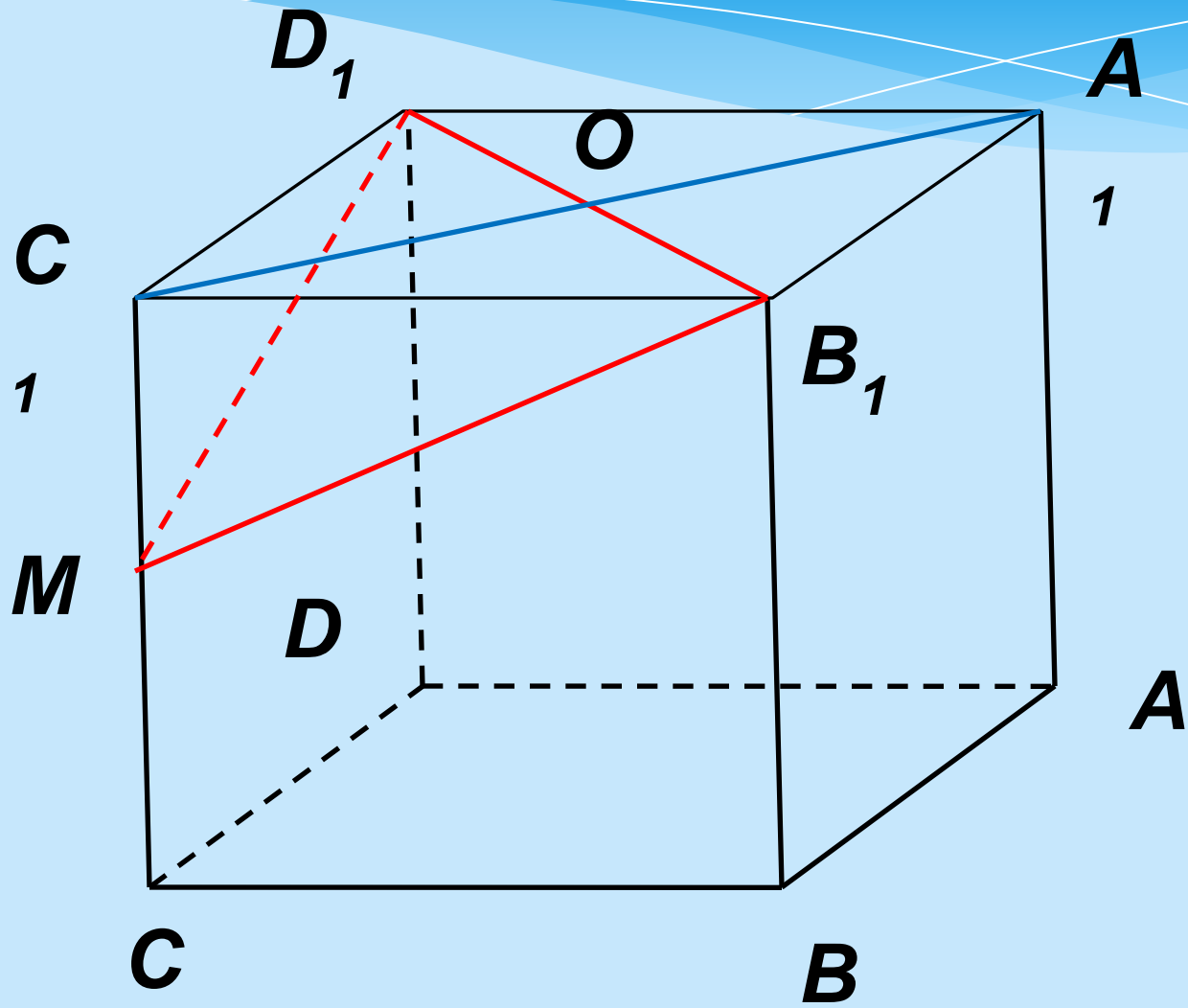


Решение задач С2

Титенко О.Г. учитель математики МБОУ СОШ № 17
с. Краснопартизанского

Вариант 21

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$, со стороной a и острым углом A , равным 60° . Высота призмы равна a . Через вершины B_1, D_1 и середину M ребра CC_1 проведена плоскость. Найдите угол (в градусах) между плоскостью $B_1 M D_1$ основанием $ABCD$.



Плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны. Плоскость B_1MD_1 образует равные углы с плоскостями оснований призмы. Находим двугранный угол $C_1B_1D_1M$

$$MC_1 \perp (B_1C_1D_1) \quad OC_1 \perp B_1D_1$$

Т.к. $MO \perp B_1D_1$,

то по теореме о трех перпендикулярах $\angle MOC_1$

.

Значит $\angle MOC_1$ - линейный угол двугранного угла $C_1B_1D_1M$

$\Delta C_1 B_1 O$ – прямоугольный,

$$\angle B_1 C_1 O = 30^\circ,$$

$$B_1 C_1 = a,$$

$$C_1 O = B_1 C_1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

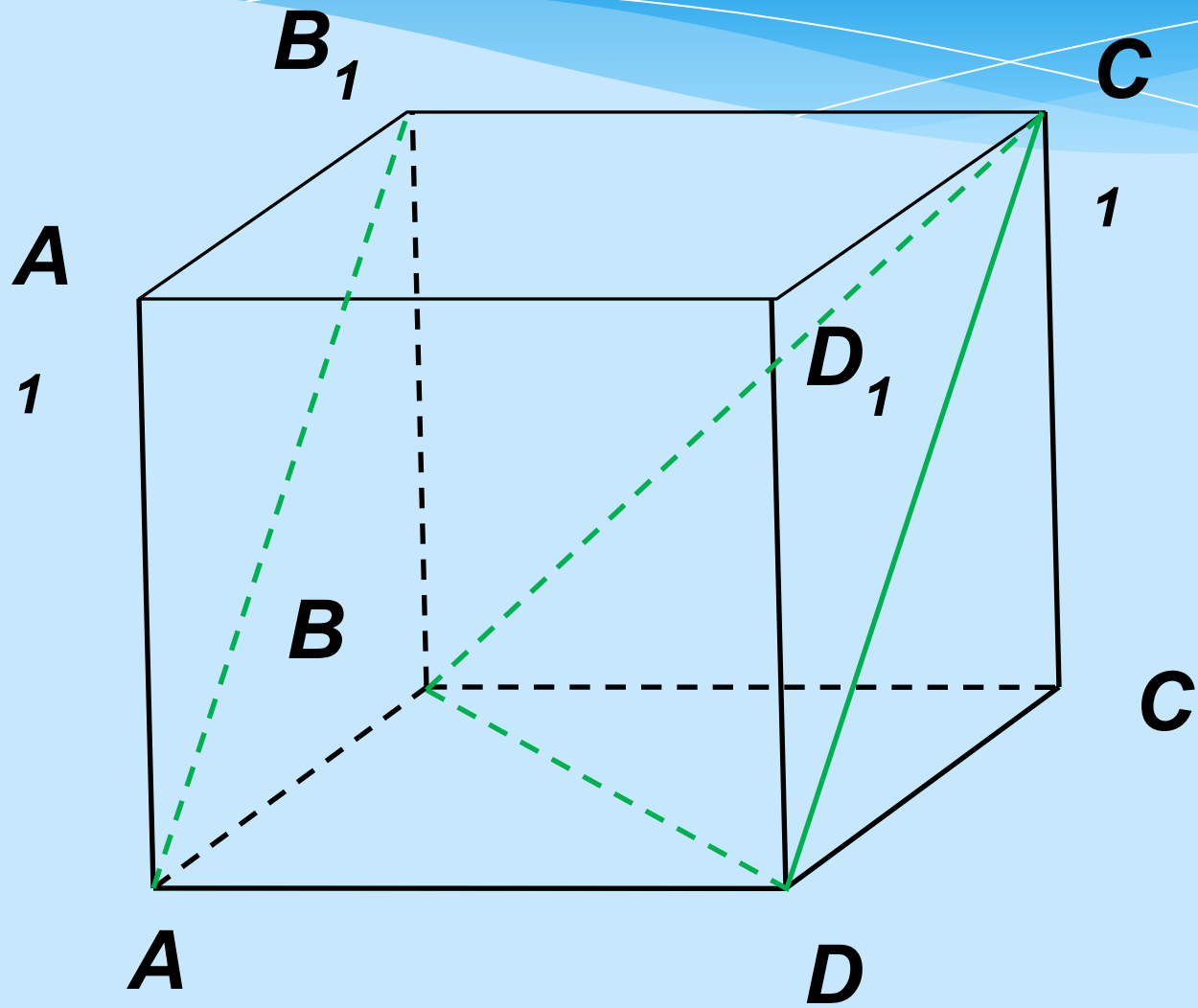
$\Delta C_1 M O$ – прямоугольный,

