Глава 9. Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей

§54. Случайные события и их вероятности

4.ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ.

Содержание

Часть 4.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ.

Введение

- ✔ Мы познакомились с классическим определением вероятности. Оно применимо к испытаниям с конечным числом равновозможных между собой исходов.
- ✔ Однако весьма часто встречаются испытания и *с бесконечным числом исходов*. Тут классическая вероятностная схема не применима.

ПРИМЕР 7

Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $|x-5| \le 10$. Какова вероятность того, что оно окажется и решением неравенства $|x-1| \le 1$?

Решение. Сначала решим каждое из неравенств. Вспомним геометрический смысл модуля разности $|a - b|$ — это расстояние между точками a и b на числовой прямой. Поэтому неравенство $|x - 1| \le 1$ означает, что расстояние между точками x и 1 не больше 1. Значит, решение неравенства — отрезок [0; 2] (верхняя штриховка на рис. 243), его длина равна 2.

В свою очередь неравенство $|x - 5| \le 10$ означает, что расстояние между точками x и 5 не больше 10. Значит, решение неравенства — отрезок [-5; 15] (нижняя штриховка на рис. 243), его длина равна 20.

Мы видим, что из всех решений неравенства $|x - 5| \le 10$ только одну десятую часть составляют решения неравенства $|x - 1| \le 1$. Значит, искомая вероятность равна 1/10.

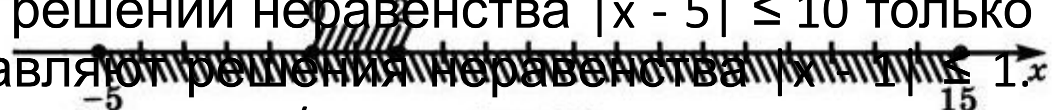


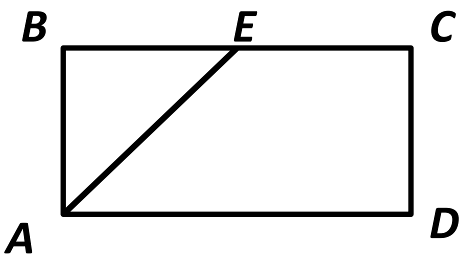
Рис. 243

Общее правило для нахождения геометрической вероятности

- *Если длину* ***l(A)*** *промежутка* ***A*** *разделить на длину* ***l(X)*** *промежутка* ***X****, который целиком содержит промежуток* ***A****, то получится вероятность того, что точка, случайно выбранная из промежутка X, окажется в промежутке* ***A****:* ***P = l(A)/ l(X)***.

Множества на числовой плоскости

- Аналогично поступают и с множествами на числовой плоскости, и с пространственными телами. Но в этом случае длину следует заменить или на площади фигур, или соответственно на объемы пространственных тел.



Пример 8

- В прямоугольнике ABCD, у которого BC = 2AB (рис. 244) случайно выбирают точку. Найти вероятность того, что она расположена ближе к прямой AB, чем к прямой AD.
- **Решение**. Пусть AE — биссектриса угла A и $E \in BC$ (рис. 244). Тогда AB = BE, точки отрезка AE равноудалены от прямых AB и AD, а точки треугольника ABE (за исключением точек стороны AE) расположены к AB ближе, чем к AD. Это и есть интересующее нас множество. От включения (исключения) стороны площадь треугольника не меняется. Площадь ΔABE составляет четверть площади всего прямоугольника. В самом деле, $S_{ABE} = 1/2\ AB \cdot BE = 1/2\ AB \cdot 1/2\ BC = 1/4 AB \cdot BC = 1/4 S_{ABCD}$. Значит, искомая вероятность равна 0,25.

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Для учителя

Заключительный в этой главе §54 «Случайные события и их вероятности» наиболее объемен и не столь однороден по содержанию, как другие параграфы. Он состоит из четырех пунктов.

1. Использование комбинаторики для подсчета вероятностей.
2. Произведение событий. Вероятность суммы двух событий. Независимость событий.
3. Независимые повторения испытаний. Теорема Бернулли и статистическая устойчивость.
4. Геометрическая вероятность.

