МОУ « Теньгушевская средняя общеобразовательная школа»

Геометрия

9 класс

Дополнительные главы к школьному учебнику

« Учитель-методист» А.П.Родина.

2007-2008 учебный год.

Полуправильные многоугольники. Длина и площадь.

Цели: 1) Углубить знания учащихся по теме «Многоугольники».

2) Ввести понятие равноугольно-полуправильного и равносторонне-полуправильного многоугольника.

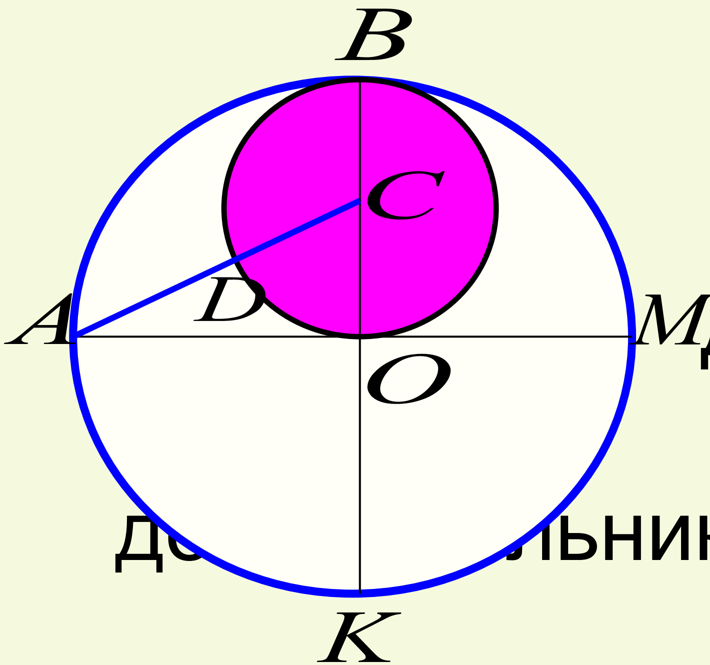
3) Познакомить с теоремой Барбье о длине кривой постоянной ширины и площадью фигуры.

Вписанный правильный десятиугольник и пятиугольник

Дано: **O(R), BK$\perp$AM, C$\in$OB,**

C(CO), BC=CO

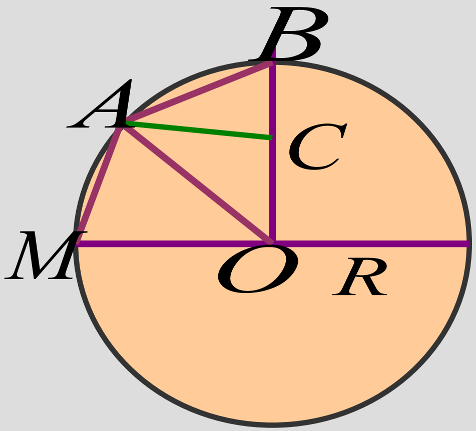
AC$\cap$C(CO)=D



Доказать,что AD- сторона правильного

де[illegible]льника.

Доказательство



1) $\angle$MAB=144°-угол десятиугольника,

$\angle$AOB= $\dfrac{360°}{10}$=36°,то $\angle$OAB= $\angle$OBA=72°

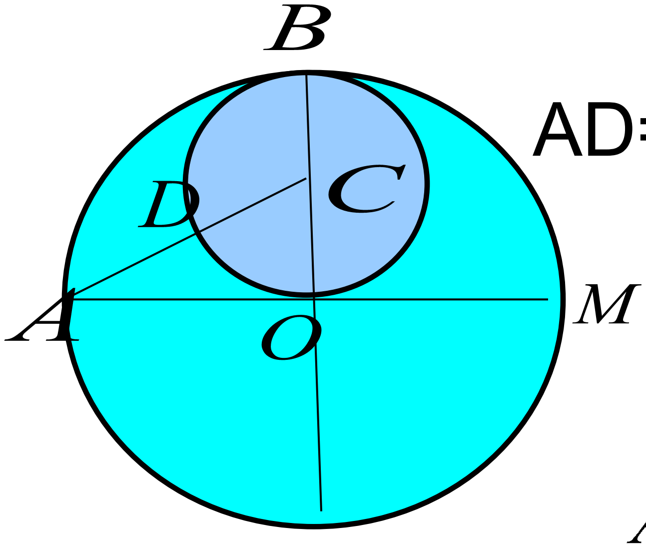
$\angle$BAC=36°-т.к.AC-биссектриса.