$$\operatorname{tg} \angle C_1 O M = \frac{C_1 M}{C_1 O} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\angle C_1 O M = 30^\circ$$

Вариант 23

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$, со стороной a и острым углом A , равным 60° . Высота призмы равна a . Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD



Прямые AB_1 и BD – скрещивающиеся, т.к. AB_1 и DC_1 параллельные прямые, то угол BDC_1 –
искомый угол между скрещивающимися прямыми
 AB_1 и BD .

$\triangle BDC_1$ – равнобедренный,

$$BC_1 = DC_1 = a\sqrt{2}$$

$$BD = a$$

По теореме косинусов:

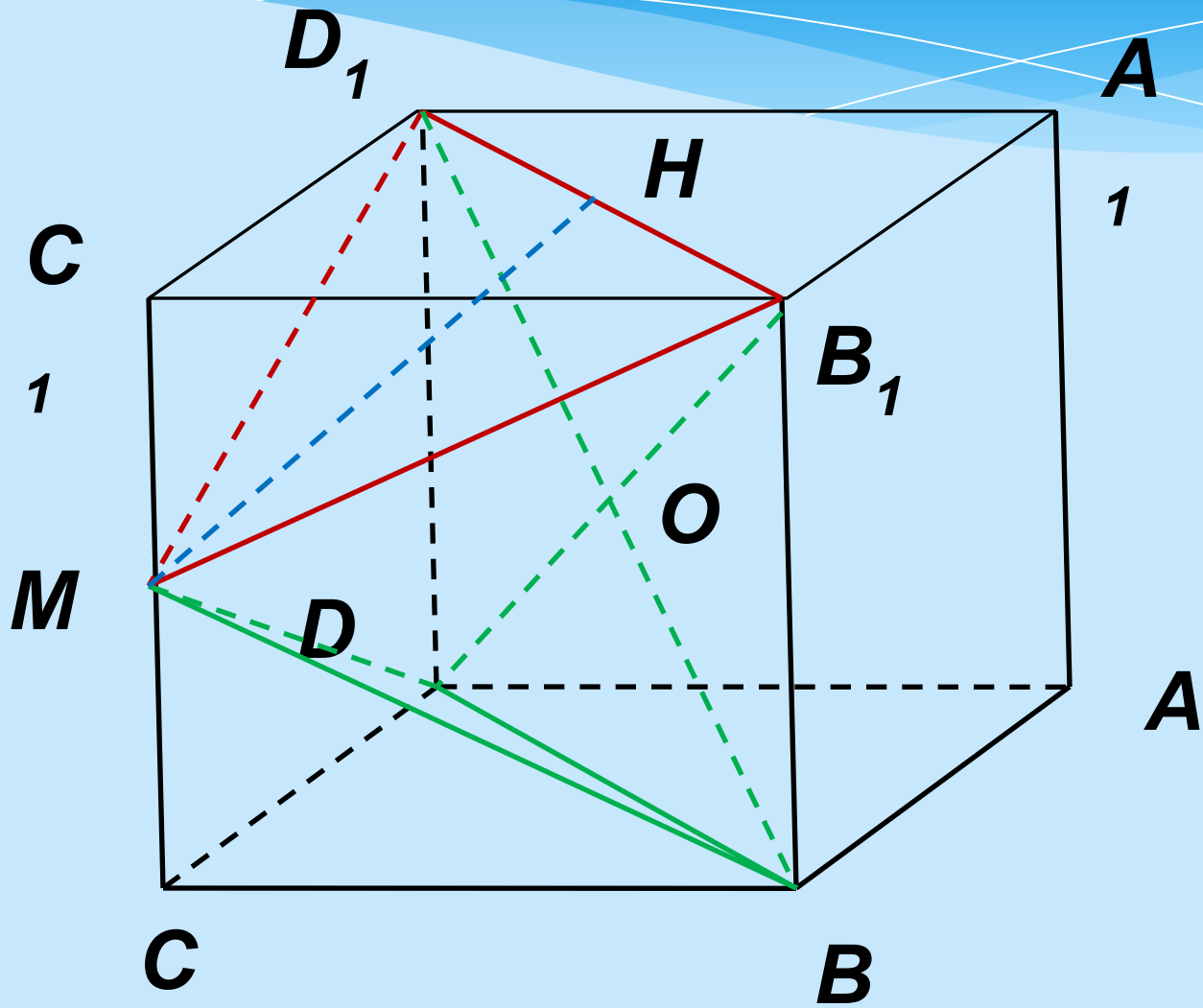
$$BC_1^2 = BD^2 + DC_1^2 - 2 \cdot BD \cdot DC_1 \cdot \cos \angle BDC_1$$

