Подготовка к ЕГЭ

ЛОГАРИФМЫ

РАЗРАБОТКА
УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ
ГОУ СОШ №618
Макаровой Татьяны Павловны

Свойства функции $y = \log_a x$, $a > 1$:

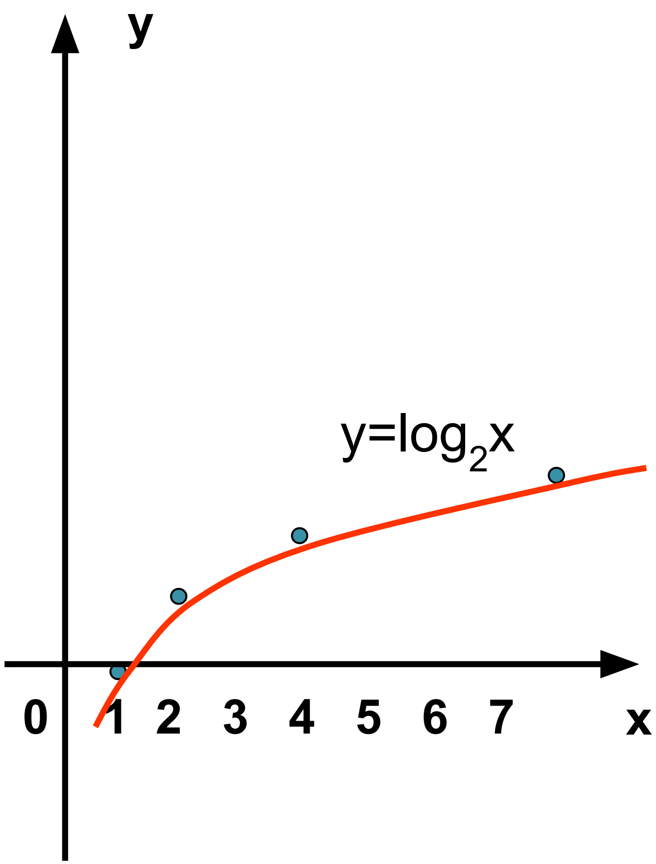
- D(f) = (0; +∞);
- не является ни четной, ни нечетной;
- возрастает на (0; + ∞);
- не ограничена сверху, не ограничена снизу;
- не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
- непрерывна;
- E(f) = (- ∞ ;+ ∞);
- выпукла вверх;
- дифференцируема.

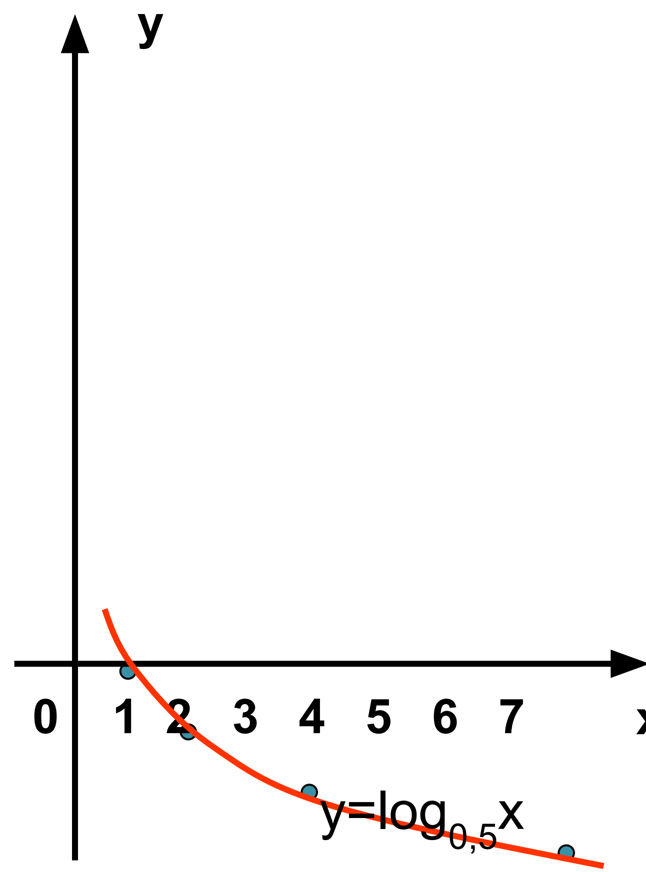
$y=\log_2 x$

x	1/2	1	2	4	8
y	-1	0	1	2	3

$y=\log_{0,5} x$

x	1/2	1	2	4	8
y	1	0	-1	-2	-3





Определите, какие из перечисленных ниже функций являются возрастающими, а какие убывающими?

