Подготовка к математическому тестированию «Кенгуру-выпускникам»

Подготовила учитель математики ГБОУ СОШ № 476
Спиридонова Ирина Владимировна

«Кенгуру»-выпускникам. Математический тест готовности к продолжению образования

- <u>Цель урока</u> – подготовка к математическому тестированию.

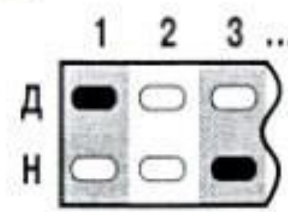
- <u>Задача урока</u> – разобрать примерный вариант «Кенгуру-выпускникам», разработанный создателями тестирования.

Введение

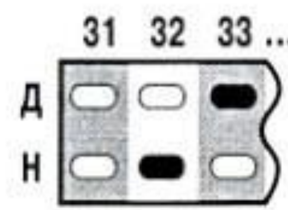
- Вам предлагается 12 задач, каждая из которых состоит из 5 родственных друг другу вопросов (всего надо ответить на 60 вопросов).
- Любой из вопросов допускает лишь 2 варианта ответа – **«да»** или **«нет».**
- Ответ «не знаю» никак не обозначается- вы оставляете незакрашенные овалы.

ОБРАЗЕЦ ТАБЛИЦЫ ОТВЕТОВ

Так будет выглядеть часть таблицы ответов, если выбраны следующие ответы на вопросы:



1 – «да»,
2 – «не знаю»,
3 – «нет», ...
... 31 – «не знаю»,
32 – «нет»,
33 – «да», ...



Нельзя закрашивать два овала в одной колонке!

Получение баллов

- За верный ответ «да» или «нет» - плюс 3 балла
- За неверный ответ «да» или «нет» - минус 1 балл
- За ответ «не знаю» - 0 баллов

т: не угадывайте ответы.

Отвеча или «нет» только тогда,

когда вы ы в правильности решения.

Задание 1

I. Справедливо ли тождество?

1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=(ay-bx)^2$

2) $\sqrt[5]{x^3y\sqrt[4]{y^2x}}=\sqrt[20]{x^{11}}\cdot\sqrt[10]{y^3}$, где $x\geq 0$, $y\geq 0$

3) $\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\left(\frac{ab}{a+b}-b\right):\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

4) $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\cdot\operatorname{ctg} 2\alpha+1=0$

5) $(\log_a c+\log_b c)\cdot\log_{ab}c=\log_a c\cdot\log_b c$

Разбор задания 1

1. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2=$ $=a^2y^2-2abxy+b^2x^2=(ay-bx)^2$, ответ ***«да»***.

2. $\sqrt[5]{x^3y\sqrt[4]{y^2x}}=x^{(\frac{1}{4}+3):5}y^{(\frac{1}{2}+1):5}=x^{\frac{13}{20}}y^{\frac{3}{10}}=\sqrt[20]{x^{13}}\sqrt[10]{y^3}$, ответ ***«нет»***.

3. $(a+\frac{ab}{a-b})(\frac{ab}{a+b}-b):\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=$

$=\frac{a^2-ab+ab}{a-b}\cdot\frac{ab-ab-b^2}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=-\frac{a^2b^2}{a^2+a^2}$, ответ ***«нет»***.

4. $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\cdot \operatorname{ctg}2\alpha+1=\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha-2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}+1=$

$=-(\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha)+1=0$, ответ ***«да»***.

5. $(\log_a c+\log_b c)\cdot\log_{ab} c=(\frac{1}{\log_c a}+\frac{1}{\log_c b})\cdot\frac{1}{\log_c ab}=$

$=\frac{(\log_c b+\log_c a)}{\log_c a\cdot\log_c b\cdot(\log_c a+\log_c b)}=\log_a c\cdot\log_b c$, ответ ***«да»***.

Задание 2

II. Верно ли утверждение?

6) Число 133 – простое.
7) Пять разных монет можно разложить по четырем карманам более чем 1000 способами.
8) Пять одинаковых монет можно разложить по четырем карманам так, чтобы ни один карман не остался пустым, ровно пятью способами.
9) Цифры числа 18587442 можно переставить так, что полученное число будет делиться на 9.
10) Число $\sqrt{0,4444...}$ меньше, чем $\frac{5}{7}$.

Разбор задания 2

6. 133=7·19, ответ ***«нет»***.

7. Первую монету можно положить в любой из четырех карманов, для второй монеты также существует четыре различных варианта, причем любой вариант размещения первой монеты может сочетаться с любым из вариантов размещения второй монеты. Итак, две монеты можно разместить по четырем карманам 4×4=16 способами. Теперь нетрудно понять, что каждая следующая монета увеличивает число вариантов в 4 раза. Всего получаем 4^5=1024 способа. Ответ ***«да»***.