$$\cos \angle BDC_1 = \frac{BD^2 + DC_1^2 - BC_1^2}{2 \cdot BD \cdot DC_1}$$

$$\cos \angle BDC_1 = \frac{a^2 + 2a^2 - 2a^2}{2a \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Вариант 25

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит ромб $ABCD$, со стороной $\sqrt{3}$ и острым углом A , равным 60° . Высота призмы равна 4. Через вершины B_1, D_1 и середину M ребра CC_1 проведена плоскость. Найдите расстояние от точки B до плоскости $B_1 M D_1$.



$$\Delta B_1C_1M = \Delta D_1C_1M = \Delta BCM = \Delta DCM$$

$$B_1M = D_1M = BM = DM = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$$

Рассмотрим пирамиду MDD_1V_1V . Т.к. боковые ребра пирамиды равны, то основанием высоты, проведенной из вершины M к основанию пирамиды – прямоугольнику DD_1V_1V , является точка O (точка пересечения диагоналей основания).

Вычислим объём пирамиды MDD_1V_1V .

$$V_{MDD_1B_1B} = \frac{1}{3} S_{DD_1B_1B} \cdot MO$$

$$DB = \sqrt{3}$$

$$D_1D = 4$$

$$S_{DD_1B_1B} = DB \cdot D_1D = 4\sqrt{3}$$

$$BD_1 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{19}$$

$$BO = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

$$MO = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2 + (\sqrt{7})^2} = \frac{3}{2}$$

$$V_{MDD_1B_1B} = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$V_{MD_1B_1B} = \frac{1}{2} \cdot V_{MDD_1B_1B} = \sqrt{3}$$

Объём пирамиды MD_1B_1B можно вычислить приняв за основание треугольник MD_1B_1 . Высота, проведенная из вершины B к основанию MD_1B_1 , является искомым расстоянием от точки B до плоскости MD_1B_1 .