Цыбикова Тамара Раднажаповна, учитель математики

В п. 1 продолжается начавшийся в § 51 подсчет вероятностей различных событий, но уже с использованием такого мощного комбинаторного аппарата, как формулы для числа сочетаний. Подчеркнем, что и в учебнике, и в задачнике мы уделяем довольно мало внимания формуле $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ для числа размещений по сравнению с формулой для числа сочетаний. Дело в том, что, по нашему мнению, в большинстве элементарных комбинаторных задач найти число размещений всегда можно по правилу умножения, и запоминание формулы $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ не так уж и необходимо. В то же время значимость и «используемость» формулы $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ существенно выше: и при решении задач отдельно выводить ее затруднительно, и во многих вопросах теории тяжело обойтись без надежного знания этой формулы.

В п. 1 подробно рассматривается решение двух примеров. В первом из них отрабатывается умение применять формулу $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, во втором — формулы $P(A + B) = P(A) + P(B)$ и $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C)$ для попарно несовместных событий.

В п. 2 сначала обосновывается формула $P(A + B) + P(AB) = P(A) + P(B)$ вероятности суммы двух произвольных событий. В частном случае, когда события A и B несовместны, получается, что их произведение AB есть событие невозможное, вероятность $P(AB)$ равна нулю и поэтому для таких событий $P(A + B) = P(A) + P(B)$, что уже объяснялось и в 9 классе и повторялось в п. 1.

В общей ситуации неясно, что проще вычислить: $P(A + B)$ или $P(AB)$. Однако есть крайне важный для всей теории вероятностей случай, когда этот вопрос ясен полностью. Речь идет о *независимых* событиях A и B, что по определению означает справедливость равенства $P(AB) = P(A)P(B)$. В таком случае

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

Понятие независимости двух событий является, пожалуй, одним из наиболее деликатных в теории вероятностей. Мы ограничимся лишь следующей констатацией. При решении практических задач в подавляющем большинстве случаев независимость событий предполагается априорно известной. Другими словами, если строго следовать определению, то при решении задач сначала надо было бы проверить равенство $P(AB) = P(A)P(B)$ и на его основании сделать вывод о том, что события A и B независимы. На практике все наоборот. Сначала по условию задачи делается предположение о независимости A и B, из этого делается вывод о справедливости равенства $P(AB) = P(A)P(B)$ и затем это равенство применяется в вычислениях. Четыре пункта примера 4 детально демонстрируют технику такого применения.

Пункт 4 §54 о статистической устойчивости, несомненно, является центральным в основах современной теории вероятностей. Однако сделать его столь же центральным в школьном курсе «Алгебра и начала математического анализа» и доказательно изложенным в непрофильной старшей школе, на наш взгляд, не представляется возможным. Для детальной проработки этой темы следовало бы ввести отдельный учебный предмет. Мы ограничиваемся схематичной прорисовкой основных моментов. Сначала (пример 5) мы продолжаем пример 4 из предыдущего пункта, заменив двух стрелков на одного, делающего три выстрела. Затем формулируем теорему Бернулли о вычислении вероятности наступления k успехов при n независимых повторениях одного и того же испытания с двумя исходами. В примере 6 демонстрируем, как теорема Бернулли «работает» в конкретных ситуациях. Наконец, сообщаем простейшую форму закона больших чисел (теорема 4): при большом числе независимых повторений одного и того же испытания частота появления случайного события A со все большей точностью приближенно равна вероятности события A: $\frac{k}{n} \approx P(A)$. Этот факт устанавливает связь между статистическим подходом к определению вероятности как частоте появления события в серии независимых повторений одного и того же испытания и классическим определением вероятности случайного события. Подчеркнем, что статистический подход связан с проведением и повторением испытания в реальности, а классическое определение относится к модели этой реальности. Грубо говоря, явление статистической устойчивости показывает, что модель эта является «правильной», т. е. со все большей точностью соответствующей реальным явлениям и событиям.