$y = log_2 x$	$2 > 1$	возрастающая
$y = log_{0,5}(2x + 5)$	$0 < 0{,}5 < 1$	убывающая
$y = lg\,(x)^{1/2}$	$10 > 1$	возрастающая
$y = ln(x + 2)$	$e > 1$	возрастающая

Свойства логарифмов
(a > 0, a ≠ 1)

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, x > 0, y > 0$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, x > 0, y > 0$$

$$\log_a x^p = p\log_a x, x > 0$$

$$\log_a 1 = 0 \qquad \log_a a = 1$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, b > 0, c > 0, a \neq 1, c \neq 1$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$$

«ХИТРОСТИ» свойств логарифмов:

$$\log_a b^2 = 2\log_a |b|$$

$$при \quad a > 0, a \neq 1, b \neq 0;$$

$$\log_a bc = \log_a(-b) + \log_a(-c)$$

$$при\ a > 0, a \neq 1, b < 0, c < 0;$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a(-b) - \log_a(-c)$$

$$при\ a > 0, a \neq 1, b < 0, c < 0;$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$при\ a > 0, b > 0, b \neq 0, c > 0$$

Преобразование логарифмических выражений

Сравнить числа $\log_{13}150$ **и** $\log_{17}290$**.**

<u>Решение.</u>

Так как $\log_{13}150 < \log_{13}169$

$\log_{13}169 = \log_{13}13^2 = 2$, **т.е.** $\log_{13}150 < 2$.

$\log_{17}290 > \log_{17}289 = \log_{17}17^2 = 2$, **т.е.**

$\log_{17}290 > 2$,

то

$\log_{13}150 < \log_{17}290$.

Преобразование логарифмических выражений

Сравнить числа $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{80}$ *и* $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{15+\sqrt{2}}$.

<u>Решение.</u>

Так как $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{80}<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{81}=4$

И 15+ $\sqrt{2}>16,\ a$

$$\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{15+\sqrt{2}}>\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}=4,\ mo$$

$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{80} < \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{15+\sqrt{2}}.$$

Преобразование логарифмических выражений

Доказать, что $\log_9 10 > \lg 11.$

$$Рассмотрим\quad A = \frac{\lg 11}{\log_9 10},\quad A > 0.$$

$$Докажем, что\ A < 1.$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{\frac{\lg 11}{\log_9 10}} = \sqrt{\lg 11 \cdot \lg 9} \leq$$

$$\frac{\lg 11 + \lg 9}{2} = \frac{\lg 99}{2} < \frac{\lg 100}{2} = 1.$$

$$То\quad \sqrt{A} < 1, и \log_9 10 > \lg 11.$$

Повышенный уровень

Найти значение выражения $(1-5)$.

1. $\sqrt[3]{36^{\frac{1}{\log_9 6}}-7^{\log_{49}289}}$

2. $\log_6 \frac{1}{\sqrt{216}}+\lg 10\sqrt{0,1}$.

3. $\log_2\left(\sin\frac{\pi}{12}\right)+\log_2\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)+1$

4. $\log_{\frac{1}{6}}\log_{27}\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}}$.

5. $\left(\sqrt{7}\right)^{4-\log_{\sqrt{7}}0,5}$

Логарифмические уравнения – это уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида

$$\log_a f(x) = b,$$

где a > 0, a ≠ 1, равносильное уравнению

$$f(x) = a^b \,.$$

Уравнение вида $\log_x A = B, A > 0$

- при $A \neq 1$ и $B \neq 0$ имеют единственный корень $x = A^{1/B}$;
- при $A = 1$ и $B = 0$ имеют решением любое положительное, отличное от единицы, число;
- при $A = 1$ и $B \neq 0$ корней нет;
- при $A \neq 1$ и $B = 0$ корней нет.

