

# Подготовка к ЕГЭ



## Об особенностях решения заданий С<sub>2</sub> ЕГЭ

Геометрия 10-11



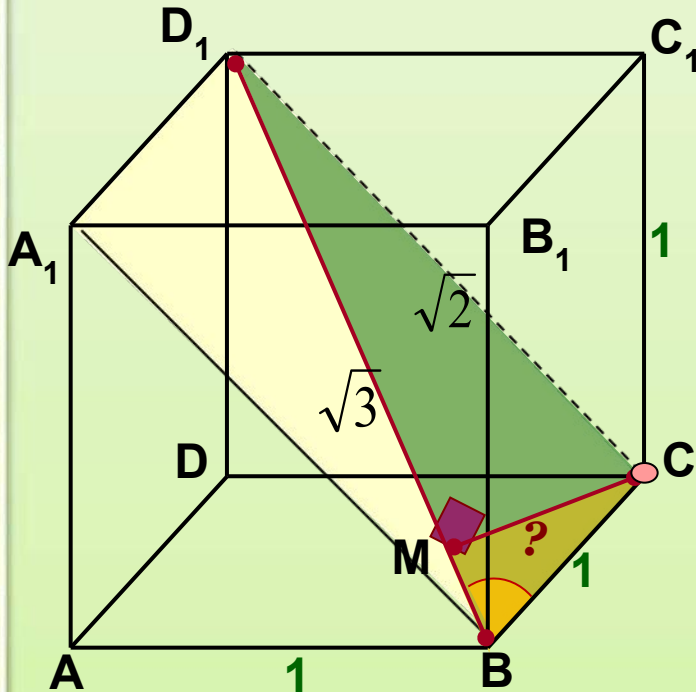
Е.Ю.Фролова, учитель математики ГБОУ СОШ №2 г.о. Кинель

# 1. Расстояние от точки до прямой

**Задача 1.** В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $BD_1$ .

Решение.

## I способ.



1. Построим плоскость  $A_1 D_1 C B$ .

2.  $CM \perp BD_1$ ;  $CM$  – искомое расстояние.

3.  $\triangle D_1 C B$  – прямоугольный.

$$CD_1 = \sqrt{2}, \quad D_1 B = \sqrt{3}.$$

$$\sin B = \frac{CD_1}{BD_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

4.  $\triangle CMB$  – прямоугольный.

$$CM = CB \cdot \sin B$$

$$CM = 1 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

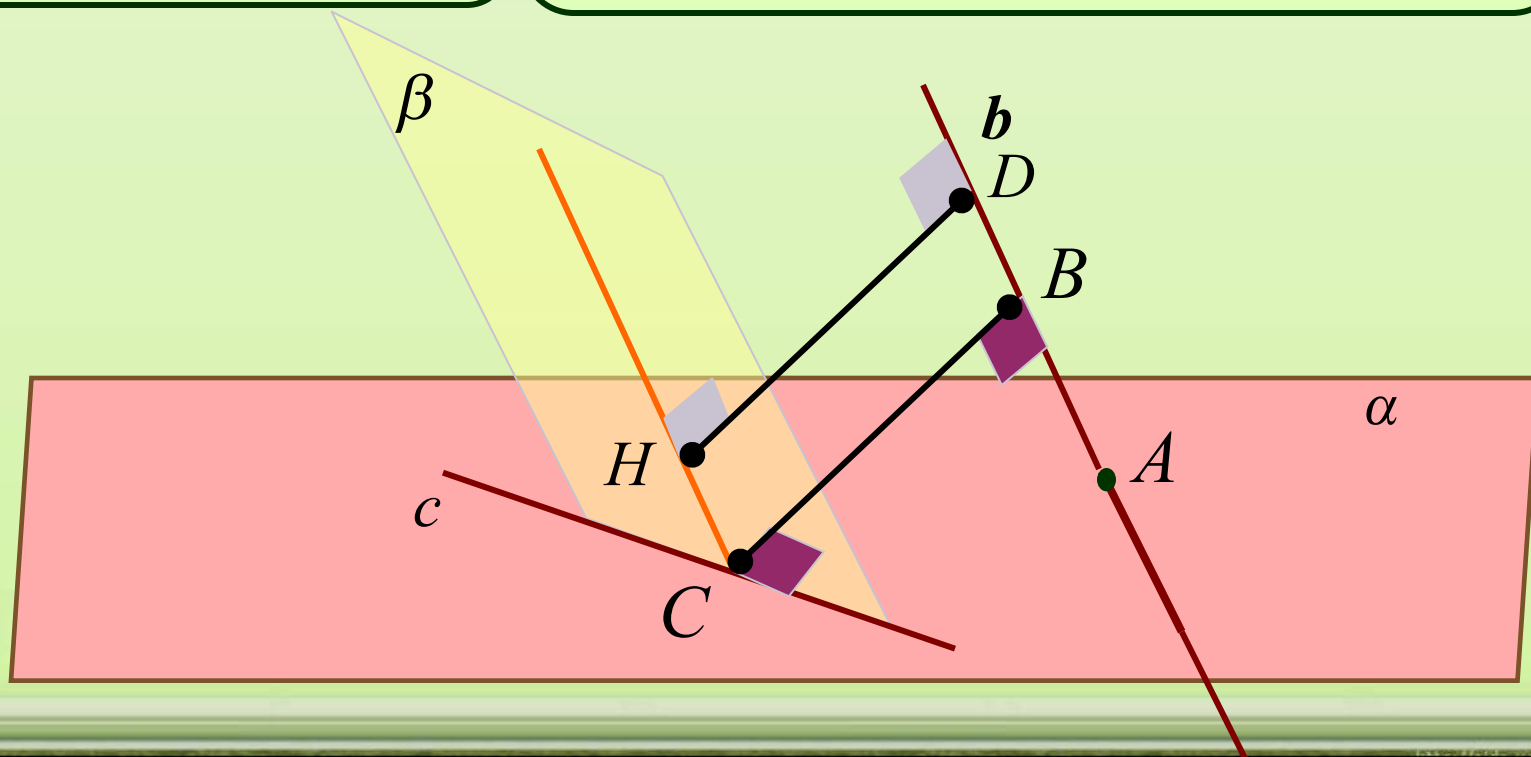
Ответ:  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ .



## 2. Расстояние между скрещивающимися прямыми можно определить: как

1) длину отрезка их общего перпендикуляра;

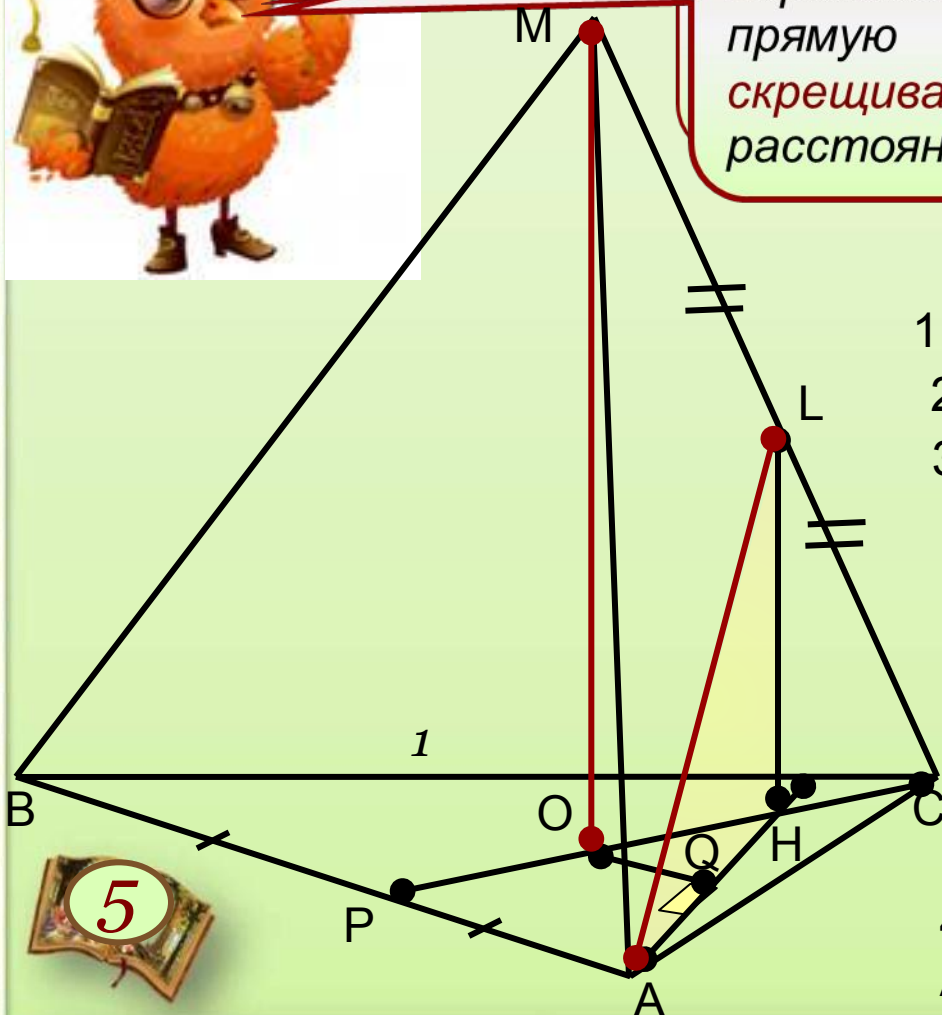
2) расстояние от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой.



**Задача 2.** Дан правильный тетраэдр  $МABC$  с ребром 1. Найдите расстояние между прямыми  $AL$  и  $MO$ , если  $L$  – середина  $MC$ ,  $O$  – центр грани  $ABC$ .

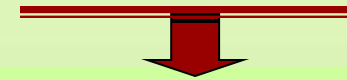


Если ортогональная проекция на плоскость  $\alpha$  переводит прямую  $a$  в точку  $A$ , а прямую  $b$  в прямую  $b_1$ , то расстояние между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$  равно расстоянию от  $A$  до прямой  $b_1$ .



