

Событие A состоит из суммы двух возможных событий ($A=B+C$):

B – система уже была в состоянии s_i и за время Δt не вышла из него.

C – система была в одном из состояний, из которых возможен переход в состояние s_i и за время Δt она перешла в состояние s_i .

Выясним вероятность события B

процесс

Выясним вероятность события B

Вероятность того, что за время Δt в системе не произойдет ни одного события

$1 - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) \Delta t$ ($i \neq j$), тогда

$$P(B) = p_i(t) \left[1 - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) \Delta t \right]$$

Выясним вероятность события C :

$$P(C) = \sum_{j=1}^n p_i(t) \lambda_{ij}(t) \Delta t \quad (i \neq j).$$

Выясним вероятность события A ($A=B+C$)

$$P(A) = P(B) + P(C) = p_i(t + \Delta t) = p_i(t) \left[1 - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) \Delta t \right] + \sum_{j=1}^n p_i(t) \lambda_{ij}(t) \Delta t$$

$$p_i(t + \Delta t) - p_i(t) = \sum_{j=1}^n p_i(t) \lambda_{ij}(t) \Delta t - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) \Delta t$$

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n p_i(t) \lambda_{ij}(t) - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) \quad - \text{уравнения Колмогорова}$$

процесс

Уравнения Колмогорова

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j(t) \lambda_{ji}(t) - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) p_i(t) - \text{уравнения Колмогорова}$$

Одно из уравнения данной система дифуров дополняется условием нормировки, т.е.

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1$$

Данное условие должно соблюдаться в каждый момент времени.

Для решения задачи Коши (нахождение частных решений дифуры)

необходимы начальные условия, т.е. начальное распределение вероятностей в мент времени $t=0$ $p_i(0)$. Решение системы дифуров дает функции от времени для каждой вероятности $p_i(t)$.

процесс в сбалансированном режиме

При $t \rightarrow \infty$, если Марковская система эргономична, все вероятности $p_i(t)$ на зависят от времени и стремятся к стационарной вероятности p_i . Тогда в уравнениях Колмогорова $\frac{p_i(t)}{dt}=0$, и система уравнений принимает вид:

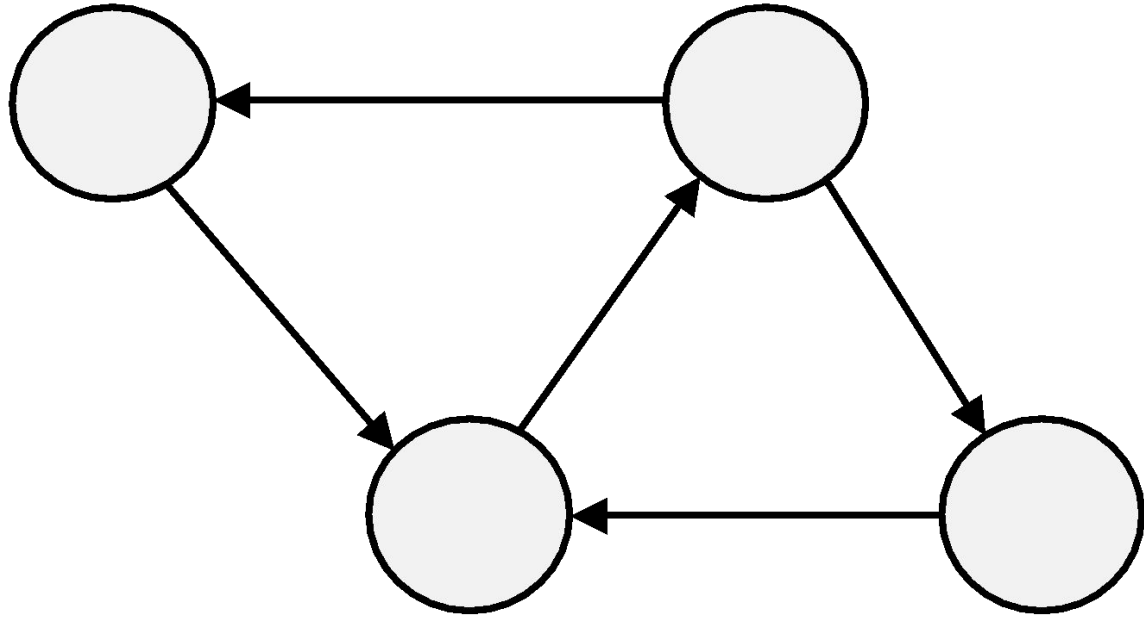
Уравнения Колмогорова

$$\sum_{j=1}^n p_i(t) \lambda_{ij}(t) - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(t) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1$$

Решив данную систему линейных алгебраических уравнений, мы находим стационарные вероятности.

