

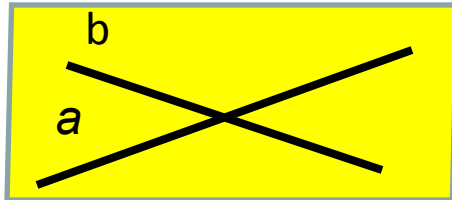
# Стереометрия

**Взаимное расположение прямых в пространстве.**

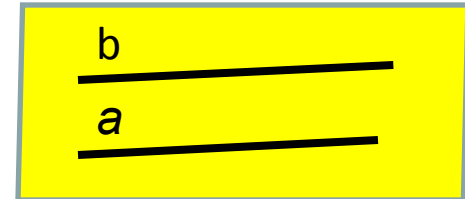
**Угол между скрещивающимися прямыми.**

# Лежат в одной плоскости

*пересекаются*

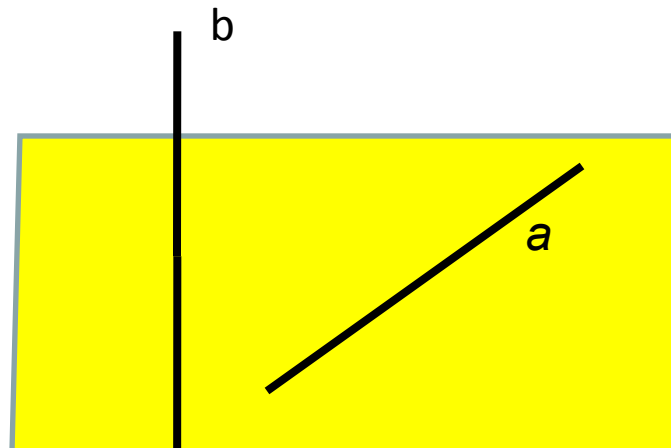


*параллельны*

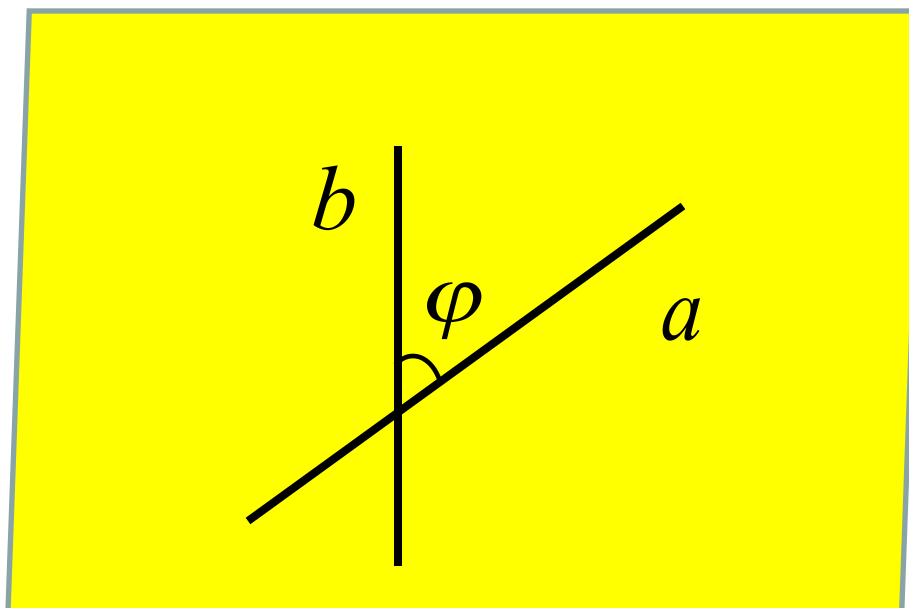


# Не лежат в одной плоскости

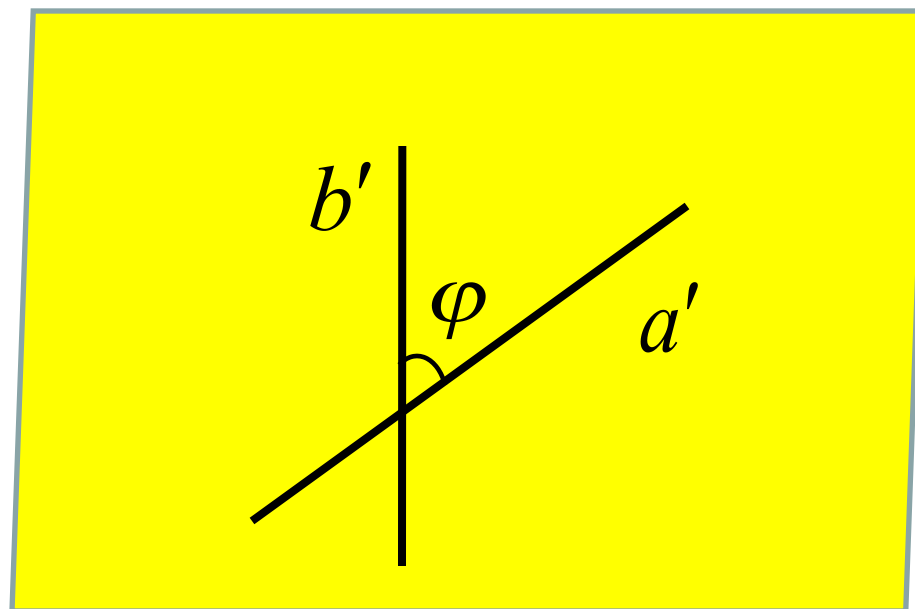
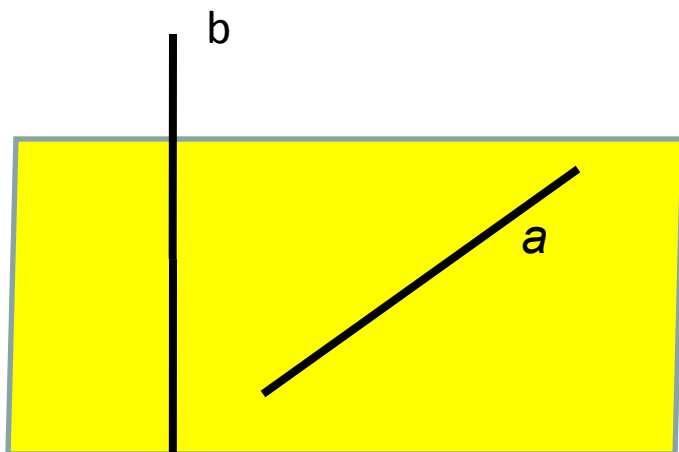
*скрещиваются*