**Решение.**

1.  $LH \perp (ABC) \in H$
2.  $CO = HO$ .
3. Точка  $O$  и прямая  $AH$  – ортогональные проекции соответственно прямых  $MO$  и  $AL$  на  $(ABC)$ .



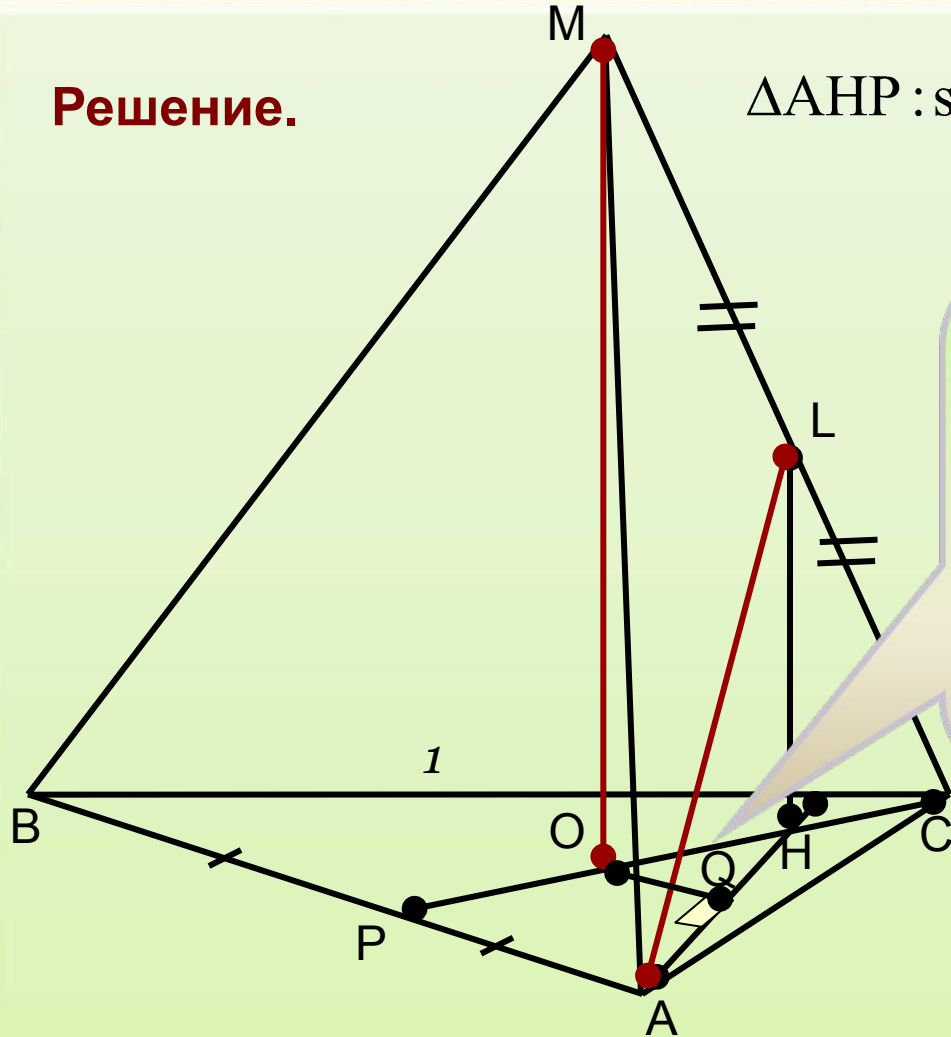
Расстояние между скрещивающимися прямыми  $MO$  и  $AL$  равно расстоянию от точки  $O$  до прямой  $AH$ .

4.  $OQ \perp AH$   $OQ$ - искомое расстояние.
5. Вычислим  $OQ$ .



**Решение.**

$$\Delta AHP : \sin \angle AHP = \frac{AP}{AH} = \frac{AP}{\sqrt{AP^2 + PH^2}}.$$



$$OH = \frac{1}{3} CP$$

$$PH = \frac{2}{3} CP$$

$$CP = AC \cdot \sin 60^\circ$$

$$CP = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

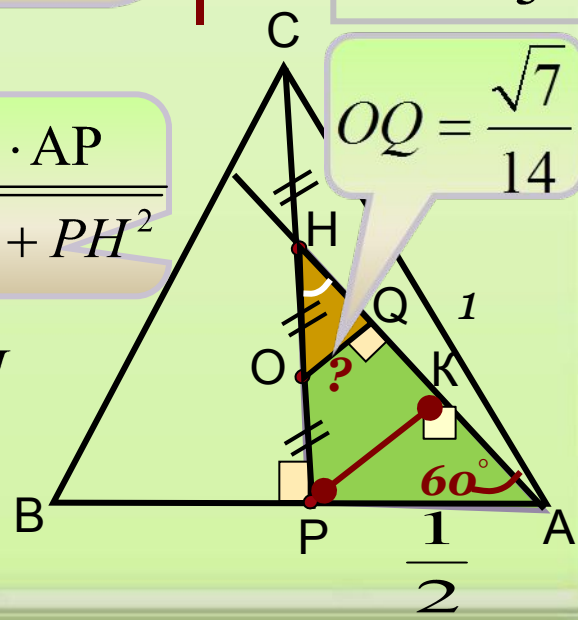
$$OH = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$PH = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$OQ = \frac{OH \cdot AP}{\sqrt{AP^2 + PH^2}}$$

$$OQ = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

$$\Delta OQH : \sin \angle OHQ = \frac{OQ}{OH} \Rightarrow OQ = OH \cdot \sin \angle OQH$$