$\triangle$AOB ~ $\triangle$ CAB-по двум углам, $\dfrac{AB}{OB}$ = $\dfrac{BC}{AB}$ OA=R, BC=OB-OC=R-AB,значит

$\dfrac{AB}{R}$ = $\dfrac{R-AB}{AB}$,то AB=$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$R.

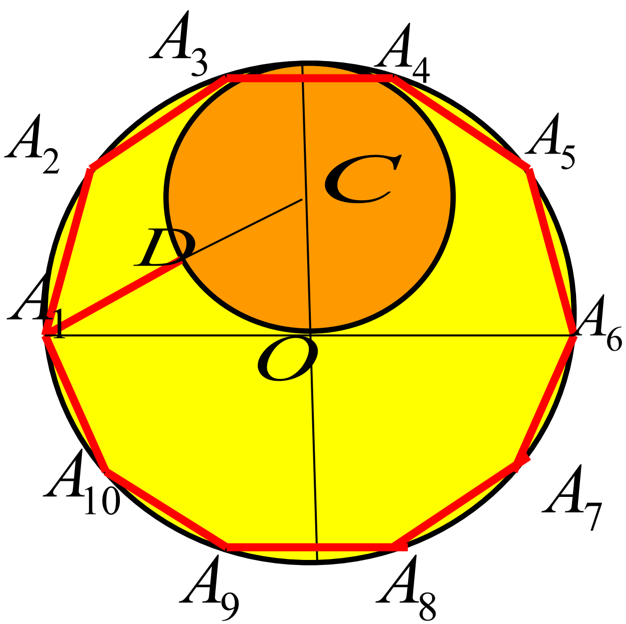
2) AB=2RSin18°, тогда 2RSin18°=$\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$R,

Sin18°= $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$



AD=AC-DC=AC-R/2

$$AC=\sqrt{AO^2+OC^2}=\sqrt{R^2+\frac{R^2}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}R.$$



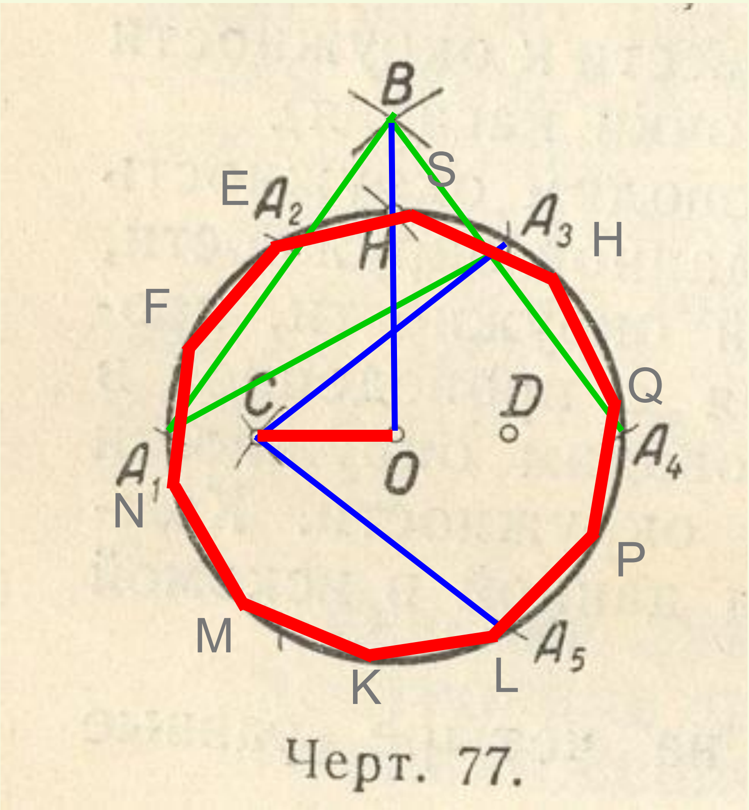
$$AD=\frac{\sqrt{5}}{2}R-\frac{R}{2}=\frac{\sqrt{5}R-R}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R,$$