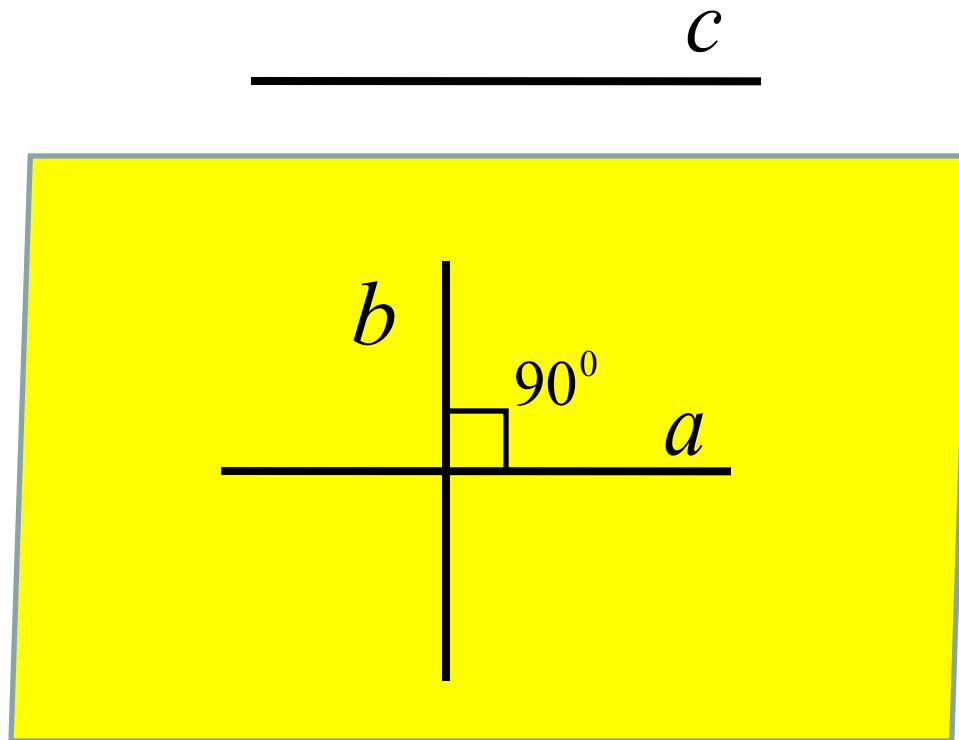
# Угол между пересекающимися прямыми



# Угол между скрещивающимися прямыми



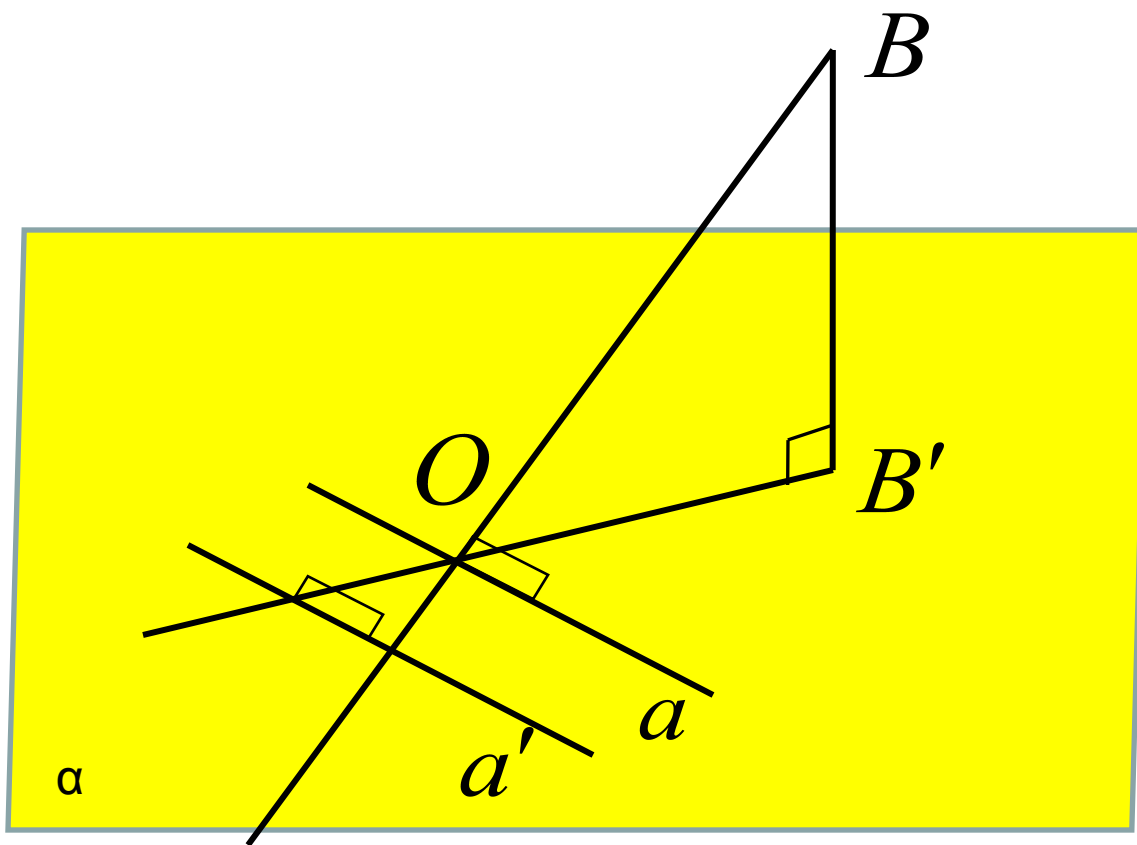
# Перпендикулярные прямые в пространстве



$$a \perp b$$

$$c \perp b$$

# Теорема о трех перпендикулярах



$$BO \cap \alpha$$