**Ответ:**  $\frac{\sqrt{7}}{14}$ .



### 3. Угол между прямой и плоскостью

**МОЖНО ВЫЧИСЛИТЬ:**

1) как угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость;

2) используя векторный метод;

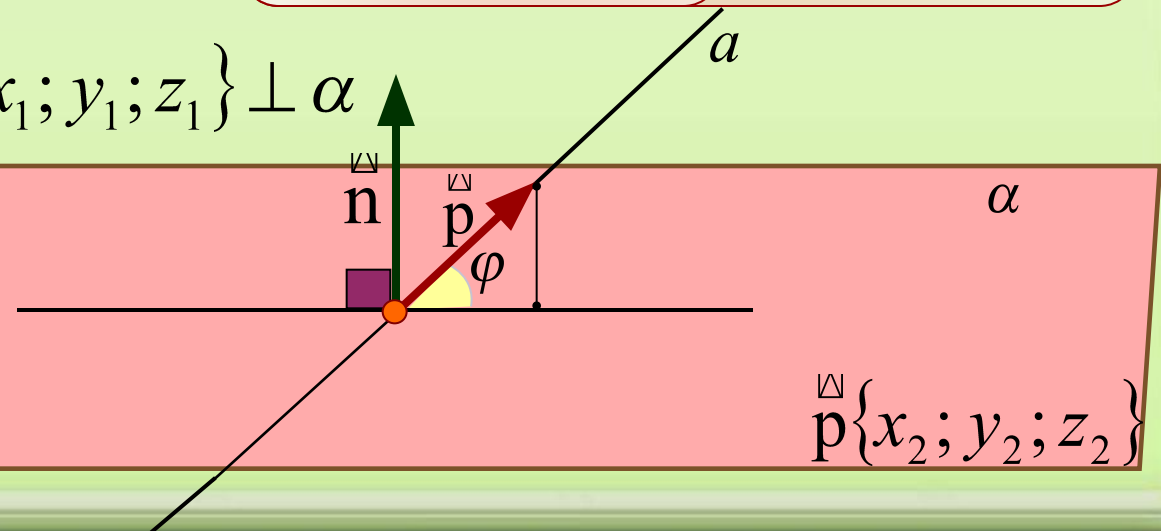
Этот угол включают в прямоугольный треугольник в качестве одного из острых углов.

3) используя координатно-векторный метод.



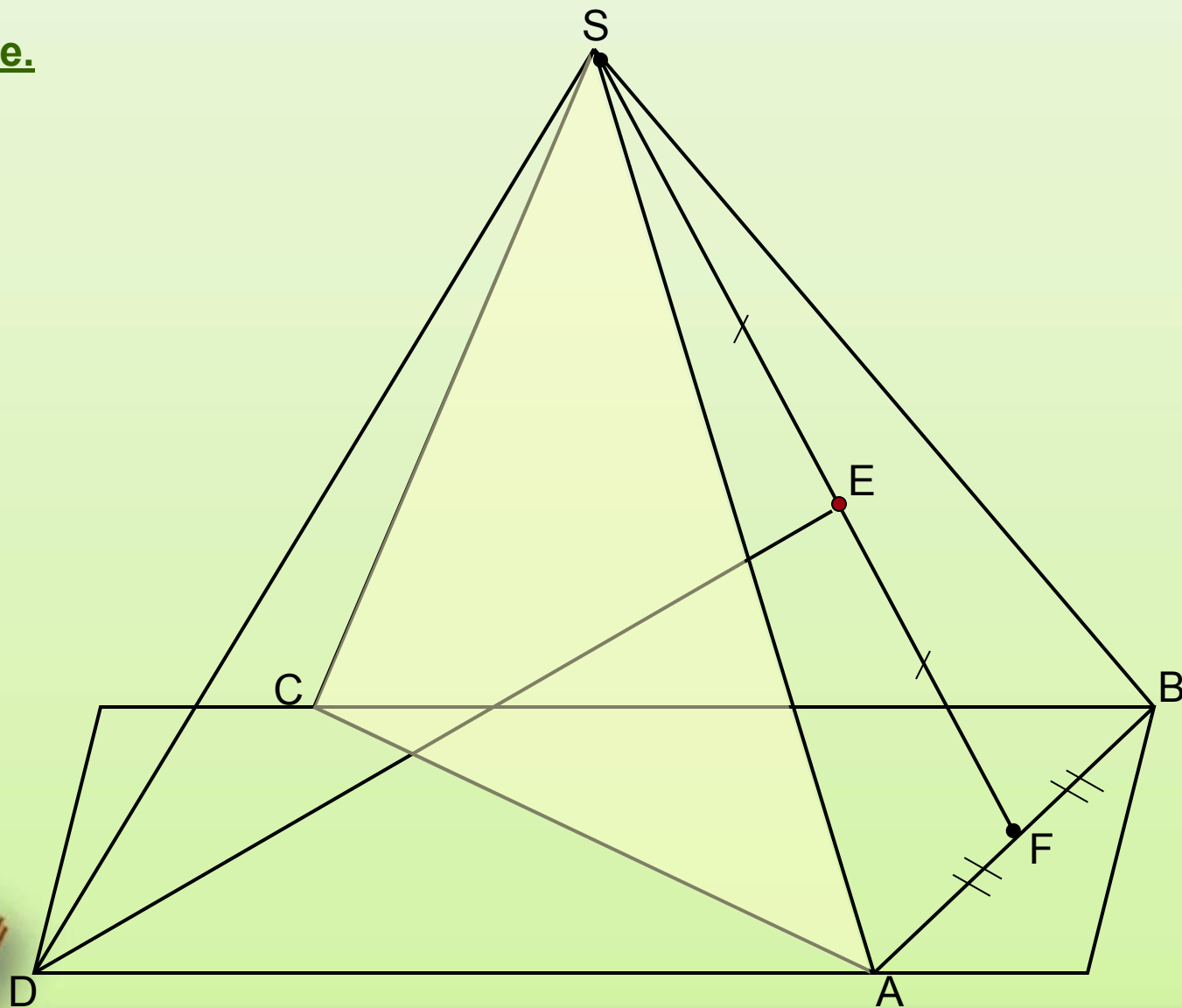
$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|} = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\vec{n}\{x_1; y_1; z_1\} \perp \alpha$$