$\triangle MD_1B_1$ – равнобедренный,

$$MB_1 = MD_1 = \sqrt{7}$$

$$B_1D_1 = \sqrt{3}$$

$$D_1H = B_1H = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$MH = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$$

$$S_{\triangle MD_1B_1} = \frac{1}{2} \cdot B_1D_1 \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

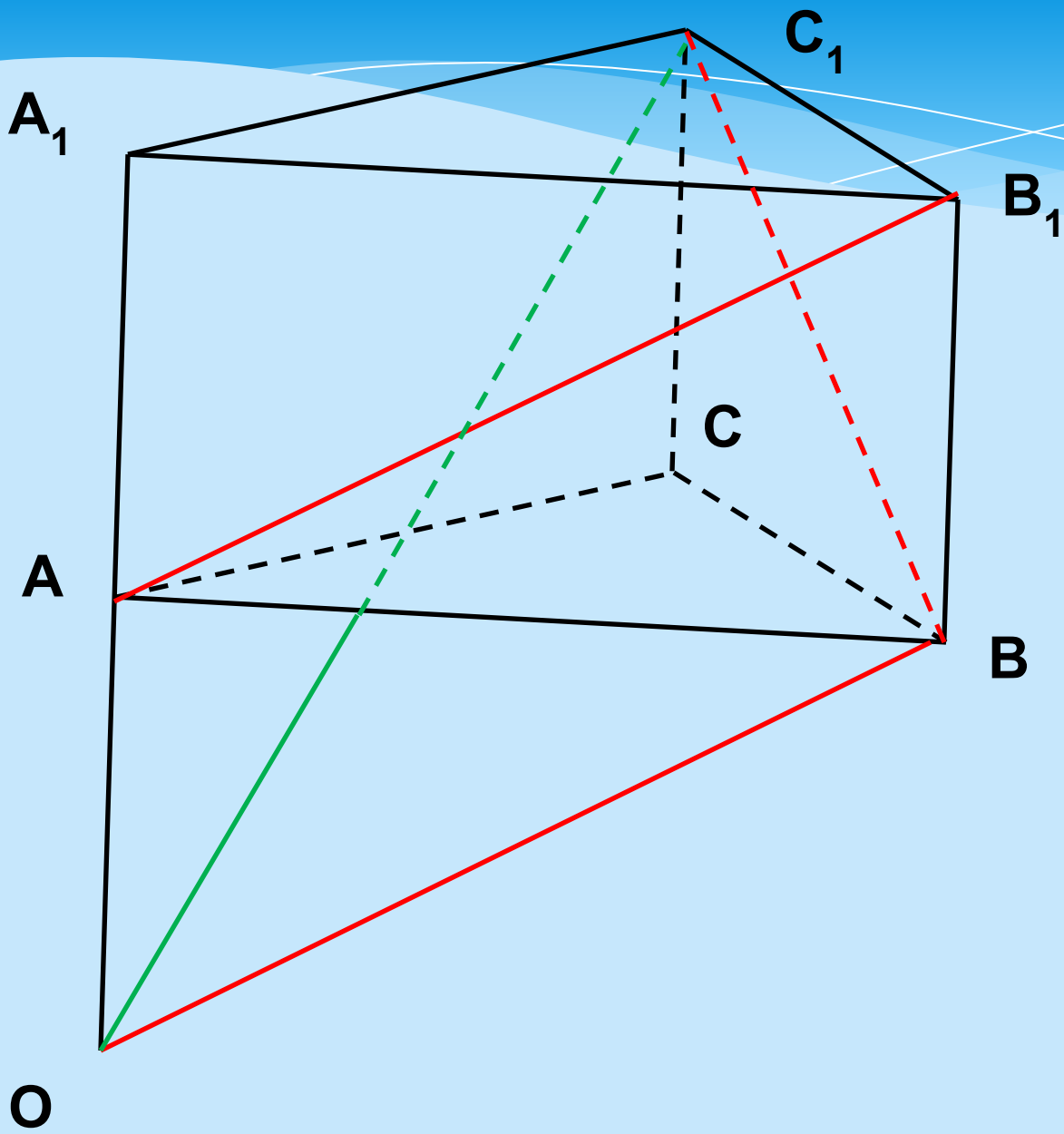
$$V_{MD_1B_1B} = \frac{1}{3} \cdot S_{MD_1B_1} \cdot h$$

$$h = \frac{3 \cdot V}{S_{MD_1B_1}} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\frac{5\sqrt{3}}{4}} = \frac{12}{5} = 2,4$$

Вариант 27

В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 1.