$$BB' \perp \alpha$$

$$a' \subset \alpha$$

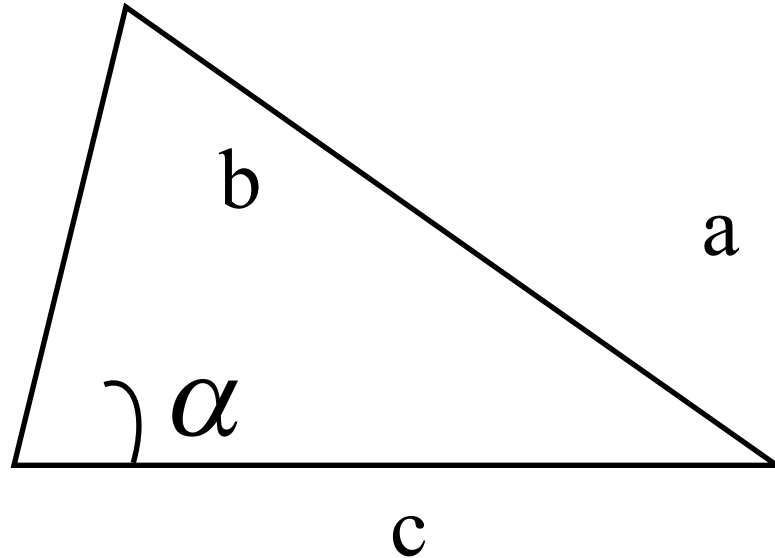
$$a' \perp OB'$$

---

$$a' \perp BO$$

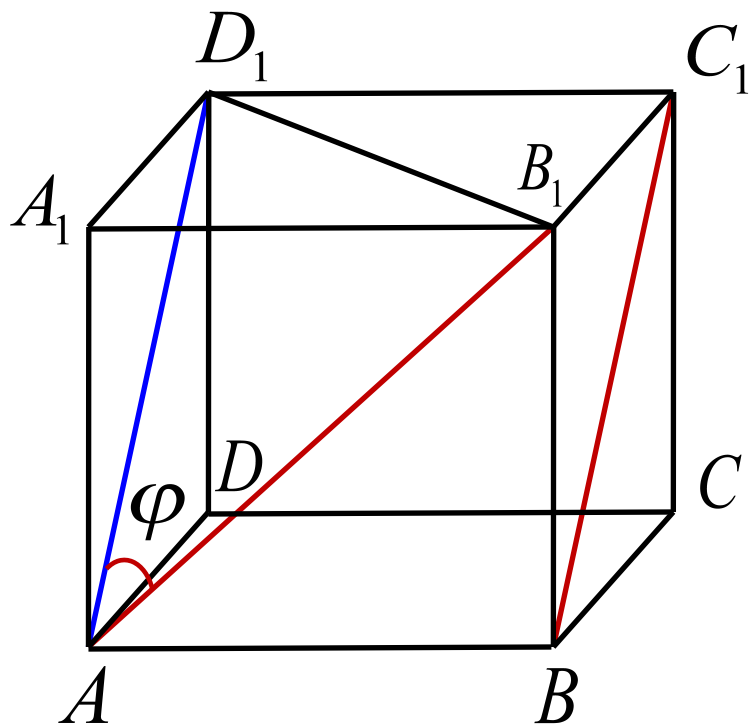
*Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна проекции наклонной к этой плоскости, то она перпендикулярна и самой наклонной.*