8. Если монеты не отличаются друг от друга, то различные варианты размещения их по карманам могут отличаться только количеством монет в конкретных карманах. По условию в каждом кармане должно быть хотя бы по одной монете, а всего монет – пять штук. Таким образом, мы должны положить в каждый карман по одной монете, после чего у нас останется одна свободная монета, которую мы можем положить в любой из четырех карманов. Это и есть полный перечень вариантов. Это значит, что число вариантов равно четырем, и правильный ответ ***«нет»***.

Разбор задания 2

9. Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. Сумма цифр числа 18587442 равна 39, это число не делится на 9, следовательно, ни данное число, ни числа, полученные из него перестановкой цифр, не могут делиться на 9. Ответ ***«нет»***.

10. Пусть $\sqrt{0,4444...} = x$, тогда x^2=0,4444..., но нам известно, что функция $y = x^2$ при положительных значениях переменной строго возрастает, то есть большим значениям аргумента соответствуют большие значения функции, а большие значения функции соответствуют большим значениям аргумента. Теперь остается заметить, что $\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49} > \frac{1}{2} > 0,4444...$ Таким образом, $\sqrt{0,4444...}$ меньше, чем $\frac{5}{7}$, правильный ответ – ***«да»***.

Задание 3

III. Верно ли утверждение?

11) Если в четырехугольнике есть две пары равных сторон, то он – параллелограмм.
12) Если два угла – смежные, то их биссектрисы перпендикулярны.
13) Существует треугольник периметра 10, одна из сторон которого равна 6.
14) Если O – точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ с основанием AD, то площади треугольников AOB и COD равны.
15) Если хорды AB и CD некоторой окружности пересекаются в точке M, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

Разбор задания 3

11. Выберем произвольный отрезок AB и построим на нем как на основании два равнобедренных треугольника ABC и ABD с различными высотами CO и DO (через O обозначим середину отрезка AB, а треугольники расположим по разные стороны отрезка AB). Четырехугольник $ACBD$ имеет две пары равных сторон, но не является параллелограммом (в нем противоположные стороны AC и BD не параллельны, поскольку не равны углы CAB и ABD). Ответ ***«нет»***.

12. Сумма смежных углов равна 180°, а угол между биссектрисами этих углов равен сумме половин этих углов, то есть 90°. Ответ ***«да»***.

13. Из неравенства треугольника мы знаем, что любая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон. Следовательно, любая сторона строго меньше половины периметра, но 6 больше, чем половина от 10, следовательно, указанного в условиях треугольника не существует. Ответ ***«нет»***.

Разбор задания 3

14. Треугольники ABD и ACD имеют общее основание и одинаковые высоты, следовательно, их площади равны. Эти два треугольника имеют общую часть – треугольник AOD. После удаления этого треугольника из ABD получается треугольник AOB, а после удаления этого треугольника из ACD получается треугольник COD, следовательно, площади треугольников AOB и COD равны. Ответ ***«да»***.

15. Соединим отрезками точки A и D, а также B и C, при этом образуются два треугольника: AMD и CMB. В этих треугольниках углы AMD и CMB равны как вертикальные, а углы ADC и CBA опираются на одну и ту же дугу AC и, следовательно, тоже равны. Таким образом, треугольники

AMD и CMB подобны, следовательно $AM : CM = DM : BM$, откуда получаем равенство $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Ответ ***«да»***.

Задание 4

IV. В треугольнике ABC отрезок CH – высота, $AB = 6$, $BC = 5$, $CH = 3$. Верно ли утверждение?

16) $\cos B = \dfrac{3}{5}$

17) Высота, опущенная из вершины A, больше 3,5.

18) $AC = \sqrt{13}$

19) Угол C – тупой.

20) Радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, меньше $\dfrac{3}{2}$.

Разбор задания 4

16. Треугольник CBH – прямоугольный с гипотенузой CB, равной 5 и катетом CH, равным трем, следовательно (по теореме Пифагора) второй катет BH равен $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Таким образом, косинус угла B равен отношению отрезков $BH : BC = 4 : 5 = 0{,}8$. Ответ ***«нет»***.

17. Обозначим высоту, опущенную из вершины A через h и выразим площадь S треугольника ABC двумя способами: $S = 0{,}5 \cdot AB \cdot CH = 0{,}5 \cdot BC \cdot h$. Из этого равенства следует, что

$$h = \frac{AB \cdot CH}{BC} = \frac{6 \cdot 3}{5} = 3{,}6 > 3{,}5.$$ Ответ ***«да»***.

18. Мы уже знаем, что отрезок BH равен 4, но тогда $AH = 6 - 4 = 2$, следовательно, треугольник AHC – прямоугольный с катетами 2 и 3. Гипотенузу этого треугольника можно найти по теореме Пифагора: $AC = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$. Ответ ***«да»***.