Высота призмы CC_1 равна 2.
Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .



Прямые AB_1 и BC_1 – скрещивающиеся. В плоскости AA_1B проведем прямую BO параллельную прямой AB_1 .

Угол OBC_1 является углом между прямыми AB_1 и BC_1 .
 $\triangle ABC_1$ – *прямоугольный*

$$AB = \sqrt{2}$$

$\triangle CC_1B$ – *прямоугольный*

$$C_1B = \sqrt{5}$$

OAB_1B – *параллелограмм*

$$OA = BB_1 = 2$$

$\triangle O A_1 C_1$ – прямоугольный

$$O C_1 = \sqrt{17}$$

$\triangle A B V_1$ – прямоугольный

$$A B_1 = \sqrt{6} \quad O B = A B_1 = \sqrt{6}$$

В $\triangle O B C_1$ по теореме косинусов

$$O C_1^2 = O B^2 + B C_1^2 - 2 \cdot O B \cdot B C_1 \cdot \cos \angle O B C_1$$

$$\cos \angle O B C_1 = \frac{O B^2 + B C_1^2 - O C_1^2}{2 \cdot O B \cdot B C_1}$$

$$\cos \angle OBC_1 = \frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{17})^2}{2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{5}}$$

$$\cos \angle OBC_1 = \frac{6 + 5 - 17}{2 \cdot \sqrt{30}} = \frac{-6}{2 \cdot \sqrt{30}} = \frac{-3}{\sqrt{30}}$$

$\angle OBC_1$ является тупым углом.