Пример расчета стационарных вероятностей для непрерывного Марковского процесса



Уравнения

Колмогорова:

$$P_1' = P_3 \lambda_{31} - P_1 \lambda_{12}$$

$$P_2' = P_1 \lambda_{12} + P_4 \lambda_{42} - P_2 \lambda_{23}$$

$$P_3' = P_2 \lambda_{23} - P_3 (\lambda_{31} + \lambda_{34})$$

$$P_4' = P_3 \lambda_{34} - P_4 \lambda_{42}$$

$$P_2' = P_1 + 2P_4 - 0,5P_2$$

$$P_3' = 0,5P_2 - 6P_3$$

$$P_4' = 4P_3 - 2P_4$$

вероятностей для непрерывного Марковского процесса

Уравнения Колмогорова
для стационарного
режима:

$$P_1' = 2P_3 - P_1 = 0$$

$$P_2' = P_1 + 2P_4 - 0,5P_2 = 0$$

$$P_3' = 0,5P_2 - 6P_3 = 0$$

$$P_4' = 4P_3 - 2P_4 = 0$$

Уравнения
Колмогорова

	P_1	P_2	P_3	P_4
1	-1	0	2	0
2	1	-0,5	0	2
3	0	0,5	-6	0
4	0	0	4	-2

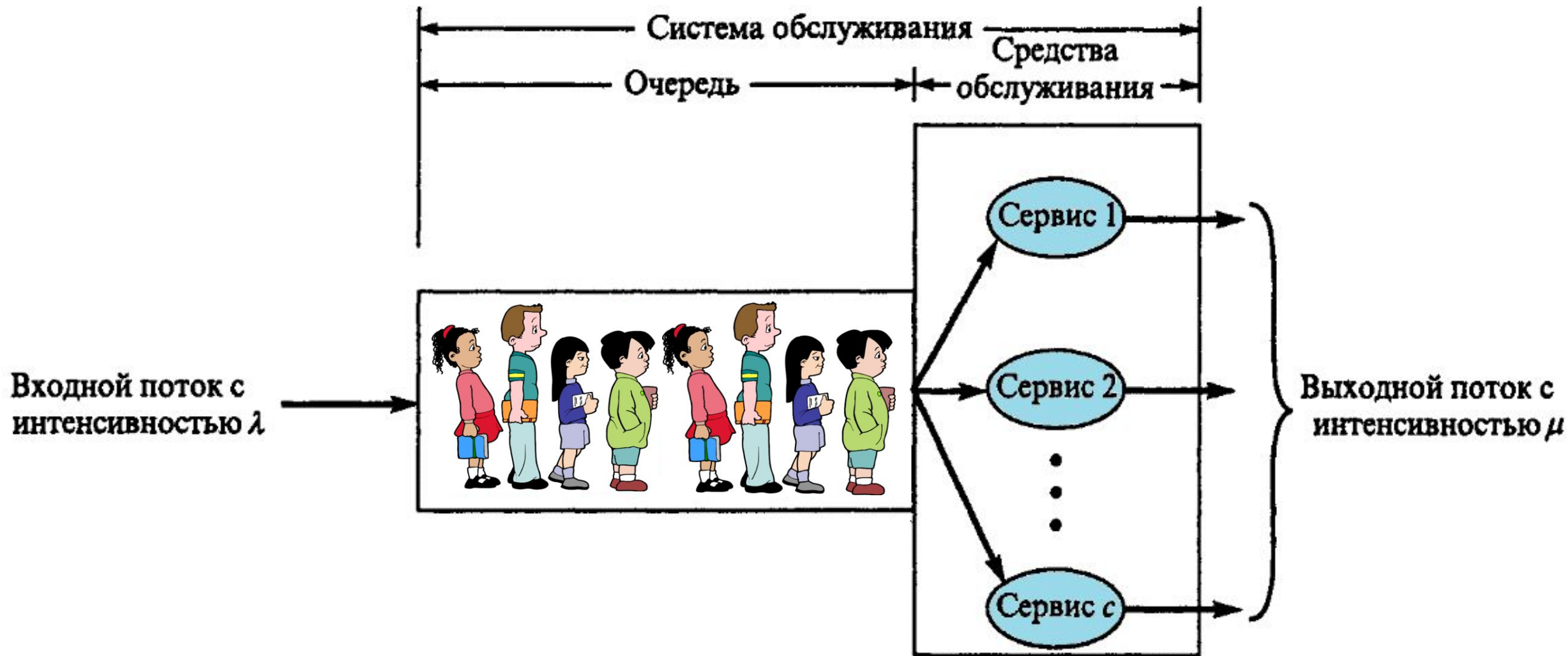
Пример расчета стационарных вероятностей для непрерывного Марковского процесса

Заменяем одну строку матрицы на условие нормировки, добавим столбец свободных членов, все элементы которого равны 0 кроме ячейки напротив строки с условием нормировки. Решим систему уравнений и получаем стационарные вероятности.