Разбор задания 4

19. Воспользуемся теоремой косинусов и найдем косинус угла ACB: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$, следовательно,

$\cos C = (AC^2 + BC^2 - AB^2):(2AC \cdot BC) = (\sqrt{13}^2 + 5^2 - 6^2):(2\sqrt{13} \cdot 5) =$

$= (13 + 25 - 36):(10\sqrt{13}) = \dfrac{1}{5\sqrt{13}}$. Полученное число положительно,

следовательно, угол C – острый. Ответ ***«нет»***.

20. Известно, что площадь треугольника равна половине произведения периметра на радиус вписанной окружности. Площадь треугольника ABC равна $0{,}5 \cdot AB \cdot CH = 0{,}5 \cdot 6 \cdot 3 = 9$, все три стороны этого треугольника нам тоже известны, следовательно, легко найти периметр: $6 + 5 + \sqrt{13} = 11 + \sqrt{13}$. Обозначим радиус вписанной окружности через r,

тогда $r = \dfrac{0{,}5 \cdot 6 \cdot 3}{0{,}5 \cdot (11 + \sqrt{13})} = \dfrac{18}{11 + \sqrt{13}}$. Поскольку знаменатель этой дроби

больше, чем 12, она меньше 1,5. Ответ ***«да»***.

Задание 5

V. Верно ли утверждение о последовательности, заданной формулой $a_n = 2^n$, $n = 1, 2, \ldots$?

21) Последовательность $\dfrac{1}{a_n}$ является геометрической прогрессией.

22) Число 128 нельзя представить как произведение трех различных членов последовательности a_n.

23) $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{100} = 2^{5050}$

24) $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_{10000}} > 1$

25) При всех n справедливо равенство $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$.

Разбор задания 5

21. Каждый следующий член последовательности $\frac{1}{a_n}$ получается из предыдущего умножением на $\frac{1}{2}$, таким образом, это геометрическая прогрессия. Ответ ***«да»***.

22. Заметим, что $128 = 2^7$, а число 7 можно представить в виде суммы трех различных целых чисел: $7 = 1+2+4$, следовательно, $a_1 \cdot a_2 \cdot a_4 = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^4 = 128$. Ответ ***«нет»***.

23. $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{100} = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \ldots 2^{100} = 2^{1+2+3 \ldots +100}$. Теперь остается вспомнить, что сумма арифметической прогрессии $1+2+3 \ldots +100$ равна $0{,}5 \cdot 101 \cdot 100 = 5050$. Ответ ***«да»***.

24. Последовательность $\frac{1}{a_n}$ – геометрическая с первым членом $\frac{1}{2}$ и со знаменателем $\frac{1}{2}$, следовательно, ее сумма конечна и равна $\frac{1}{2} : (1 - \frac{1}{2}) = 1$. Но все члены этой последовательности положительны, поэтому сумма любого конечного числа этих членов меньше, чем 1. Ответ ***«нет»***.

25. $5a_{n+1} - 6a_n = 5 \cdot 2^{n+1} - 6 \cdot 2^n = 2^n(5 \cdot 2 - 6) = 2^n \cdot 4 = 2^{n+2} = a_{n+2}$, таким образом, ответ – ***«да»***.

Задание 6

VI. Верно ли, что при некотором a данное уравнение имеет единственный корень?

26) $ax + 5 = 0$

27) $|2x - 3| = a$

28) $a \sin x = 1$

29) $\lg x^2 = a$

30) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x - a} = 3$

Разбор задания 6

26. Уравнение имеет единственный корень при всех значениях a, отличных от 0. Ответ ***«да»***.

27. При $a = 0$ уравнение имеет единственный корень, равный 1,5. Ответ ***«да»***.

28. Если a меньше 1 по модулю, то уравнение решений не имеет, если же a больше или равно 1, то уравнение имеет бесконечно много решений. Ответ ***«нет»***.

29. При $x = 0$ левая часть уравнения не имеет смысла, а при всех остальных значениях x левая часть не меняется при замене x на $-x$, таким образом, если x_0 – корень уравнения, то $-x_0$ – тоже корень этого уравнения. Отсюда следует, что ни при каком значении a уравнение не может иметь точно один корень (на самом деле легко заметить, что при любом a уравнение имеет точно два корня). Ответ ***«нет»***.

Разбор задания 6

30. Легко заметить, что при $a = 0$ получаем уравнение $\frac{2}{x} = 3$, которое, очевидным образом, имеет один корень.

Можно действовать иначе: Если x не равно 0 или a, уравнение равносильно квадратному уравнению $3x^2 - x(3a+2) + a = 0$. Это уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда его дискриминант равен 0. Но этот дискриминант равен $(3a+2)^2 - 12a = 9a^2 + 4$, следовательно, он всегда положителен, и уравнение $3x^2 - x(3a+2) + a = 0$ при всех значениях a имеет два различных корня.