значит AD- сторона десятиугольника

Построение правильного десятиугольника

При помощи одного циркуля

Построение

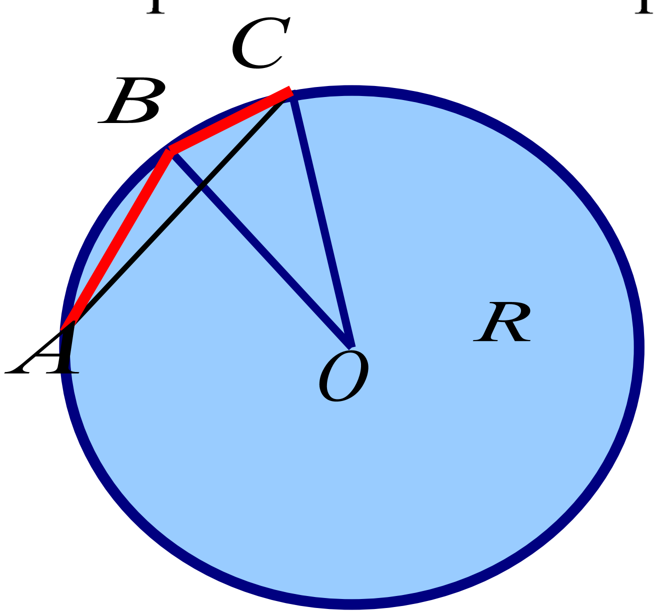


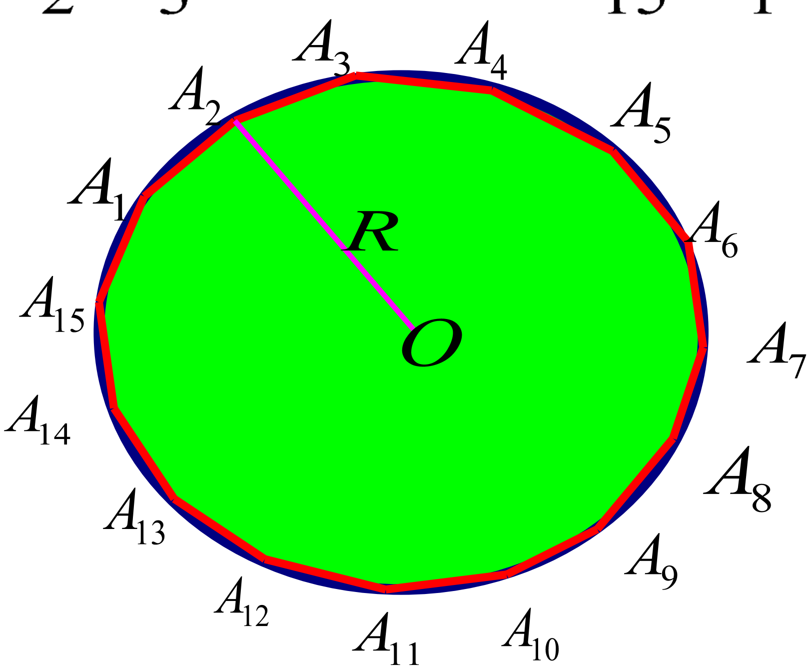
- 1. O(R)
- 2. $A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=$ $=A_4A_5=A_5A_6=R$
- 3. $A_1(A_1A_3) \cap A_4(A_1A_3)=B$
- 4. $A_3C=A_5C=OB$
- 5. OC-сторона десятиугольника
- 6. EF, FN, NM, MK, KL, LP, PQ, QH, HS
- EFNMKLPQHS-ИСКОМЫЙ

Вписанный правильный пятнадцатиугольник

Пусть AB= a_{10}, AC= a_6, дуга AB=36°, дуга AC=60°, а дуга BC=24°. Следовательно BC= a_{15} т.к. $\angle$BOC=24°= $\frac{360°}{15}$

$$A_1 \in \omega \Rightarrow A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots = A_{15}A_1$$





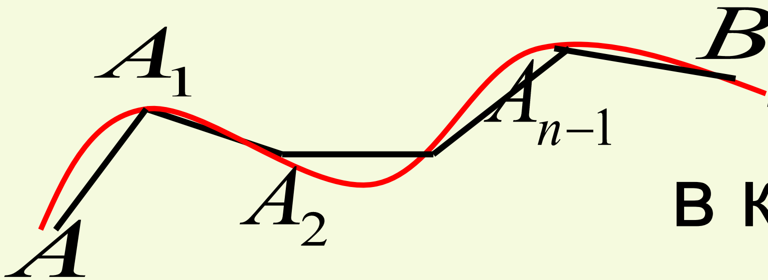
Теорема Гаусса
(1777-1855гг)