	P_1	P_2	P_3	P_4	
1	-1	0	2	0	0
2	1	-0,5	0	2	0
3	0	0,5	-6	0	0
4	1	1	1	1	1

Ответ
$P_1=0,118$
$P_2=0,706$
$P_3=0,059$
$P_4=0,118$

Системы массового обслуживания (СМО)



обслуживания



Андре́й Никола́евич

Колмогóров (1903—1987)

Профессор МГУ с 1931 года.

Один из крупнейших математиков XX века.

Один из основоположников современной теории вероятностей.

Создатель теории случайных процессов и теории массового обслуживания.

обближивания



Ангер Краруп Эрланг (1878—1929)

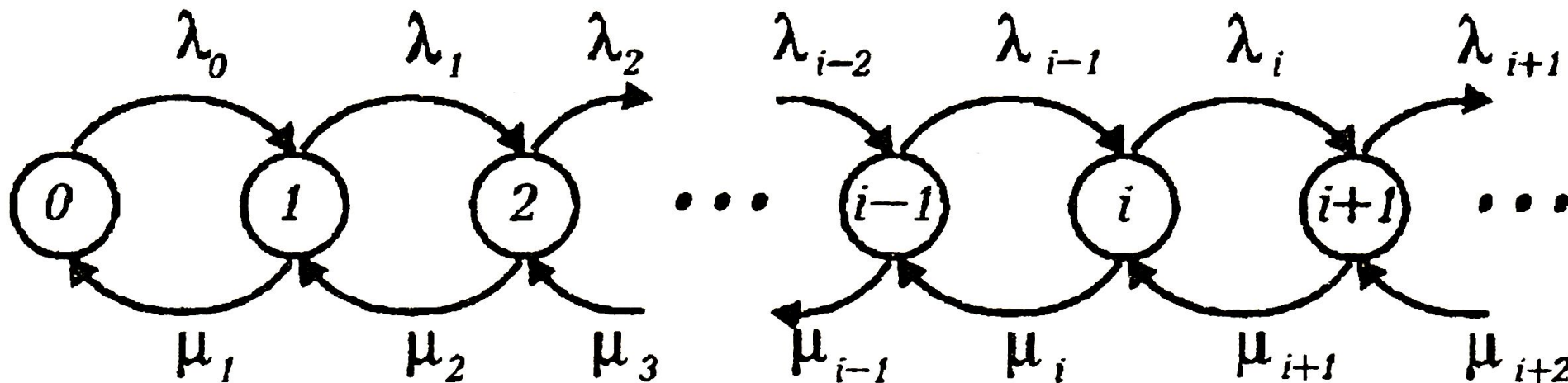
Датский математик и инженер, один из основателей ТМО.

1909 год – опубликована работа «Теория вероятностей и телефонные разговоры» (The Theory of Probabilities and Telephone Conversations.) , получившая признание во всем мире.

В его честь названа единица измерения трафика в телекоммуникационных системах – эрланг. 1 эрланг (1 Эрл) эквивалентен разговору двух абонентов в течение 1 часа.

Формулой Эрланга пользуются до сих пор.

снова СМО



Процесс гибели и размножения представляет собой процесс порождения заявок и их обработку (гибель) в моделируемой системе.

Этот процесс может быть описан Марковской системой, где каждое состояние связано с только с двумя соседними состояниями (за исключением нулевого и n -го состояний, где n – число состояний в Марковской системе; n может быть равным ∞).

λ_i - интенсивность рождения заявок;

μ_i - интенсивность гибели (обслуживания) заявок.

основа СМО

Система уравнений Колмогорова для стационарного состояния системы рождения и гибели

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0 = 0 \\ \lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 - (\lambda_1 + \mu_1) P_1 = 0 \\ \lambda_{i-1} P_{i-1} + \mu_{i+1} P_{i+1} - (\lambda_i + \mu_i) P_i = 0 \\ \dots \\ \lambda P_{n-1} - \mu P_n = 0 \end{array} \right.$$

Решение системы уравнений:

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} + \dots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \right)^{-1} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right)^{-1}$$
$$P_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} P_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n \text{ или } P_i = \frac{\lambda_0 \lambda_{i-2} \lambda_{i-1}}{\mu_0 \mu_{i-1} \mu_i} P_0 = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

обслуживания (СМО)

Системы массового обслуживания (**СМО**) или теория массового обслуживания (**ТМО**) – это частный случай непрерывной Марковской системы. ТМО рассматривает наиболее часто встречающийся на практике случай – процессы гибели и размножения.

СМО – это системы из трёх типов элементов:

- Источник заявок (ИЗ) - порождает поток заявок.
- Обслуживающее устройство (ОУ) – обслуживает заявки.
- Очередь ожидания (Оч.). В очередь попадают заявки, в случае занятости ОУ обслуживанием предыдущей заявки.



Классификация СМО

По дисциплине



По количеству ОУ

- Одноканальные.
- Многоканальны е.