**Задача 3.** В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$ , все ребра которой равны 1. Найдите угол между прямой  $DE$ , где  $E$  - середина апофемы  $SF$  грани  $ASB$ , и плоскостью  $ASC$ .

**Решение.**



# I способ.

1)  $OD \perp (ASC)$ .



$\vec{OD}$  – вектор нормали к  $(ASC)$ .

2)  $\vec{DE}$  – направляющий вектор прямой  $DE$ .

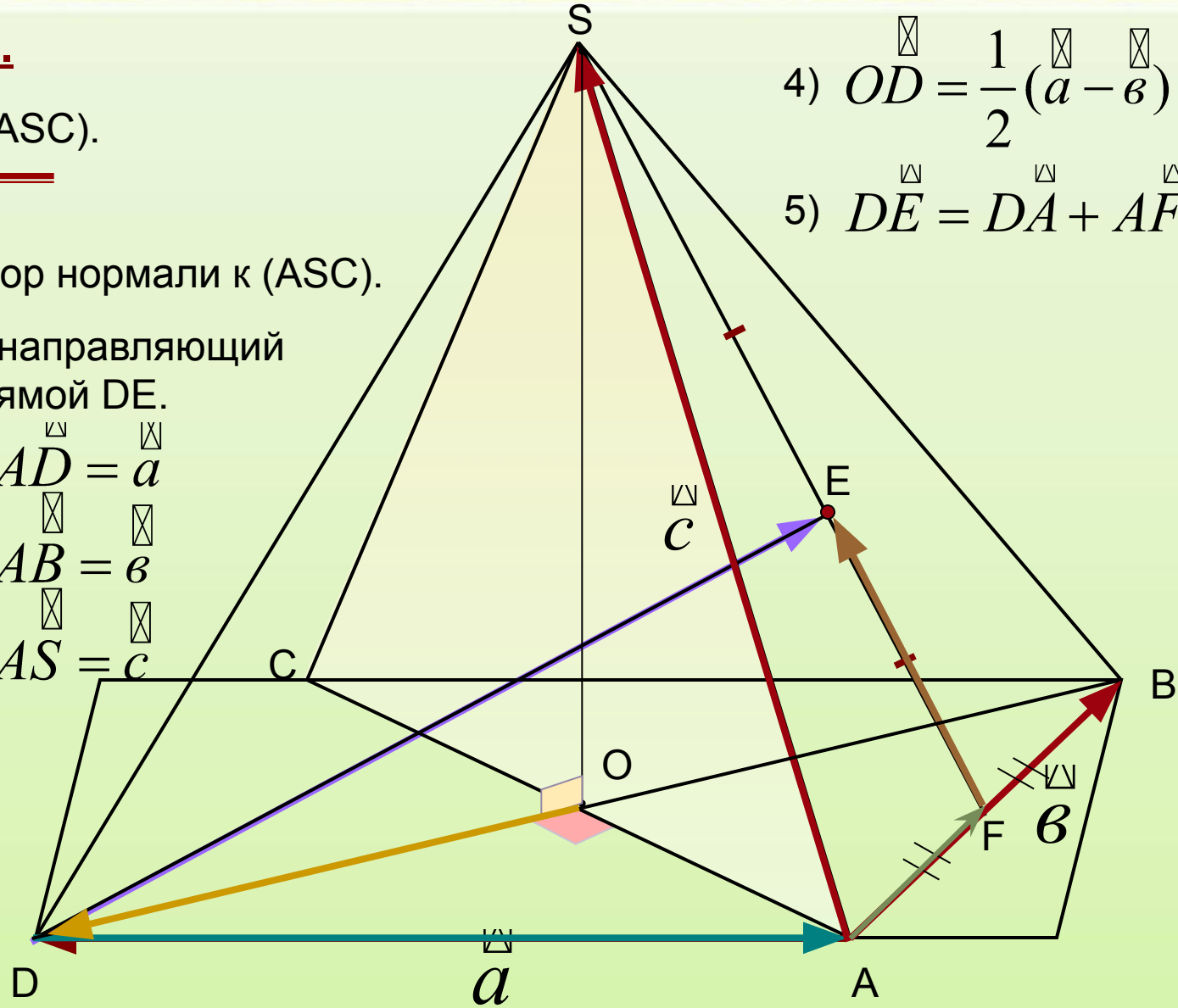
3) Пусть  $\vec{AD} = \vec{a}$

$\vec{AB} = \vec{b}$

$\vec{AS} = \vec{c}$

$$4) \vec{OD} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$$

$$5) \vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AF} + \vec{FE}$$



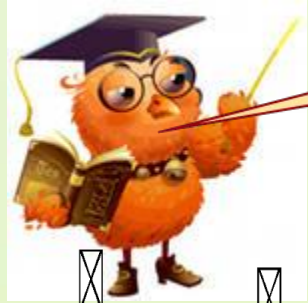
$$\vec{DE} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}\left(-\frac{1}{a}\right) = \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$$



$$\vec{OD} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$$

$$\sin \varphi = \frac{|D\vec{E} \cdot O\vec{D}|}{|D\vec{E}| \cdot |O\vec{D}|}$$

$$\vec{DE} = -\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$