Построение правильного n-угольника с помощью линейки и циркуля возможно тогда и только тогда, когда число n имеет следующее разложение на множители $n = 2^m \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_s$ где m- целое неотрицательное число , а - $p_1, p_2, \ldots p_s$ различные между собой простые числа вида $2^{2^k}+1$

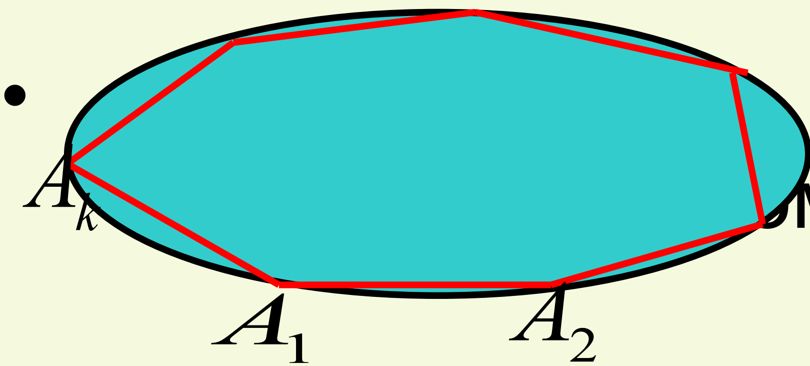
Примеры

- При m =0, s=1, n=$2^{2^k}+1$ для к=0;1;2;3;4 получаем n=3, n=5, n=17, n=257, n=65537.
- При m=0, s=2 имеем $n = p_1 \cdot p_2$, если $p_1 = 3$ $p_2 = 5$, то n=15.
- Число 7 простое , но оно не является числом $2^{2^k}+1$, поэтому с помощью циркуля и линейки нельзя точно построить правильный семиугольник
- 9 ≠ $2^{2^k}+1$,поэтому построить правильный девятиугольник нельзя.
- 360 ≠ $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ не удовлетворяет т.Гаусса,т.к. 3 входит дважды. Следовательно нельзя разделить окружность на 360 равных частей,т.е. нельзя построить угол в один градус.

Длина кривой



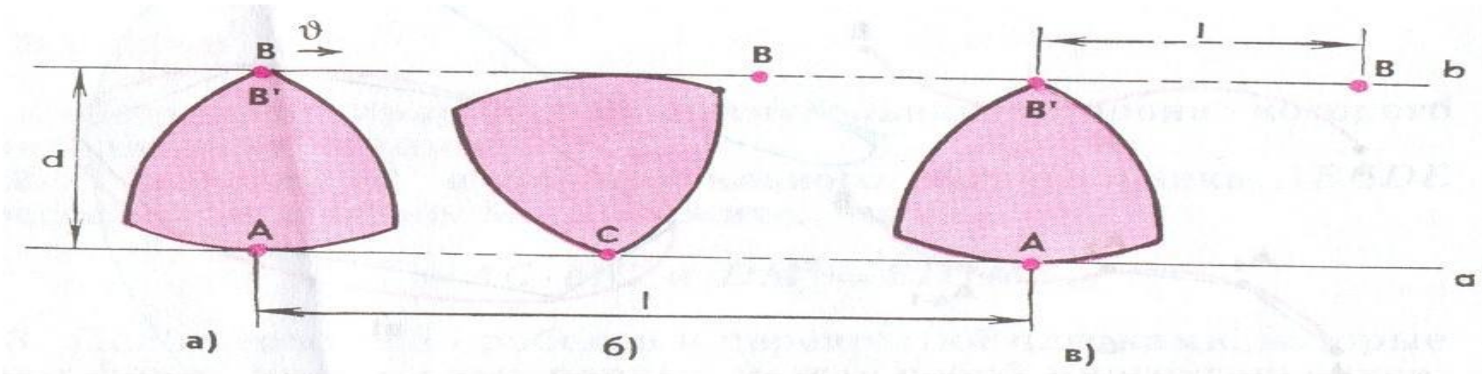
- Ломаная А….В вписана в кривую АВ, $l_{AB} = \lim A\ldots B$