Тренировочные упражнения

$$0{,}2\log_x \frac{1}{32} = -0{,}5.\ \textit{Ответ}: 4.$$

$$\log_{x-1} 3 = 2.\ \textit{Ответ}: 1+\sqrt{3}.$$

$$\log_{\log_3 x} = 2.\ \textit{Ответ}: 3^{\sqrt{3}}.$$

Уравнение вида $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, $a>0$, $a\neq 1$

- **1 способ.**

$$\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0,\\ f(x)=g(x).\end{cases}$$

- **2 способ.**

$$\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0,\\ f(x)=g(x).\end{cases}$$

Тренинг

1) $\log_7(x^2-12)=\log_7 x$

2) $\log_{11}(x^2-5x+6)=\log_{11}(x-2)$

3) $\log_{15} x^4=\log_{15}(15x)^2$

4) $\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{2+x}{10}=\log_{\frac{1}{5}}\dfrac{2}{x+1}$

5) $\log_4(x^2+3x-4)=\log_4\dfrac{x-1}{x+4}$

6) $\log_7\left(\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}\right)=\log_7(2-\left|x-3x^2\right|)$.

Логарифмы с переменным основанием

Уравнения вида $\log_{g(x)} f(x)=b$

равносильны смешанной системе

$$\log_{g(x)} f(x)=b \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>0, \\ g(x)\neq 1, \\ f(x)=g(x)^b. \end{cases}$$

Тренинг

1) $\log_{x+1}(5-x)=1.$ $\quad$ *Ответ*: 2

2) $\log_{x^2-2x+1}(3x-5)=1.$ $\quad$ *Ответ*: 3

3) $\log_x(x^2-2)=1.$ $\quad$ *Ответ*: 2

4) $\log_{4\sqrt[4]{x}}\sqrt[4]{x}=0.$ $\quad$ *Ответ*: $\left\{1;\frac{1}{2};16\right\}$

Уравнения вида $\log_{f(x)}g(x)=\log_{f(x)}h(x)$

$$\log_{f(x)}g(x)=\log_{f(x)}h(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0,\\ f(x)>0,\\ f(x)\neq 1,\\ g(x)=h(x).\end{cases}$$

или

$$\log_{f(x)}g(x)=\log_{f(x)}h(x)\Leftrightarrow\begin{cases}h(x)>0,\\ f(x)>0,\\ f(x)\neq 1,\\ g(x)=h(x).\end{cases}$$

Тренировочные упражнения

$$\log_{x^2-1}\left(x^3+6\right)=\log_{x^2-1}\left(4x^2-x\right);$$

$$\log_{x^2-\frac{17}{4}x+1}4x^2=\log_{x^2-\frac{17}{4}x+1}(x+4)^2;$$

$$\log_{\frac{x}{2}}(x-2)+\log_{\frac{x}{2}}(2x-6)=2.$$

Уравнения вида $\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x)$

$$\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ g(x) = p(x). \end{cases}$$

или

$$\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ p(x) > 0, \\ p(x) \neq 1, \\ g(x) = p(x). \end{cases}$$

Тренинг

$$\log_{x^3+x}\left(x^2-4\right)=\log_{4x^2-6}\left(x^2-4\right);$$

$$\log_{\left(4x-x^2\right)} x=\log_{(12-3x)} x;$$

Уравнения вида $2n\log_a f(x)=\log_a g(x)$ a>0, a≠1, n€N

$$2n\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0,\\ f^{2n}(x)=g(x).\end{cases}$$

Пример.

$$\lg 2x=2\lg(4x-15)\Leftrightarrow\begin{cases}4x-15>0,\\ \lg 2x=\lg(4x-15)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x-15>0,\\ 2x=(4x-15)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{15}{4},\\ 16\left(x-\dfrac{9}{2}\right)\left(x-\dfrac{25}{8}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{9}{2}.$$

Методы решения логарифмических уравнений

1. Решение уравнений, основанных на определении логарифма

$$\log_2(5 - x) = 3.$$

По определению логарифма

$$5 - x = 2^3,$$

откуда $x = -3$.

$$x = -3 \quad \text{– корень уравнения.}$$

Ответ: $x = -3$.