# Теорема косинусов



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

**Задача 1** В единичном кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$



*Решение.*

$$AD_1 \parallel BC_1$$

$$\angle B_1AD_1 = \varphi$$

$\triangle B_1AD_1$  - равносторонний треугольник

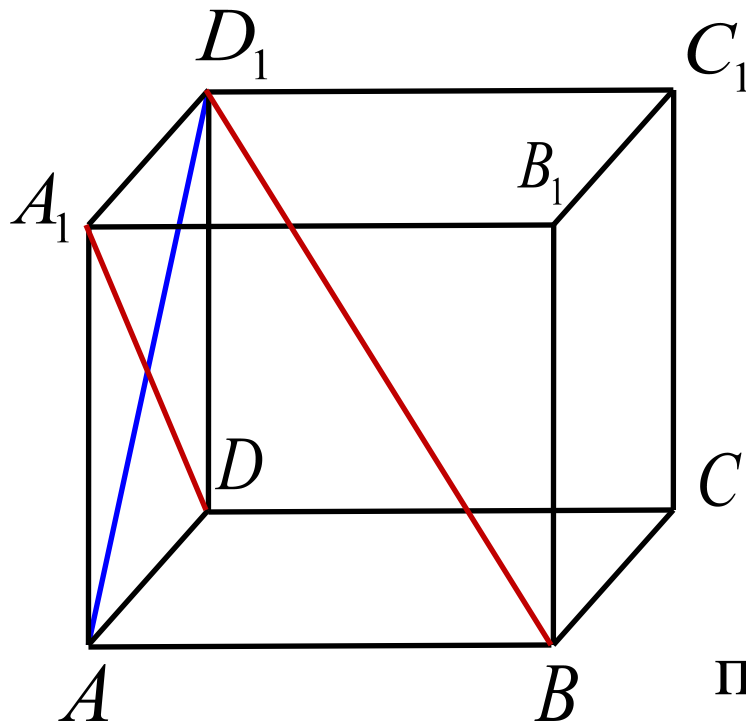
$$\angle B_1AD_1 = 60^{\circ}$$

*Ответ :  $60^{\circ}$*



**Задача 2** В единичном кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $DA_1$  и  $BD_1$

**Решение.**



$AD_1$  - проекция  $BD_1$  на  
плоскость  $ADD_1$

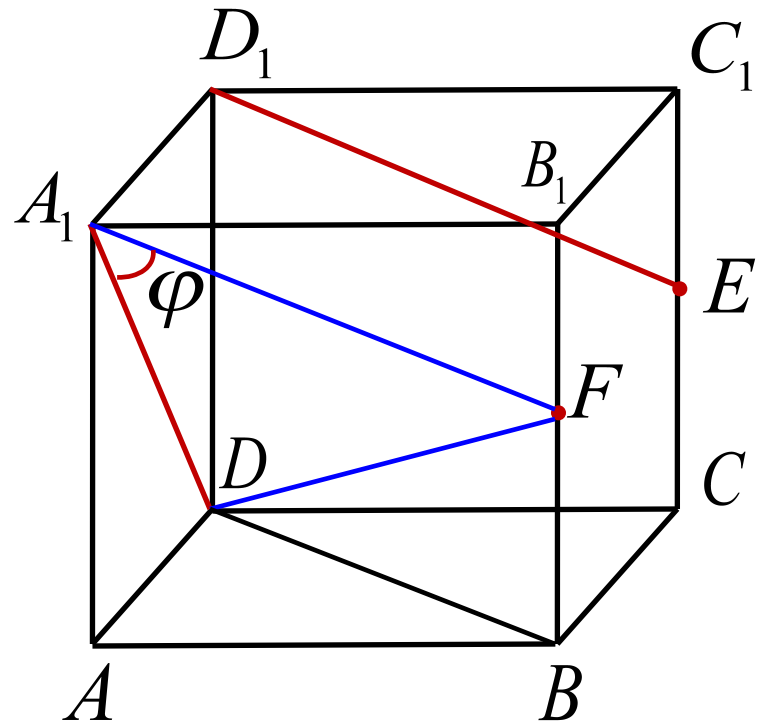
$$DA_1 \perp AD_1$$

Из теоремы о трех  
перпендикулярах следует, что

$$DA_1 \perp BD_1$$

**Ответ :**  $90^0$

**Задача 3** В единичном кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $DA_1$  и  $D_1E$ , где  $E$  – середина ребра  $CC_1$