По приоритету

- С одинаковым приоритетом заявок.
- С разным приоритетом заявок.

По времени ожидания

- Без ограничения времени

Классификация СМО

В ТМО существуют стандартные обозначения классов СМО:

$A/B/m$

Или

$A/B/m/K/M$, где

A, B – тип потока входящих событий и дисциплины обслуживания.

m – количество ОУ в СМО.

K – количество мест для заявок в очереди

Типы потока заявок:

M – простейший поток.

E_r – поток Эрланга порядка r .

D – детерминированное.

H_R – гиперпоказательное порядка R .

G – распределение произвольного типа

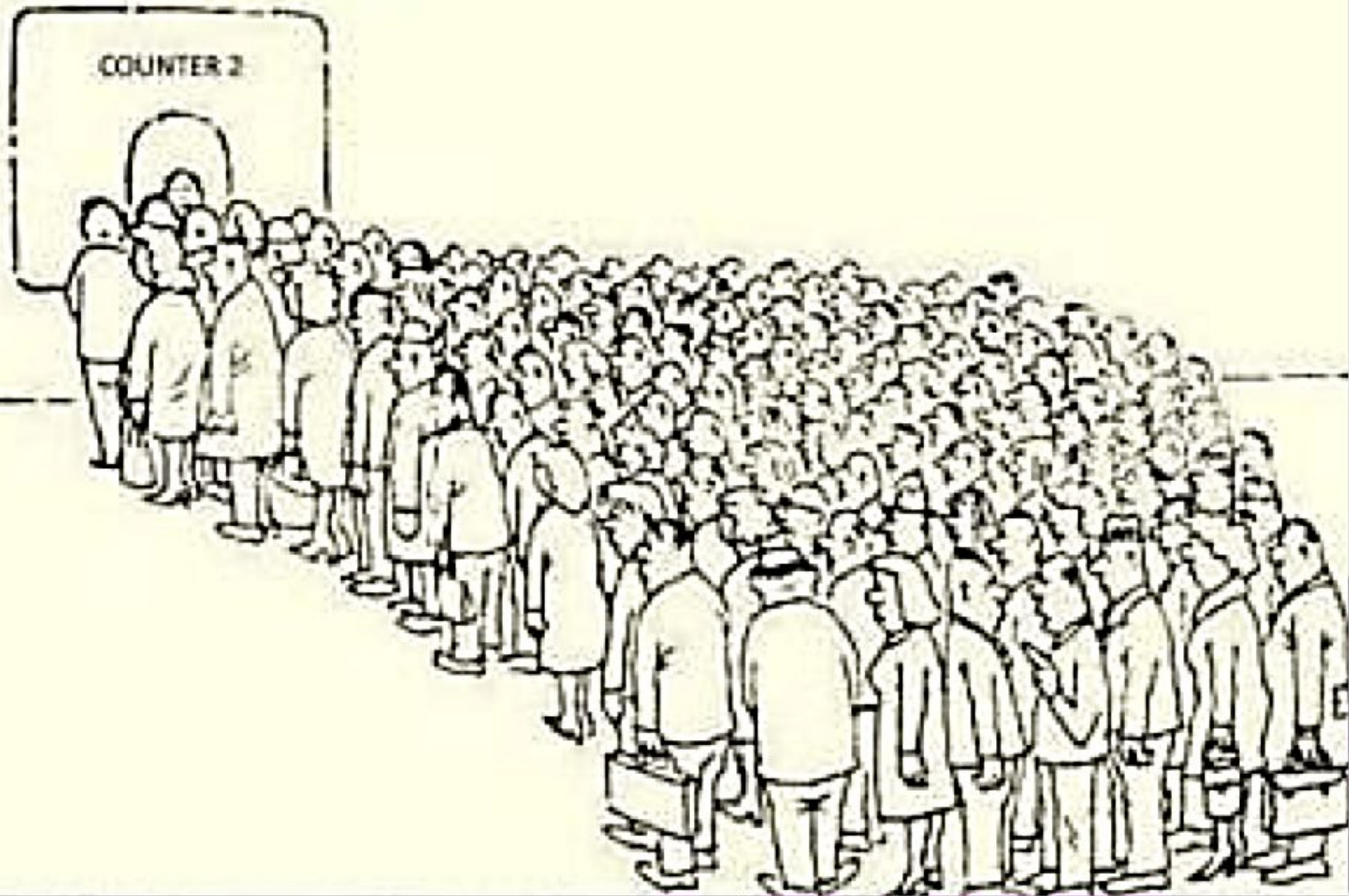
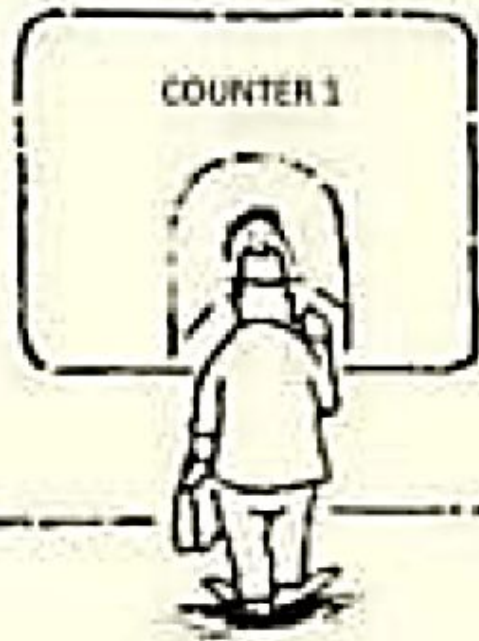
Пример СМО