$$a^2 = |\vec{a}|^2$$

$$D\vec{E} \cdot \vec{OD} = \left(-\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = -\frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{b} + \frac{1}{8}\vec{c} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c} \cdot \vec{a} - \frac{1}{4}\vec{c} \cdot \vec{b}$$

$$D\vec{E} \cdot \vec{OD} = -\frac{5}{8}$$

$$|D\vec{E}| = \sqrt{(D\vec{E})^2} = \sqrt{\left(-\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$|O\vec{D}| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \varphi = \frac{5}{\sqrt{30}}$$

Ответ:  $\arcsin \frac{\sqrt{30}}{6}$



## II способ. Координатно-векторный метод

Введем прямоугольную систему координат.

$$D\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$$

$$\vec{OD} \left\{ \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0 \right\} - \text{нормаль}$$

$$E\left(-\frac{1}{4}; 0; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

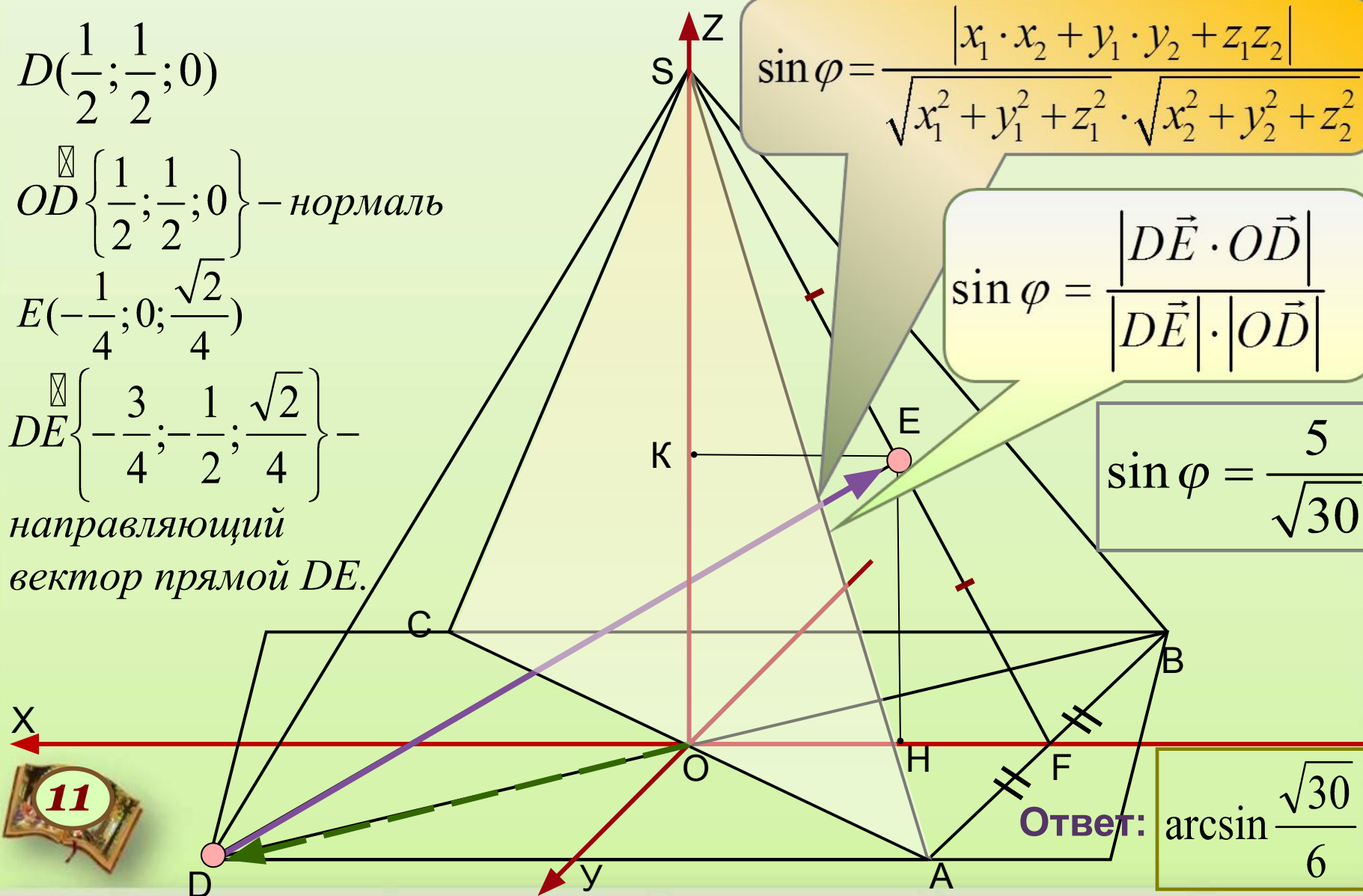
$$\vec{DE} \left\{ -\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\} -$$