**Решение.**

$F$  – середина  $BB_1$

$A_1F \parallel D_1E$      $\angle DA_1F = \varphi$

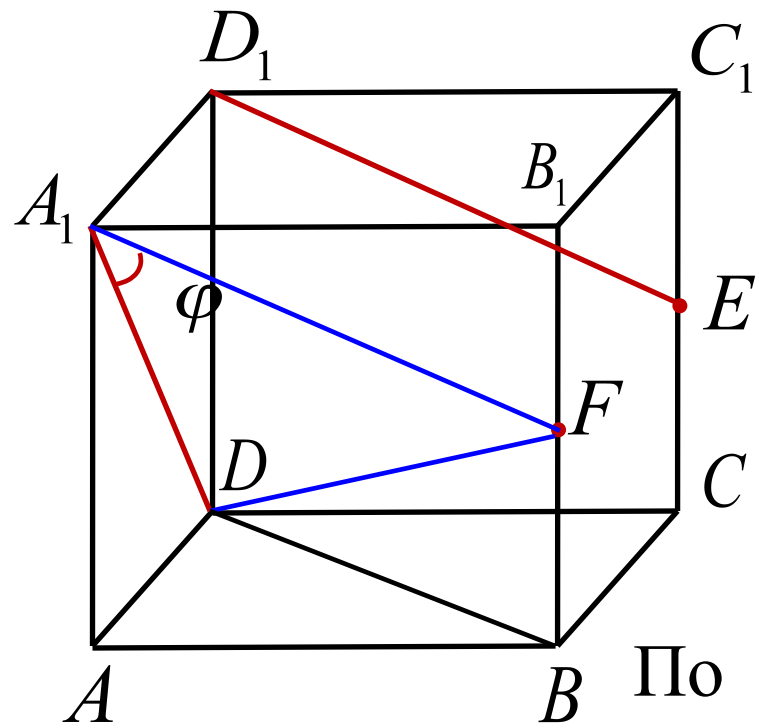
$\triangle A_1AD$  - прямоугольный

$$A_1D^2 = AA_1^2 + AD^2 = 1 + 1 = 2$$

$$A_1D = \sqrt{2}$$

$\triangle DBF$  - прямоугольный

$$DF^2 = BD^2 + BF^2 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \quad DF = \frac{3}{2}$$



$\triangle A_1B_1F$  - прямоугольный

$$A_1F^2 = A_1B_1^2 + B_1F^2$$

$$A_1F^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \quad A_1F = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

По теореме косинусов для  $\triangle DA_1F$

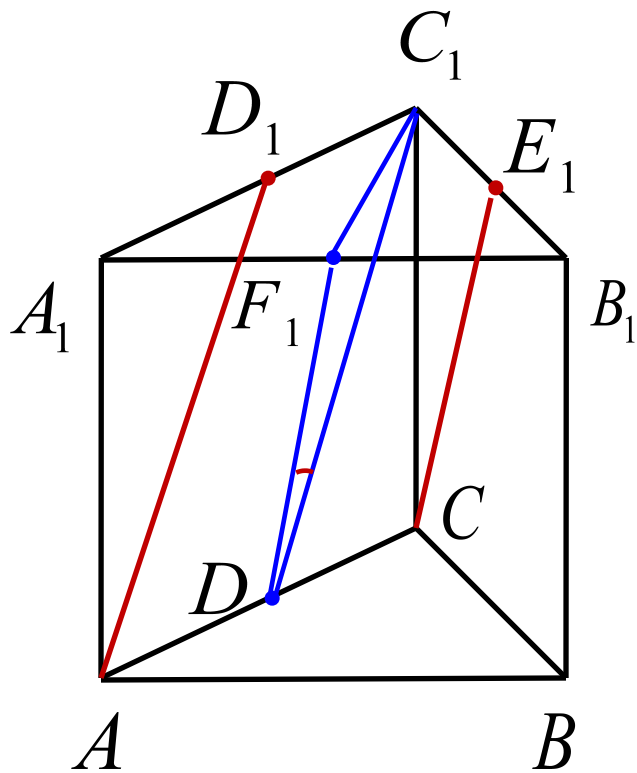
$$DF^2 = A_1D^2 + A_1F^2 - 2 \cdot A_1D \cdot A_1F \cdot \cos \varphi$$

$$\frac{9}{4} = 2 + \frac{5}{4} - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cos \varphi \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Ответ:  $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$

**Задача 4** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $AD_1$  и  $CE_1$ , где  $D_1$  и  $E_1$  - соответственно середины ребер  $A_1C_1$  и  $B_1C_1$