Пример СМО

THOSE WHO HAVE TIME:
STAND IN LINE HERE

THOSE WHO DON'T HAVE TIME:
STAND IN LINE HERE



Формула Литтла

$$T_{\text{сист}} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{\text{сист}}$$

$$T_{\text{оч}} = \frac{1}{\lambda} \cdot L_{\text{оч}}, \text{ где}$$

$T_{\text{сист}}$ – время пребывания заявки в системе.

$T_{\text{оч}}$ – время пребывания заявки в очереди.

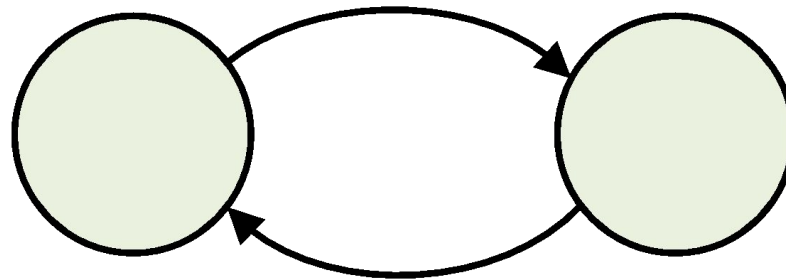
$L_{\text{сист}}$ – среднее число заявок в системе.

$L_{\text{оч}}$ – среднее число заявок в очереди.

Формула выведена из принципа, что в стационарном режиме работы СМО среднее число заявок, прибывающих в систему, равно среднему числу заявок, покидающих ее: оба потока заявок имеют одну и ту же интенсивность λ .

(M/M/1)

$$\begin{cases} P_1\mu - P_0\lambda = 0 \\ P_0\lambda - P_1\mu = 0 \end{cases}$$



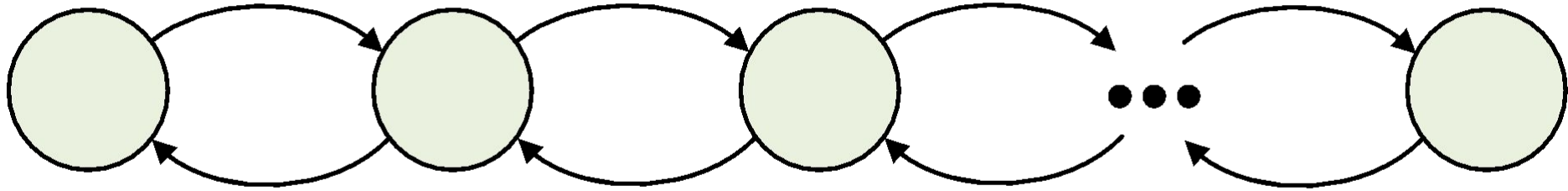
$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$ вероятность отказа в обслуживании заявки

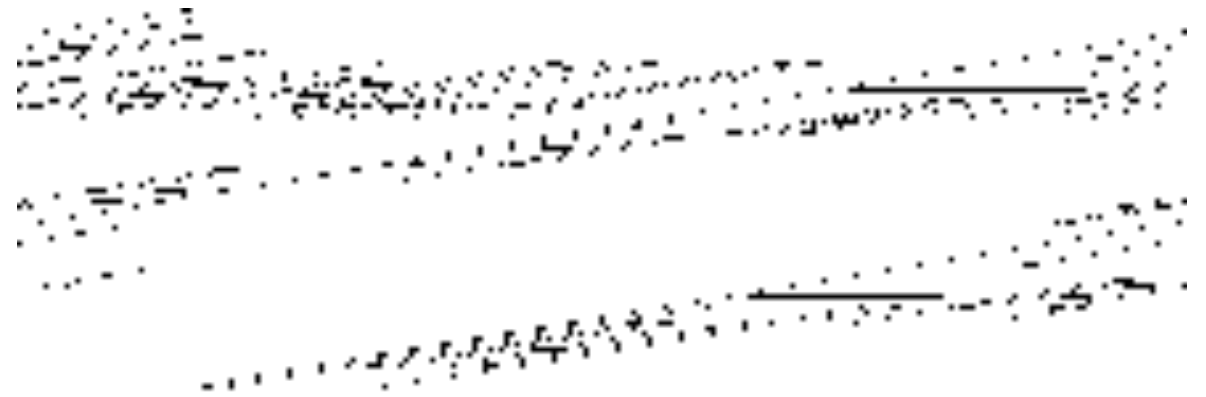
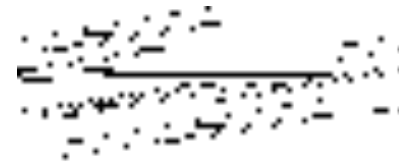
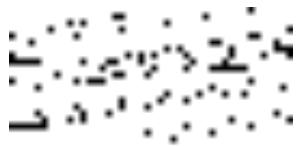
$A = \lambda P_0 = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}$ абсолютная пропускная способность (сколько заявок в единицу времени обслуживается)