- В замкнутую кривую оманая $A_1A_2\ldots A_k$

$$l = \lim A_1A_2\ldots A_k$$

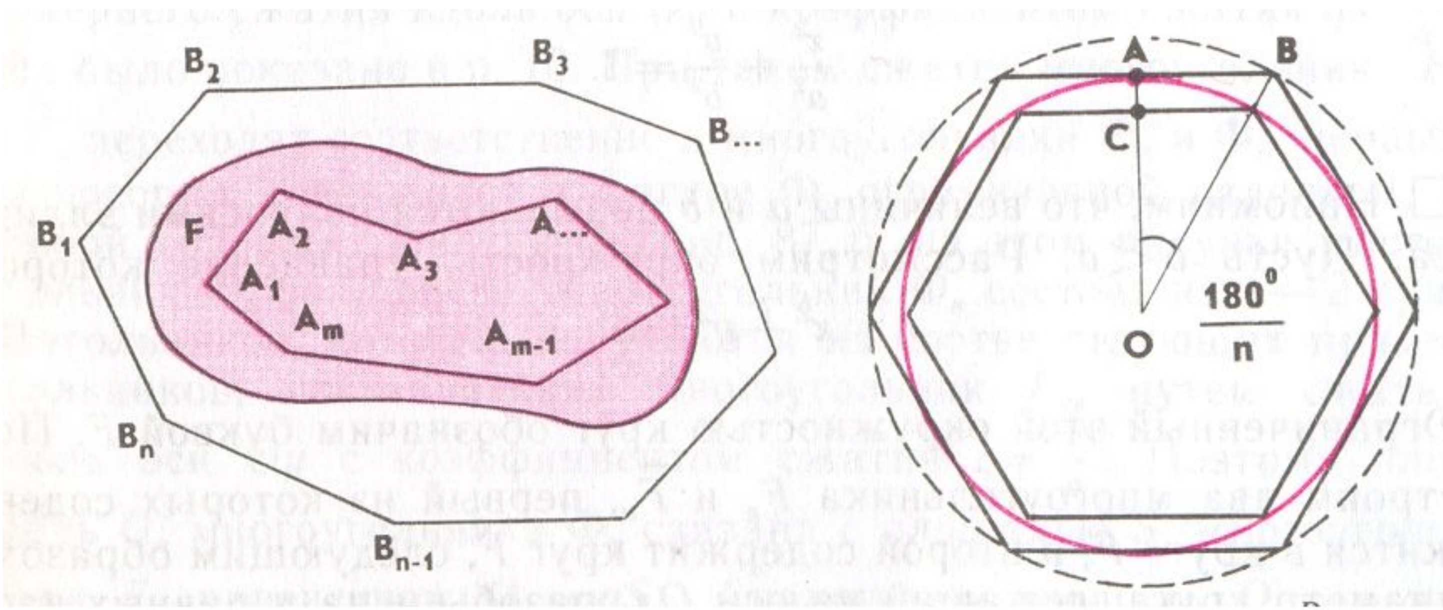
- ***Теорема Барбье*** Длина любой кривой постоянной ширины d равна πd.



- ***Доказательство.*** Представим себе каток постоянной ширины d, который катится без проскальзывания между параллельными прямыми a и b.
- Пусть a неподвижна, а прямая b движущаяся с постоянной скоростью v. Сделав один оборот каток переместится на расстояние l, где l -длина кривой, ограничивающей каток. Прямая b переместится тоже на l по отношению к катку, тогда по отношению к неподвижной прямой- на 2l, $2l = vt$. Каток вращается вокруг точки (A(a);C(b)) с угловой скоростью вращения катка ω то скорость движения прямой b будет $v = \omega d$. Итак $2l = \omega dt$, но $\omega t = 2\pi$, тогда $2l = 2\pi d$,

$$l = \pi d$$

Площадь фигуры



Многоугольник $A_1A_2...A_m$ содержится в фигуре F, многоугольник $B_1B_2...B_n$ содержит фигуру F