**Решение.**

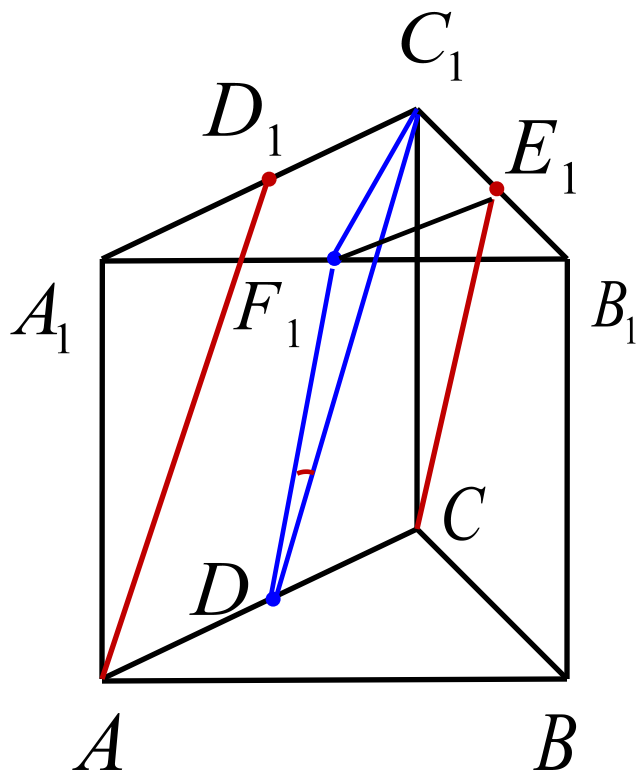
$D$  – середина ребра  $AC$

$F_1$  – середина ребра  $A_1B_1$

$$DC_1 \parallel AD_1$$

$$DF_1 \parallel CE_1$$

$$\angle C_1DF_1 = \varphi$$



$E_1F_1$  - средняя линия  $\triangle A_1B_1C_1$

$$E_1F_1 \parallel A_1C_1$$

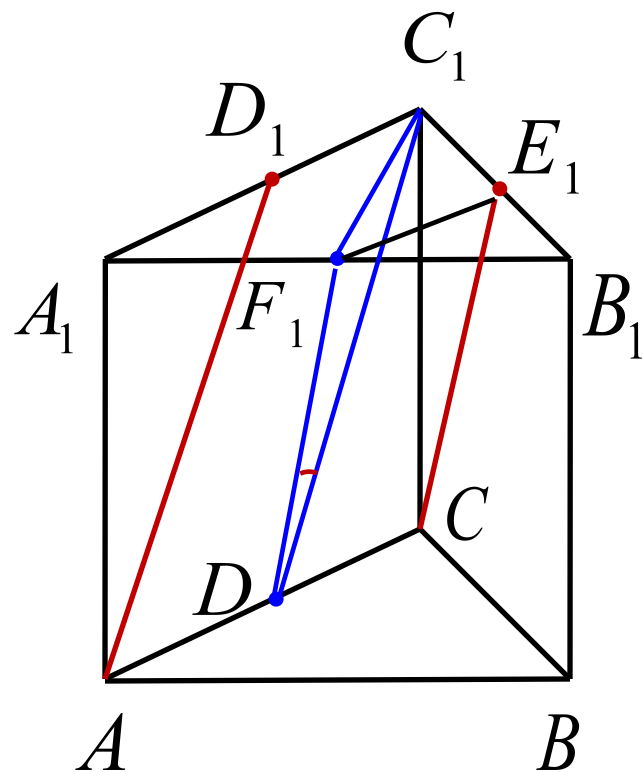
$$E_1F_1 = \frac{1}{2} A_1C_1 = \frac{1}{2}$$

$$DC \parallel A_1C_1 \quad DC = \frac{1}{2}$$

$$E_1F_1 \parallel DC \quad E_1F_1 = DC$$

$DF_1E_1C$  – параллелограмм

$$DF_1 \parallel CE_1 \quad DF_1 = CE_1$$



$\triangle CC_1E_1$  - прямоугольный

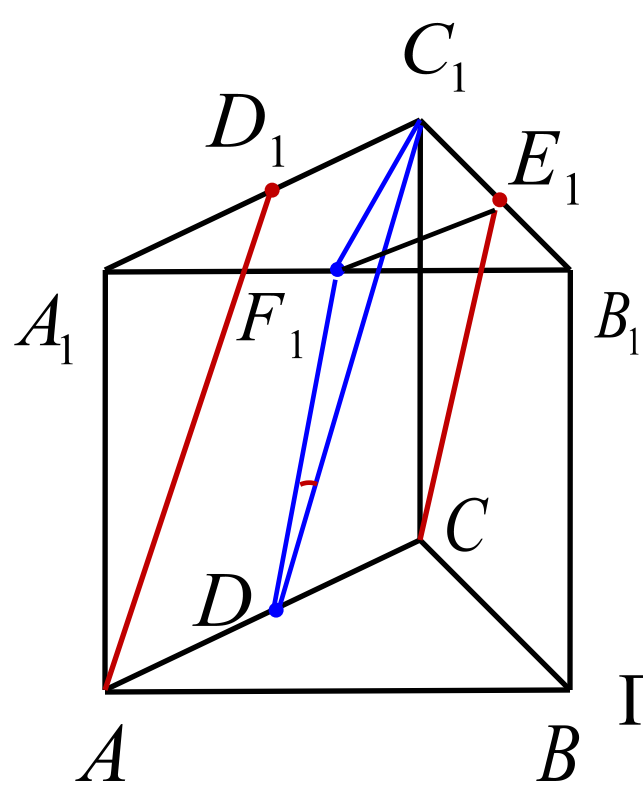
$$CE_1^2 = CC_1^2 + C_1E_1^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$DF_1 = CE_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$\triangle DCC_1$  - прямоугольный

$$DC_1^2 = DC^2 + CC_1^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$DC_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



$\triangle A_1F_1C_1$  - прямоугольный

$$C_1F_1^2 = A_1C_1^2 - A_1F_1^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$C_1F_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