$A = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$ относительная пропускная способность (какая часть заявок будет обслужена)

Одноканальная СМО с ограниченной очередью (М/М/1/К)



$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 \mu - P_0 \lambda = 0 \\ P_0 \lambda + P_2 \mu - P_1 (\lambda + \mu) = 0 \\ P_{k-1} \lambda + P_{k+1} \mu - P_k (\lambda + \mu) = 0 \\ \dots \\ P_{m-1} \lambda + P_{m+1} \mu - P_m (\lambda + \mu) = 0 \end{array} \right.$$



очередью

(M/M/1/K)

$$P_{отк} = P_N =$$

относительная пропускная
способность

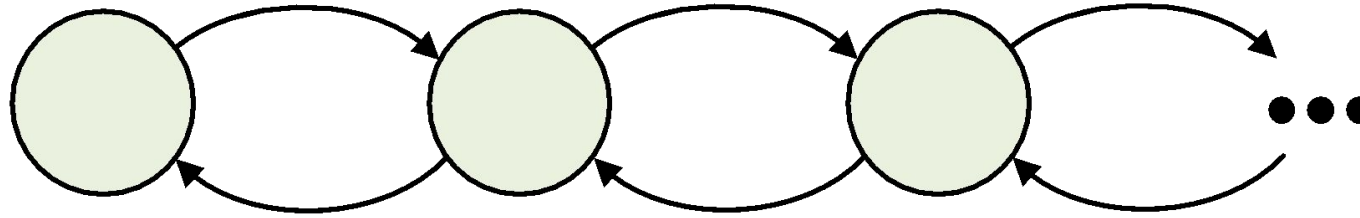
абсолютная пропускная способность: $A = q \cdot \lambda$

среднее число находящихся в системе заявок

среднее время пребывания заявки в системе:

средняя продолжительность пребывания клиента (заявки) в
очереди: $W = W - 1/\mu;$

Одноканальная СМО с неограниченной очередью (М/М/1/∞)



$$\begin{cases} P_1\mu - P_0\lambda = 0 \\ P_0\lambda + P_2\mu - P_1(\lambda + \mu) = 0 \\ P_{k-1}\lambda + P_{k+1}\mu - P_k(\lambda + \mu) = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$p_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \dots \right]^{-1} = (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^k + \dots)^{-1}. \quad p_0 = 1 - \rho,$$

$$p_1 = \rho \cdot p_0, \quad p_2 = \rho^2 \cdot p_0, \quad \dots, \quad p_k = \rho^k \cdot p_0, \quad \dots$$

$$p_1 = \rho(1 - \rho), \quad p_2 = \rho^2(1 - \rho), \quad \dots, \quad p_k = \rho^k(1 - \rho), \quad \dots$$

очередью

(M/M/1/∞)

$\bar{k} = 1 - P_0 = \rho$ Среднее число работающих ОУ в системе

$L_{\text{сист.}} = \frac{\rho}{1 - \rho}$ Среднее число заявок в системе

$W_{\text{сист.}} = \frac{\rho}{\lambda(1 - \rho)}$ Среднее время пребывания заявки в системе

$L_{\text{оч.}} = L_{\text{сист.}} - \rho = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$ Средне число заявок под обслуживанием

$W_{\text{оч.}} = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)}$ Время пребывания заявки в очереди

Пример расчета одноканальной СМО с неограниченной очередью

В порту имеется один причал для разгрузки судов. Интенсивность потока судов равна 0,4 (судов в сутки). Среднее время разгрузки одного судна составляет 2 суток. Предполагается, что очередь может быть неограниченной длины. Найти показатели эффективности работы причала, а также вероятность того, что ожидают разгрузки не более чем 2 судна.