$$OA = R, OB = \frac{R}{\cos\frac{180^\circ}{n}},$$

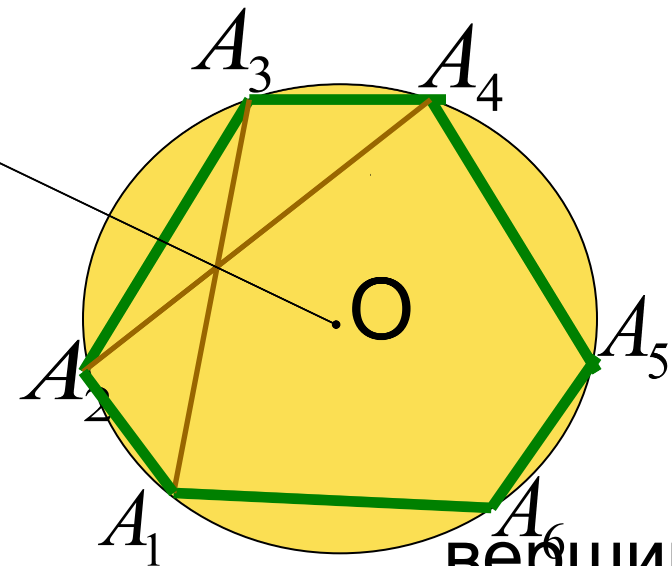
$$r_n = OC = R\cos\frac{180^\circ}{n}$$

Полуправильные многоугольники

- Определение. Выпуклый многоугольник с четным числом вершин называется равноугольно-полуправильным, если его стороны, взятые через одну, равны и все его углы равны.(пример-прямоугольник)

- Теорема1. Около любого равноугольно-полуправильного многоугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Доказательство



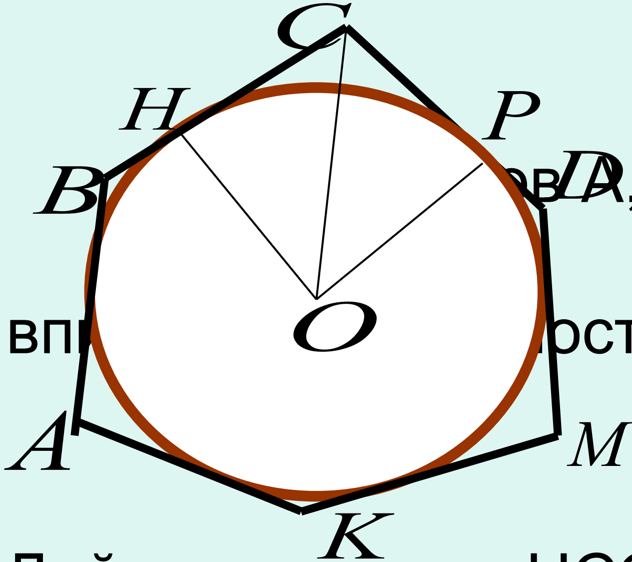
Пусть $A_1A_2...A_n (n > 3)$ - полуправильный. Опишем около $\triangle A_1A_2A_3$ окружность ω, O - центр окружности. Докажем, что все вершины лежат на ω

Около $\triangle A_2A_3A_4$ опишем ω' с центром O'.

$\triangle A_1A_2A_3 = \triangle A_2A_3A_4$ ($A_1A_2 = A_4A_3, A_2A_3$ -общая, $\angle A_2 = \angle A_3$). Поэтому $R = R', O = O'$,значит $\omega = \omega'$

- **Определение** Выпуклый многоугольник с четным числом вершин называется равносторонне-полуправильным, если его углы, взятые через один, равны и все его стороны равны.

- ***Теорема*** В любой равносторонне-полуправильный многоугольник можно вписать окружность, и притом только одну.



- AO, BO, …KO - биссектрисы ов А, В,…К.
- $AO \cap BO \cap ... \cap KO$, O-центр вп ости.
- OH $\perp$ BC, OP $\perp$ CD, OH=OP=r
- Действительно, $\triangle$HCO=$\triangle$PCO, т.к. $\angle$OHC= $\angle$OPC= 90, $\angle$OCH=$\angle$OCP, OC- общая.

- Следствие1. Не в любой равноугольно- полуправильный многоугольник можно вписать окружность(пример-прямоугольник)

- Следствие2. Не для любого равносторонне-полуправильного многоугольника существует описанная окружность.

Домашнее задание

Подготовиться к контрольной работе, повторив материал пунктов 105-112 и решив задачи:

1)Периметр правильного пятиугольника, вписанного в окружность, равен 6 дм. Найдите сторону правильного треугольника, вписанного в ту же окружность.

2) Найдите площадь круга, если площадь вписанного в ограничивающую его окружность треугольника равна $12\sqrt{3}cm^2$.

3)Найдите длину окружности, если площадь вписанного в нее правильного четырехугольника равна 32 m^2

Молодцы!