2. Решение уравнений с помощью потенцирования

$$\log_3(x+1)+\log_3(x+3)=1.$$

Потенцируя, имеем: $\log_3(x+1)(x+3)=1.$

Учитывая область определения получаем систему:

$$\begin{cases}(x+1)(x+3)=3,\\ x+1>0,\\ x+3>0.\end{cases} \qquad \begin{cases}x^2+4x=0,\\ x>-1.\end{cases}$$

Откуда $x_1=0$, $x_2=-4$. Так как $x>-1$, то корень $x_2=-4$ – посторонний.

Ответ: $x=0$

3.Применение основного логарифмического тождества

$$\log_2(9-2^x)=10^{\lg(3-x)}$$

Область определения уравнения

$$\begin{cases} 9-2^x>0, \\ 3-x>0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^x<9, \\ x<3. \end{cases}$$

откуда $x<3$. Применив в правой части уравнения основное логарифмическое тождество, получим:

$\log_2(9-2^x)=3-x$ или $9-2^x=2^{3-x}$ или $9-2^x=\frac{8}{2^x}$,
$2^{2x}-9\cdot 2^x+8=0$, откуда $2^x=1$, $x_1=0$; $2^x=8$, $x_2=3$.
Так как $x<3$, то $x_2=3$ – посторонний корень.

Ответ: $x=0$.

4. Логарифмирование

$$10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20.$$

Область определения уравнения задается условиями $x > 0$, $x \neq 1$. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10, предварительно упростив его:

$(10^{\lg x})^{\lg x} + x^{\lg x} = 20$, $x^{\lg x} + x^{\lg x} = 20$, $x^{\lg x} = 10$ или $\lg x^{\lg x} = \lg 10$, $\lg^2 x = 1$, $\lg x = \pm 1$, значит $\lg x = 1$, $x_1 = 10$; $\lg x = -1$, $x_2 = 0{,}1$. Оба корня удовлетворяют ограничениям $x > 0, x \neq 1$.

Ответ: $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$.

Замена переменных в уравнениях

Две основные идеи решения логарифмических уравнений:

- приведение уравнения к виду

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

  с последующим потенцированием;
- замена неизвестных вида $y = \log_a f(x)$

  с предшествующим преобразованием уравнения к удобному для этой замены виду.

5. Замена переменной

$$\sqrt{\lg(-x)} = \lg\sqrt{x^2}.$$

Так как $-x > 0$, т.е. $x < 0$ и $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, то данное уравнение можно записать в виде

$$\sqrt{\lg(-x)} = \lg(-x)$$

Пусть $\sqrt{\lg(-x)} = t, t \geq 0,$ тогда получаем $t = t^2$, $t\,(t-1) = 0$, откуда $t_1 = 0$, $t_2 = 1$.

Значит $\lg(-x) = 0$, $x_1 = -1$;

$\lg(-x) = 1$, $x_2 = -10$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -10$.

Тренировочные упражнения

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 4 = 0$$

Ответ: 2;16

$$\log_3 x = 1 + \log_x 9$$

Ответ: 9;1/3

$$4 + \log_2 x^2 = \log_x 64$$

Ответ:0,125; 2

$$\log_3^2(3x) + \log_{\frac{1}{3}}\left(3x^2\right) = 1$$

Ответ: 1/3; 3

$$4 \cdot (\log_4 x)^2 = \log_2 \frac{x^5}{16}$$

Ответ: 2; 16

6. Переход к другому основанию

$$3^{\log^2_3 x} + x^{\log_3 x} = 162.$$

Запишем уравнение в виде

$$\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162, \text{где } x > 0, x \neq 1.$$

Далее имеем

$$x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162, \quad 2x^{\log_3 x} = 162, \quad x^{\log_3 x} = 81.$$

Прологарифмировав обе части уравнения по основанию 3, получим:

$\log_3 x \cdot \log_3 x = \log_3 81$ или $(\log_3 x)^2 = 4,$ откуда

$\log_3 x = \pm 2,$ тогда $x_1 = 9, x_2 = \frac{1}{9}.$

Ответ: $x_1 = 9, x_2 = \frac{1}{9}.$

ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ЗАДАЧ И СХЕМЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Сведение к рациональным неравенствам

Тренинг

$$\log_{\frac{x+5}{x-1}} 3 - \log_{\frac{2x+1}{2x-5}} 3 \le 0$$

$$\textit{Ответ}: (-\infty; -5) \cup \left(\frac{5}{2}; 4\right].$$

$$\log_{(2-5x)} 3 + \frac{1}{\log_2 (2-5x)} \le \frac{1}{\log_6 (6x^2 - 6x + 1)}$$

$$\textit{Ответ}: \left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(0{,}5; 0{,}5 - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$\log_{2x-\frac{3}{2}} 5 + \log_{x+1} 5 \ge 0$$

$$\textit{Ответ}: (0{,}75; 1] \cup \left(\frac{5}{4}; +\infty\right)$$

Метод интервалов и систем

Тренинг

$$\frac{\sqrt{(x-5)(x+5)}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1} \geq 0.$$

$$\textit{Ответ}: \{5\} \cup \left(4+\sqrt{2};+\infty\right).$$

$$(\sqrt{3-17x-6x^2}+2)\log_{8x} 7 \geq 0.$$

$$\textit{Ответ}: \left(\frac{1}{8};\frac{1}{6}\right]$$

$$\log_{\frac{1}{5}}(x-\sqrt{x+2})\cdot\left(\log^2_{\frac{1}{5}}(x+1)-\log_{\frac{1}{5}}(x+1)-6\right) \geq 0$$

Неравенства вида $\log_{h(x)} f(x) < b$

$$\log_{h(x)} f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x) - h^b(x)}{h(x) - 1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

Частный случай при $b \in \{0;1;2\}$

b=0

$$\log_{h(x)} f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)-1}{h(x)-1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

b=1

$$\log_{h(x)} f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)-h(x)}{h(x)-1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

b=2

$$\log_{h(x)} f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x)-h^2(x)}{h(x)-1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0. \end{cases}$$

Решите неравенство $\log_{2x-5}(5x-2)\geq 1$

$$\log_{2x-5}(5x-2)\geq 1 \Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2)}{\log_2(2x-5)}-1\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2)-\log_2(2x-5)}{\log_2(2x-5)-\log_2 1}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(5x-2)-(2x-5)}{(2x-5)-1}\geq 0, \\ 5x-2>0, \\ 2x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-3}\geq 0, \\ x>2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow x>3.$$

Ответ: $(3,+\infty)$.

Тренинг

1. $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \le 2.$

$Ответ:\quad (-0,5;0]\cup[1;4).$

2. $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x) \le 0.$

$Ответ:\quad (-2;-1]\cup(1;2).$

3. $\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1) \ge \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2).$

$Ответ:\quad \{1\}\cup(1,5;3).$

Неравенство
$\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$

равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x) > 0, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ 0 < f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Решить неравенства

$\log_3(x^2 - x) \geq \log_3(x + 8);$

$$\log_{0,2}(5-x) > \log_{0,2}\frac{2}{x-2};$$

$$\log_2(\log_{\frac{1}{3}}(\log_8 x)) > 0;$$

$$\log_{\frac{x+2}{x-3}}(5-x) > \log_{\frac{x+2}{x-3}}(4-x).$$

Смешанные задачи с логарифмами

- Модули и возведение в квадрат

$$1)\ \left|\log_2\left(x^2+5x+6\right)-\log_2(x+2)\right|\le 1$$

$$2)\ \left(\log_4\left(x^2+x-6\right)-\log_4(x+3)\right)^2\le 1$$

$$3)\ \left(\log_3\left(3x^2+13x+11\right)-1-\log_3(x+2)\right)^2\le 1$$

$$4)\ \left|\log_4\left(x^2+4\right)-\log_4 x\right|\le 1$$

- Логарифмы и корни

$$(1+\log_2 x)\cdot\sqrt{\log_{2x}\sqrt{\frac{x}{2}}}\le 1$$

$$\log_3(9x)\le-\sqrt{\log_3(81x)}$$