За угол между прямыми AB_1 и BC_1

нужно принять угол α , смежный $\angle OBC_1$

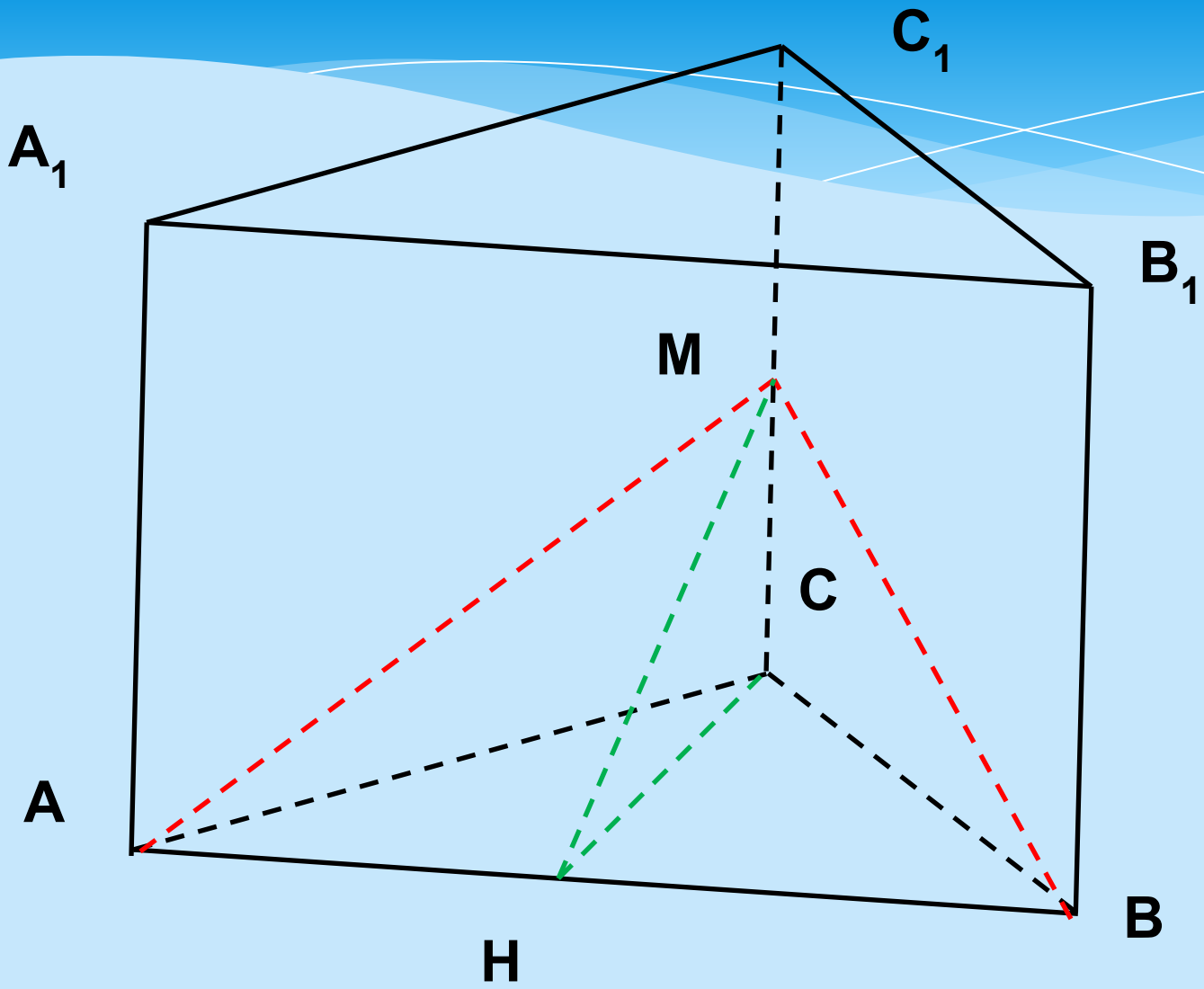
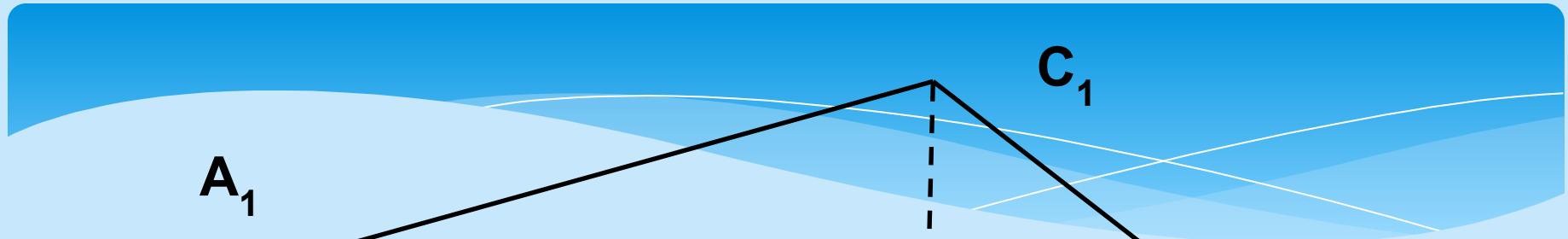
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{30}} = \sqrt{0,3}$$

Вариант 29

В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Через гипотенузу АВ основания и середину М ребра CC_1 проведена плоскость.

При какой длине высоты призмы плоскость АМВ наклонена к плоскости основания под углом 45^0 ?



$$CH \perp AB, \quad CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2,4$$

$$\Delta MCH, \quad \angle MCH = 90^\circ, \quad \angle MHC = 45^\circ,$$

$$\Delta MCH - \text{равнобедренный}, \quad MC = HC = 2,4$$

$$MC = MC_1 = 2,4$$

$$CC_1 = 4,8$$