По теореме косинусов для  $\triangle C_1DF_1$

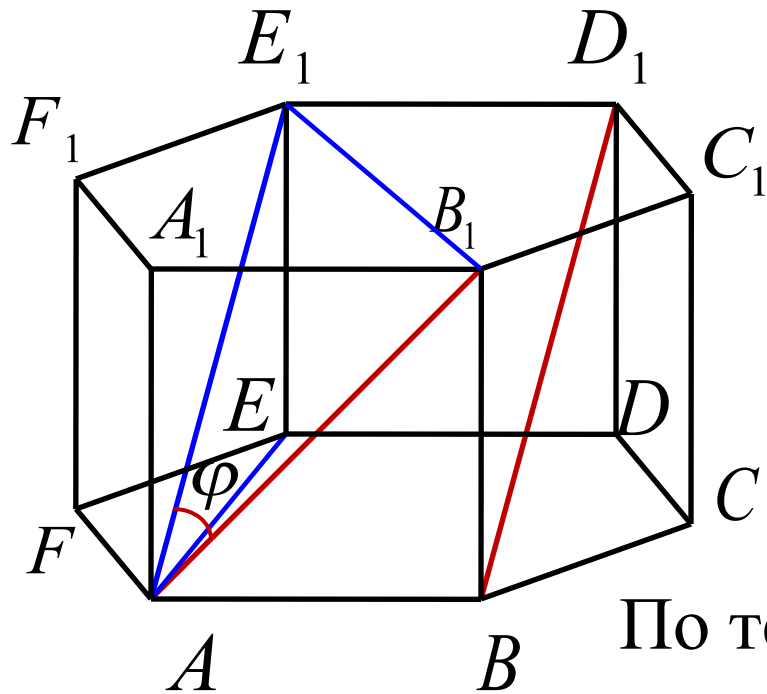
$$C_1F_1^2 = DF_1^2 + DC_1^2 - 2 \cdot DF_1 \cdot DC_1 \cdot \cos \varphi$$

$$\frac{3}{4} = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = 0,7$$

Ответ : 0,7

**Задача 5** В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$  все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми  $AB_1$  и  $BD_1$