направляющий  
вектор прямой DE.

$$\sin \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{|D\vec{E} \cdot O\vec{D}|}{|D\vec{E}| \cdot |O\vec{D}|}$$

$$\sin \varphi = \frac{5}{\sqrt{30}}$$



**Ответ:**  $\arcsin \frac{\sqrt{30}}{6}$

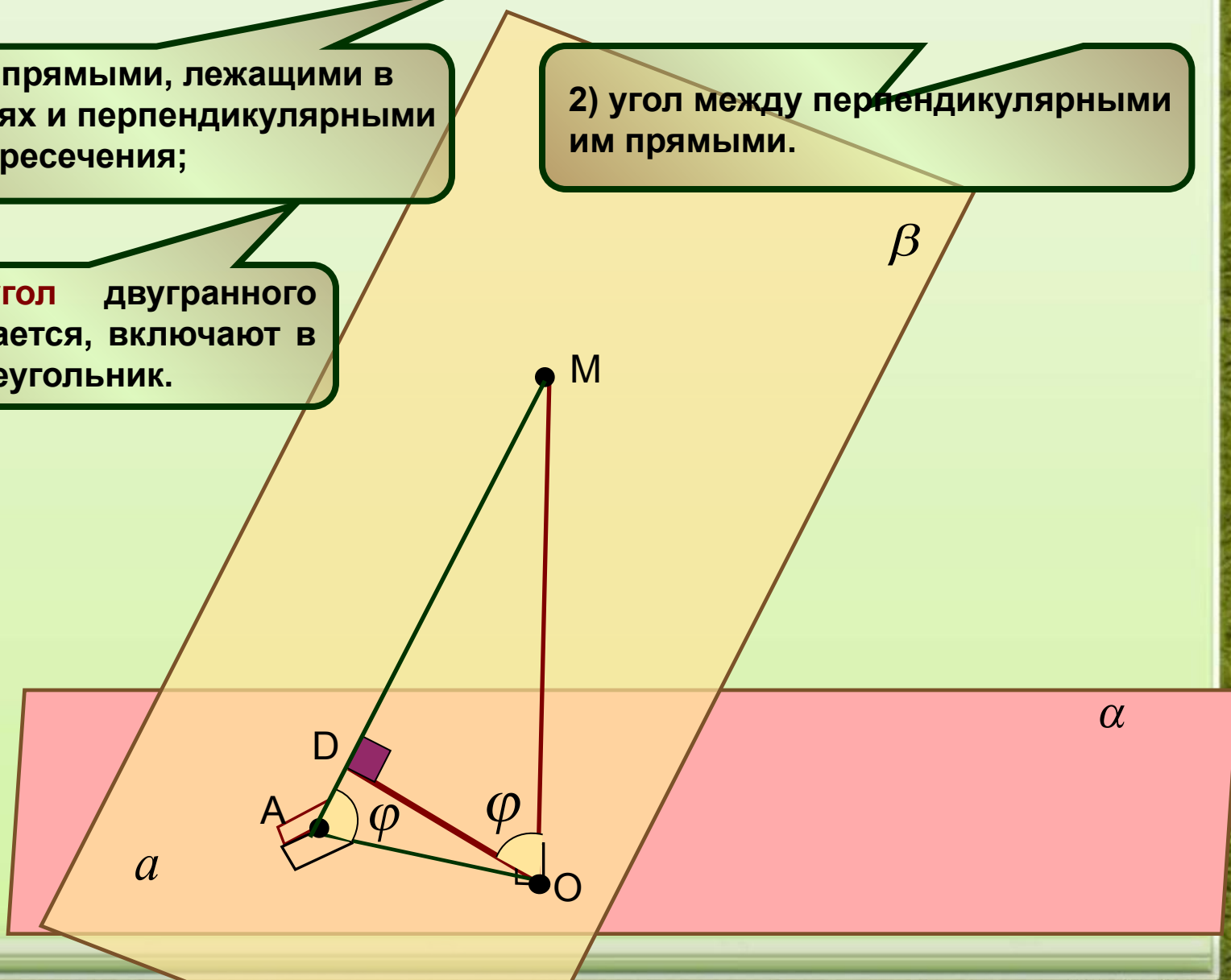
## 4. Угол между пересекающимися плоскостями