Пункт 4 §54 относится к вероятностным моделям с бесконечным числом исходов, для которых классическое определение вероятности принципиально не применимо. Речь идет о вычислении вероятности события, состоящего в том, что точка, случайно выбранная из какой-то фигуры X, окажется принадлежащей какой-то фиксированной части A этой фигуры. Вычисление состоит в нахождении частного $\frac{\text{площадь}\ (A)}{\text{площадь}\ (X)}$. Если речь идет о подмножествах числовой прямой, то площади надо заменить длинами. Разобраны два простых примера, которые, по существу, напоминают примеры, рассмотренные в конце параграфа «Простейшие вероятностные задачи» в учебнике «Алгебра—9».

В заключение отметим три понятия, которые традиционно входят во все вузовские курсы основ теории вероятностей, но которые мы считаем недопустимыми для изучения в общеобразовательной школе и не включаем их в УМК не только на базовом, но и на профильном уровне.

Во-первых, это относится к понятию условной вероятности и, соответственно, к формуле полной вероятности, формуле Байеса и формуле вероятности произведения нескольких событий. Спору нет, эти вещи хороши при систематическом и отдельном изучении специального учебного предмета, с их помощью можно решать все более и более изысканные задачи по теории вероятностей. Однако в рамках уже сложившегося курса «Алгебра и начала математического анализа» при общем знакомстве со стохастикой как учебным предметом, на наш взгляд, и без этого вполне хватает интересных и важных задач, правильно формирующих первые вероятностные представления об окружающей действительности.

Во-вторых, мы нигде не говорим об алгебре событий и не рассматриваем многочисленные манипуляции с событиями в этой необычной алгебре: проблем в школе хватает и с обычной алгеброй. К тому же уверенное жонглирование формулами типа

$$\overline{\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}} = A + B + C + D$$

мало что по существу добавляет к базовым представлениям о вероятностях случайных событий. Более того, даже о столь фундаментальном для любой вузовской программы понятии как пространство элементарных событий мы упоминаем очень неявно, только когда пишем о соответствии между некоторыми понятиями теории множеств и понятиями теории вероятностей. Как только начинаешь говорить про пространство элементарных событий и аксиоматику А. Н. Колмогорова, тут же попадаешь в алгебру событий, многочисленные формулы, их следствия, применения и т. п.

Все это невозможно достойным образом реализовать в общеобразовательной школе.

Наконец, мы совершенно сознательно нигде не используем термин «случайная величина». Вкратце, случайная величина есть числовая функция (вообще говоря, не любая!) на пространстве элементарных событий, т. е. аргументами этой функции являются не числа, не пары чисел или что-то подобное, а являются такие абстрактные вещи, как элементарные события. Но раз мы решили ничего не говорить про алгебру событий или про пространство элементарных событий, то нет никакого смысла говорить про функции, определенные на пространстве элементарных событий. Магические заклинания вроде «случайная величина есть числовая переменная величина, принимающая свои значения с различными вероятностями» ничего по существу не проясняют и, более того, еще сильнее запутывают положение дел. Кроме того, до содержательных задач о случайных величинах, как правило, не успевают дойти и во многих вузах. А тривиальные задачи про случайные величины практически всегда можно переформулировать и без случайных величин. Например, вместо «Найдите закон распределения случайной величины, равной сумме очков, выпавших при двукратном бросании игрального кубика» можно спросить чуть длиннее, но без случайных величин: «Какова вероятность того, что при двукратном бросании игрального кубика сумма выпавших очков равна 3? равна 11? Составьте таблицу распределения вероятностей для всех возможных значений такой суммы».

Источники

- Алгебра и начала анализа, 10-11 классы, Часть 1. Учебник, 10-е изд. (Базовый уровень), А.Г.Мордкович, М., 2009
- Алгебра и начала анализа, 10-11 классы. (Базовый уровень) Методическое пособие для учителя, А.Г. Мордкович, П.В.Семенов, М., 2010
- Таблицы составлены в MS Word и MS Excel.
- Интернет-ресурсы