Решение

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \bar{t}_{\text{об.}} = 0,4 \cdot 2 = 0,8$$

$$p_0 = 1 - 0,8 = 0,2$$

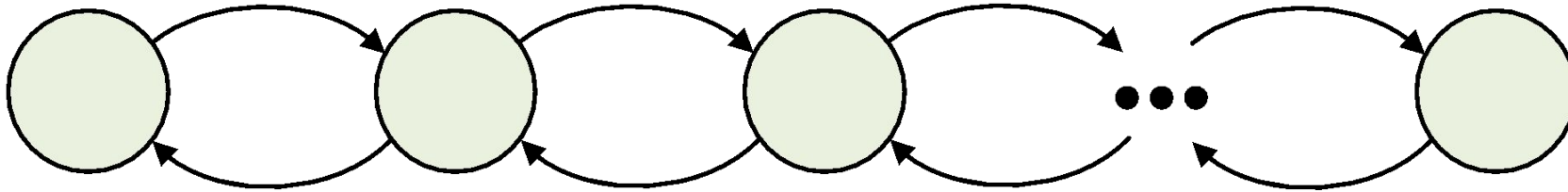
$$P_{\text{зан.}} = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$p_1 = 0,8(1 - 0,8) = 0,16; \quad p_2 = 0,8^2(1 - 0,8) = 0,128; \quad p_3 = 0,8^3(1 - 0,8) = 0,1024.$$

$$P = p_1 + p_2 + p_3 = 0,16 + 0,128 + 0,1024 = 0,3904. \quad \text{Вероятность ожидания не более, чем 2-х судов}$$

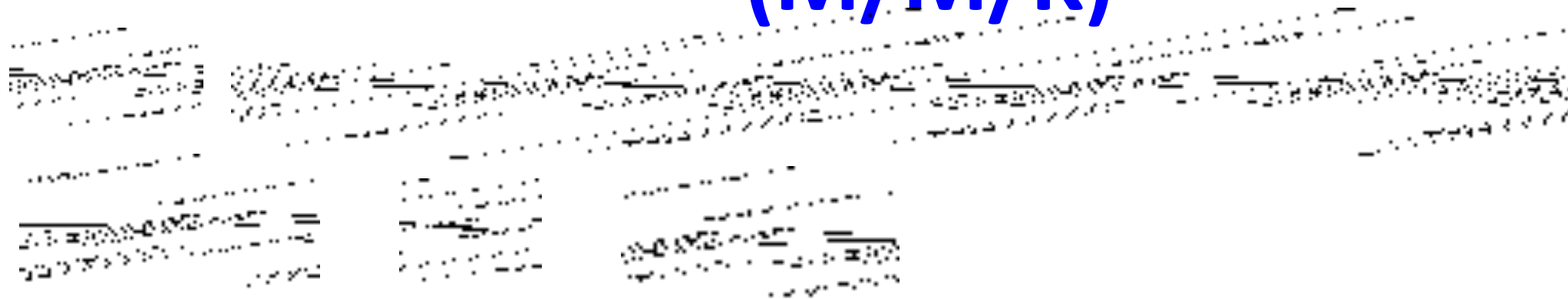
$$L_{\text{оч.}} = \frac{0,8^2}{1 - 0,8} = 3,2 \quad T_{\text{оч.}} = \frac{3,2}{0,8} = 4 \quad L_{\text{сист.}} = \frac{0,8}{1 - 0,8} = 4 \quad T_{\text{сист.}} = \frac{4}{0,8} = 5$$

(M/M/K)



$$\left. \begin{aligned} -\lambda p_0 + \mu p_1 &= 0, \\ \lambda p_0 - (\lambda + \mu) p_1 + 2\mu p_2 &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + (k+1)\mu p_{k+1} &= 0 \quad (0 < k < n), \\ \dots\dots\dots \\ \lambda p_{n-2} - [\lambda + (n-1)\mu] p_{n-1} + n\mu p_n &= 0, \\ \lambda p_{n-1} - n\mu p_n &= 0. \end{aligned} \right\}$$

(М/М/К)



$$\sum_{k=0}^n P_k = P_0 \sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!} = 1 \quad P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}} \quad P_k = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}}$$

$$P_{\text{ОТК}} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0$$

$$q = 1 - P_{\text{ОТК}} = 1 - P_n = 1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0$$

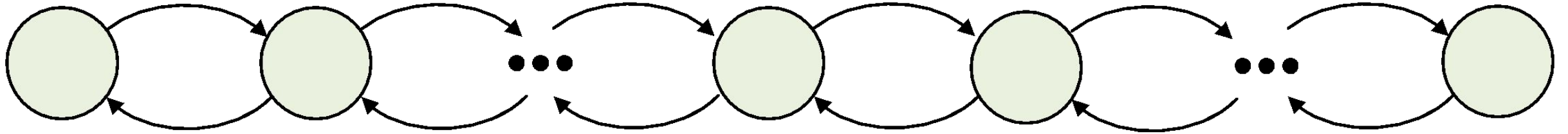
$$A = q\lambda = \lambda(1 - P_{\text{ОТК}}) = \lambda(1 - P_n) = \lambda \left(1 - \frac{\rho^n}{n!} P_0 \right)$$

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^n k \cdot P_k = \rho(1 - P_{\text{ОТК}})$$

Формула
Эрланга!