**Решение.**

$$AE_1 \parallel BD_1$$

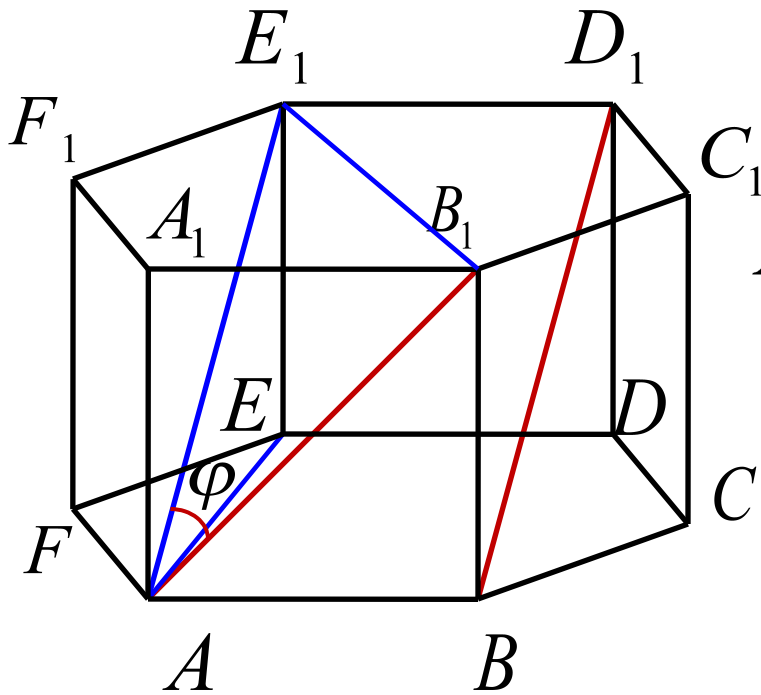
$$\angle B_1AE_1 = \varphi$$

По теореме косинусов для  $\triangle AFE$

$$AE^2 = AF^2 + FE^2 - 2 \cdot AF \cdot FE \cdot \cos \angle AFE$$

$$AE^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = 3$$





$\triangle AEE_1$  - прямоугольный

$$AE_1^2 = AE^2 + EE_1^2 = 3 + 1 = 4$$

$$AE_1 = 2$$

$$B_1E_1 = 2A_1F_1 = 2$$

$$AB_1 = \sqrt{2}$$

По теореме косинусов для  $\triangle B_1AE_1$

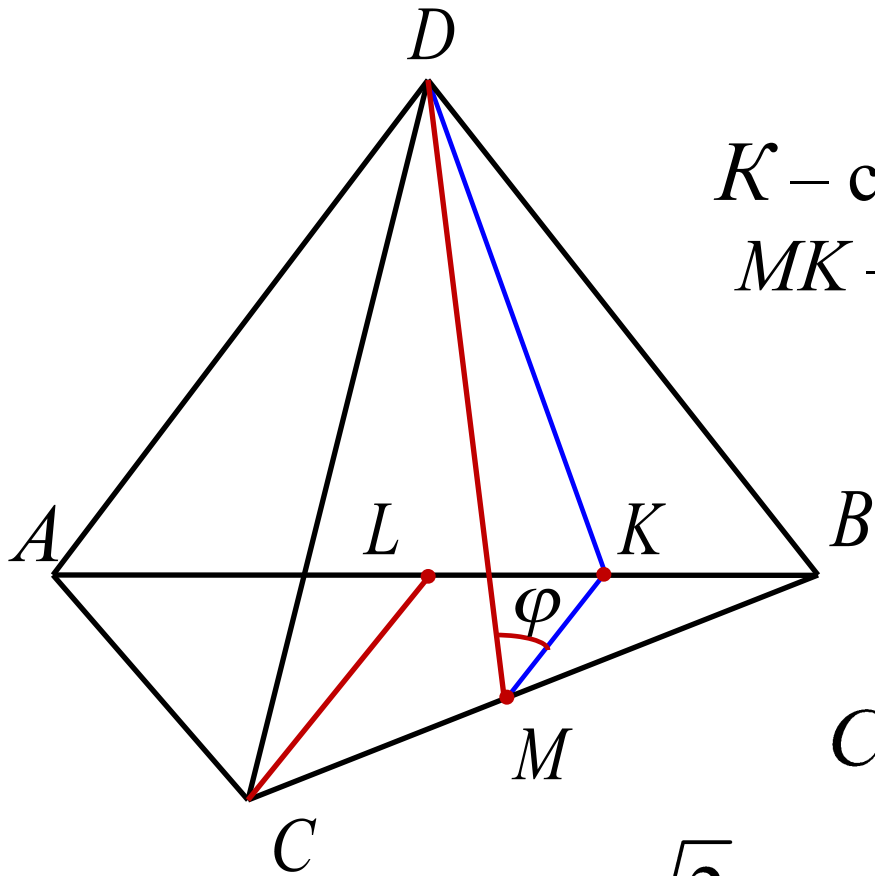
$$B_1E_1^2 = B_1A^2 + AE_1^2 - 2 \cdot B_1A \cdot AE_1 \cdot \cos \varphi$$

$$4 = 2 + 4 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ответ:  $\cos \varphi = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

**Задача 6** Длина ребра правильного тетраэдра  $ABCD$  равна 1. Найдите косинус угла между прямыми  $DM$  и  $CL$ , где  $M$  – середина ребра  $BC$ ,  $L$  – середина ребра  $AB$ .



**Решение.**

$K$  – середина  $LB$

$MK$  – средняя линия  $\triangle CLB$

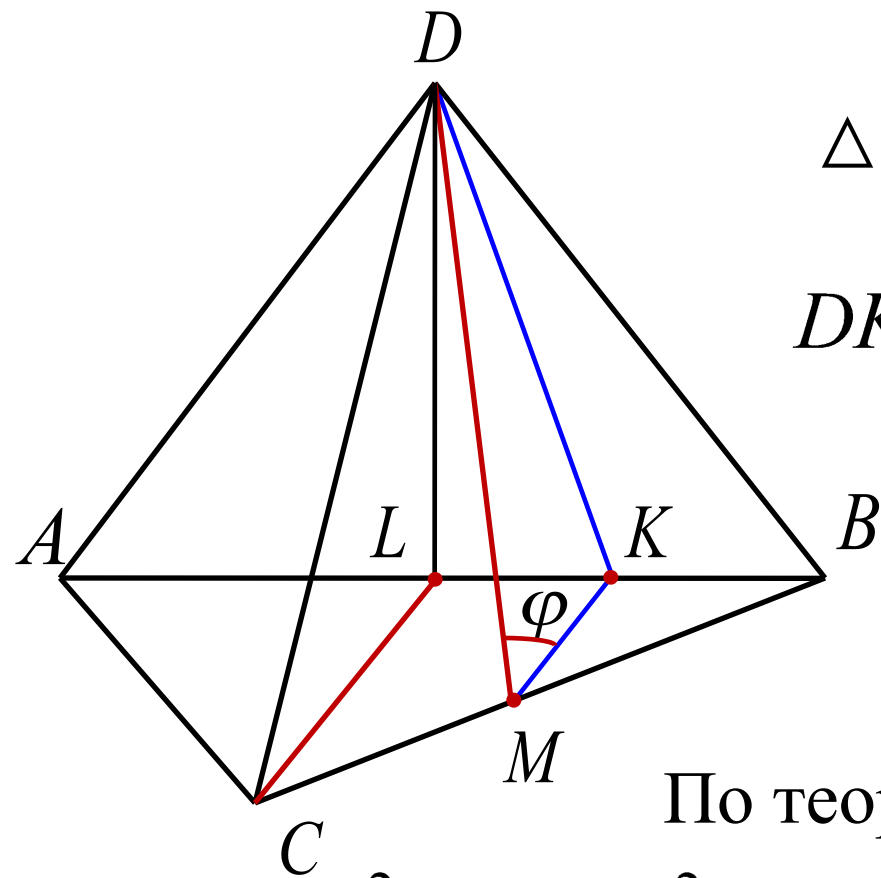
$MK \parallel CL$   $\angle DMK = \varphi$

$\triangle ALC$  – прямоугольный

$$CL^2 = AC^2 - AL^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$CL = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$MK = \frac{1}{2} CL = \frac{\sqrt{3}}{4}$$



$\triangle DLK$  - прямоугольный

$$DK^2 = DL^2 + LK^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{16} = \frac{13}{16}$$

$$DK = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

По теореме косинусов для  $\triangle DMK$

$$DK^2 = MK^2 + MD^2 - 2 \cdot MK \cdot MD \cdot \cos \varphi$$

$$\frac{13}{16} = \frac{3}{16} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{6}$$

$$\text{Ответ: } \cos \varphi = \frac{1}{6}$$