МОЖНО вычислить: как

1) угол между прямыми, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными к линии их пересечения;

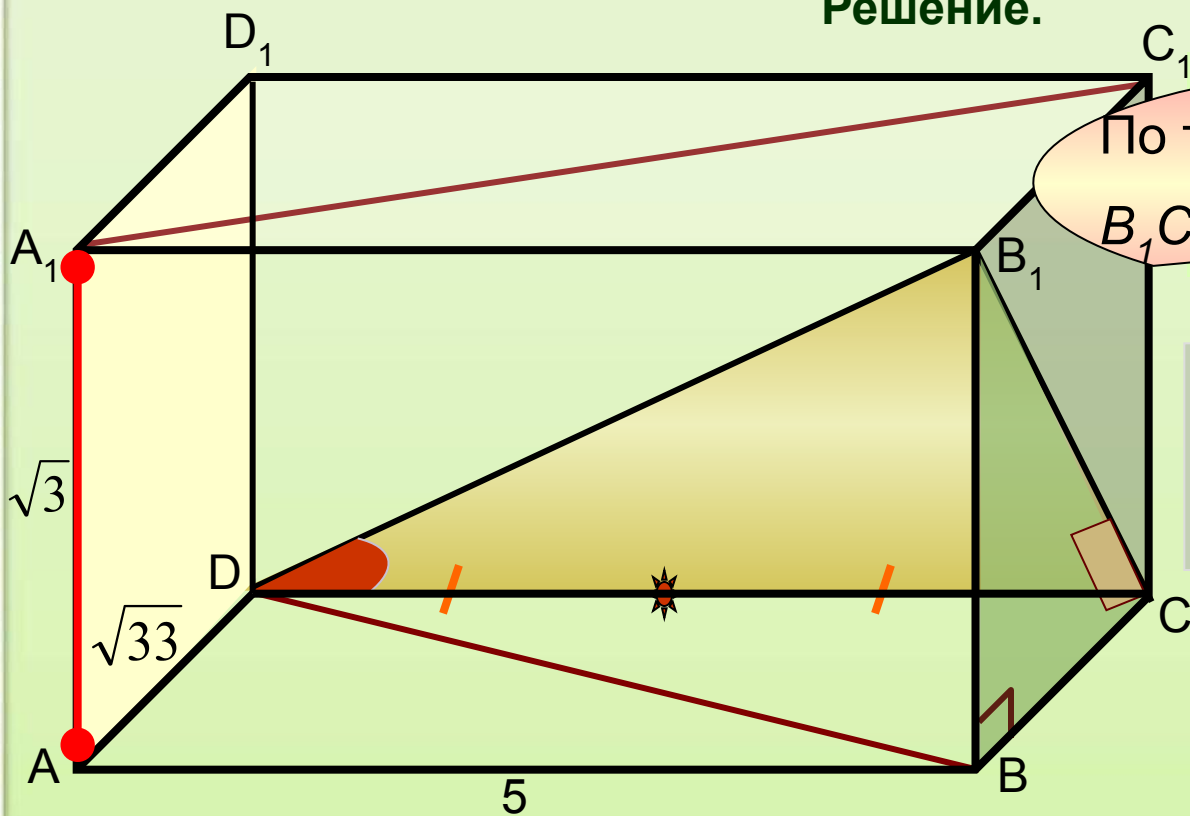
2) угол между перпендикулярными им прямыми.

**Линейный угол** двугранного угла, если удастся, включают в некоторый треугольник.



**Задача 4.** Основание прямой четырехугольной призмы прямоугольник  $ABCD$ , в котором  $AB=5$ ,  $AD=\sqrt{33}$ . Найдите тангенс угла между плоскостью грани  $AA_1D_1D$  призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра  $CD$ , перпендикулярно прямой  $B_1D$ , если расстояние между прямыми  $A_1C_1$  и  $BD$  равно  $\sqrt{3}$ .

**Решение.**



По теореме Пифагора найдем

$$B_1C = \sqrt{BC^2 + BB_1^2} = 6$$

Угол между данными плоскостями - угол между перпендикулярными к ним прямыми.

$$\operatorname{tg} \angle B_1DC = \frac{B_1C}{DC} = \frac{6}{5}$$

$\angle B_1DC$  - ИСКОМЫЙ.



$CD \perp (AA_1D)$   
 $B_1D \perp \beta$  - по условию

# Подготовка к ЕГЭ



**Благодарю за внимание**



*Е.Ю.Фролова, учитель математики ГБОУ СОШ №2 г.о. Кинель*