очередью

(M/M/K/∞)



$$\left\{ \begin{array}{l} P_1\mu - P_0\lambda = 0 \\ P_0\lambda + P_22\mu - P_1(\lambda + \mu) = 0 \\ P_{k-1}(k+1)\lambda + P_{k+1}k\mu - P_k(k\lambda + k\mu) = 0 \\ P_{k-1}(n+1)\lambda + P_{k+1}n\mu - P_k(n\lambda + n\mu) = 0 \\ \dots \\ P_{n+m-1}(n+1)\lambda - P_{n+m}(n\lambda + n\mu) = 0 \end{array} \right.$$

$\phi = \rho/n$ – нагрузка на один

канал

$$\left[\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} \psi^k + \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{\psi^{n+1}(1-\psi^n)}{1-\psi} \right]^{-1}, \quad \text{если } \psi \neq 1$$

$$\left(\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} + \frac{n^n}{n!} \cdot m \right)^{-1}, \quad \text{если } \psi = 1$$

$$\alpha_k = \frac{\lambda^k}{(k\mu)[(k-1)\mu \cdot \dots \cdot \mu]} = \frac{\lambda^k}{\mu^k \cdot k!} = \frac{\rho^k}{k!} = \frac{n^k}{k!} \left(\frac{\rho}{n} \right)^k; k = 1, \dots, n.$$

$$\alpha_{n+2} = \frac{n^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n} \right)^{n+2}, \dots, \alpha_{n+m} = \frac{n^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n} \right)^{n+m}$$

Многоканальная СМО с ограниченной очередью (М/М/К/Л)

$$P_{\text{ОТК}} = P_{n+m} = \frac{n^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^{n+m} P_0$$

$$P_{\text{ОБС}} = 1 - P_{\text{ОТК}} = 1 - \frac{n^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^{n+m} P_0$$

$$Q = P_{\text{ОБС}} = 1 - P_{\text{ОТК}} = 1 - \frac{n^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^{n+m} P_0$$

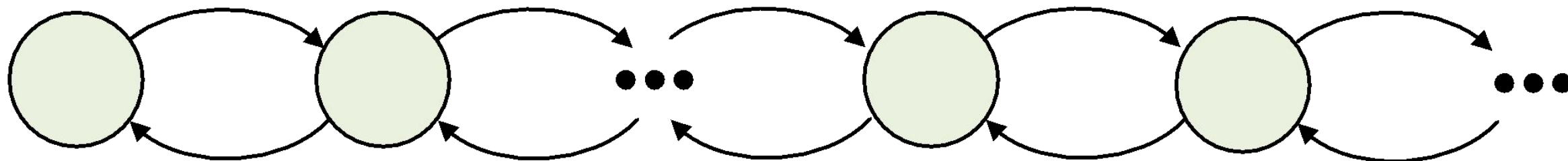
$$A = \lambda Q = \lambda \left[1 - P_{\text{ОТК}} = 1 - \frac{n^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n}\right)^{n+m} P_0 \right]$$

$$\bar{k} = \overline{N_{\text{ОБС}}} \frac{A}{\mu} = \rho Q \quad \text{Среднее число занятых работой ОУ}$$

$$T_{\text{СИСТ}} = T_{\text{ОЧ}} + 1/\mu(\rho/n)$$

очередью

(M/M/K/∞)



$$\left\{ \begin{array}{l} P_1\mu - P_0\lambda = 0 \\ P_0\lambda + P_22\mu - P_1(\lambda + \mu) = 0 \\ P_{k-1}(k+1)\lambda + P_{k+1}k\mu - P_k(k\lambda + k\mu) = 0 \\ P_{k-1}(n+1)\lambda + P_{k+1}n\mu - P_k(n\lambda + n\mu) = 0 \\ \dots \end{array} \right.$$

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\rho^1}{1!} \cdot p_0, \dots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \dots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0, \dots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0, \dots$$

очередью

(M/M/K/∞)

$$P_{\text{och.}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n - \rho)} \cdot p_0.$$

$$L_{\text{och.}} = \frac{\rho^{n+1} \cdot p_0}{n \cdot n!} \cdot \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^{-2},$$

$$L_{\text{sist}} = L_{\text{och.}} + \rho.$$

$$P_{\text{otk.}} = 0$$

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho, \quad \text{Среднее число занятых каналов}$$

Литература

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. — Учеб. пособие для втузов. — 2-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2000. — 383 с:
2. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Пер. с англ. /Пер. И.И. Глушко; ред. В.И. Нейман. — М.: Машиностроение, 1979. — 432 с.
- 3/ Миллер Б. М., Панков А. Р. Теория случайных процесспроцессов в примерах и задачах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. -320 с.