

Мастер-класс «Математика плюс ЭКОНОМИКА».

Ведущие: к.э.н., Роман Анатольевич Саромсоков

Анна Георгиевна Малкова

*Совместный образовательный проект: ERUDIT lab и ЕГЭ-
Студия*

<http://eruditlab.ru> <http://ege-study.ru>

Самое необходимое для решения задачи 19 и задач олимпиад по экономике

1) 1% — это одна сотая часть от чего-либо.

2) за 100% мы принимаем ту величину, с которой сравниваем.

3) Формулы для подсчета процентов:

если величину x увеличить на P процентов, получим $x \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)$.

если величину x уменьшить на P процентов, получим $x \cdot \left(1 - \frac{P}{100}\right)$.

если величину x дважды увеличить на P процентов, получим $x \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^2$

если величину x дважды уменьшить на P процентов, получим $x \cdot \left(1 - \frac{P}{100}\right)^2$

Подробно о задачах на проценты



<http://dvd.ege-study.ru/>

Задачи на погашение кредита равными платежами. Общая формула.

- Пусть размер кредита равен x .
- Процент банка равен a , а ежегодная выплата по кредиту равна S .
- Тогда через год после начисления процентов и выплаты суммы S размер долга равен: $x \left(1 + \frac{a}{100}\right)$
- Обозначим $p = 1 + \frac{a}{100}$.
- Тогда через два года размер долга: $(xp - S)p - S$.
- Через 3 года: $((xp - S)p - S)p - S$
- Через 4 года: $((((xp - S)p - S))p - S)p - S$
- ...через n лет: $xp^n - S(p^{n-1} + \dots + p^3 + p^2 + p + 1)$

Задачи на погашение кредита равными платежами. Общая формула (продолжение)

- Для подсчета величины в скобках иногда применяется формула суммы n членов геометрической прогрессии. Здесь $b_1 = 1$, $q = p$.

- Напомним формулу суммы n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

n членов геометрической

В нашем случае

$$x p^n - \frac{S(1 - p^n)}{1 - p}$$

а через n лет

Задача 1.

- 31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая – 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на $a\%$), затем Олег переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 328050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587250 рублей, то за 2 года. Под какой процент Олег взял деньги в банке?

Решение

Пусть 31 декабря 2014 года Олег взял в банке x рублей. Пусть ежегодный транш (платеж, выплачиваемый Олегом в банк) равен S рублей.

Тогда 31 декабря 2015 года долг Олега равен $x \left(1 + \frac{a}{100}\right) - S$.

А 31 декабря 2016 года долг равен $\left(x \left(1 + \frac{a}{100}\right) - S\right) \left(1 + \frac{a}{100}\right)$.

Замена переменной: $\left(1 + \frac{a}{100}\right) = p$.

Тогда долг Олега на 31 декабря 2015 года равен $xp - S$, а 31 декабря 2016 года его долг равен $(xp - S)p - S$.

- Рассмотрим 2 ситуации →

Решение (продолжение)

1) Ежегодный транш S_1 равен 587250 рублей. Тогда Олег выплатит долг за 2 года и

$$(xp - S_1)p - S_1 = 0.$$

2) 2) Ежегодный транш S_2 равен 328050 рублей. Тогда Олег выплатит долг за 4 года, то есть 31 декабря 2017 года его долг равен:

$$((xp - S_2)p - S_2)p - S_2.$$

А 31 декабря 2018 года Олег выплатит долг, то есть

$$(((xp - S_2)p - S_2)p - S_2)p - S_2.$$

Решение (продолжение)

Получим систему уравнений:

$$(xp - S_1)p - S_1 = 0$$

$$(((xp - S_2)p - S_2)p - S_2) = 0.$$

Раскроем скобки: $xp^2 - S_1p - S = 0$

$$xp^4 - S_2(p^3 + p^2 + p + 1) = 0$$

То есть: $xp^2 = S_1(p + 1)$

- $xp^4 = S_2(p^2 + 1)(p + 1)$
- Делим 2 уравнение на 1. Получим:
- $p^2 = S_2 / S_1 * (p^2 + 1)$
- Заменяем $p^2 = z$, подставляем $\frac{S_2}{S_1} = 328050 : 587250 = 81 : 145$, получим
- $z = 81/64$, тогда $p = 9/8$,
- $a/100 = 1/8$,
- $a = 12,5$.
- Ответ: 12,5.

Задача 2.

- 1 января 2015 Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая – 1 числа каждого месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает платеж на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

Решение

- **Метод: оценка + пример.**
- Заметим, что если кредит беспроцентный, то Александр Сергеевич выплатит его ровно за 4 месяца, т.к. $1\ 000\ 000 = 4 * 275\ 000$.
- Поскольку банк начисляет проценты, Александр Сергеевич точно не сможет выплатить кредит ни за 4 месяца, ни за меньшее время. Значит, если n – число месяцев, то $n \geq 5$.
- Покажем, что $n = 5$.
- Чтобы Александр Сергеевич выплатил кредит за 5 месяцев, необходимо выполнение условия:
- $1100 * p^5 - 275 (p^4 + p^3 + p^2 + p + 1) \leq 0$
- Здесь $p = 1 + 0,01$.
-
- Сокращаем на 275, подставляем $p = 1,01$ и получаем, что неравенство верно

В задаче использован метод «Оценка + пример». Этот метод применяется также для решения задач С6 (21) на ЕГЭ по математике. Видеокурс «Ключ к С6»:



<http://dvd.ege-study.ru/>

Задача 3 (Высшая проба)

- Молодой преподаватель экономики снимает квартиру в городе М. и в начале каждого месяца платит за аренду 26 000 руб. Деньги он снимает со своего счета в банке.
- Ежемесячно на сумму остатка на счете банк начисляет процент по ставке r %. Придя в начале очередного месяца за деньгами, хозяин квартиры предложил молодому экономисту следующую сделку: если он оплатит аренду сразу за два месяца вперед, то арендная плата за каждый из этих двух месяцев будет снижена до 25 500 руб. Если предложение будет принято, то в следующий раз хозяин придет за деньгами через два месяца и вновь потребует 26 000 руб. При каких значениях r арендатору стоит принимать это предложение?
- Преподаватель максимизирует сумму, которая останется у него на счете через два месяца. Сумма, которая имеется на счете у арендатора на момент принятия решения, достаточно велика: считайте, что ее хватит для оплаты аренды при любом выбранном варианте.

Решение

- Все расчеты – в тыс. рублей.
- Пусть сумма на счете Преподавателя в начале месяца равна A тысяч рублей.
- Банк начисляет каждый месяц r %.
- Если Преподаватель примет предложение, то через 2 месяца на его счете будет сумма
- $(A - 25,5 * 2) (1 + r / 100)^2$
- Если Преподаватель не принял предложения, то через 2 месяца на его счете будет сумма
- $((A - 26) (1 + r/100) - 26) (1 + r/100)$
- Предложение выгодно для Преподавателя, если
- $((A - 26) (1 + r/100) - 26) (1 + r/100) < (A - 25,5 * 2) (1 + r / 100)^2$
- Замена $1 + r/100 = z$, причем $z > 1$
- $((A - 26) z - 26) z < (A - 51) z^2$
- Сокращаем на z , поскольку $z > 1$. Получаем:
- $25 z < 26$, тогда $z < 26/25$, то есть $1 + r/100 < 26/25$ и $r < 4$.
- Ответ: $r < 4$.

Экономическое содержание задачи

- Концепция альтернативных издержек □ выбор из двух альтернатив



Квадратичная функция

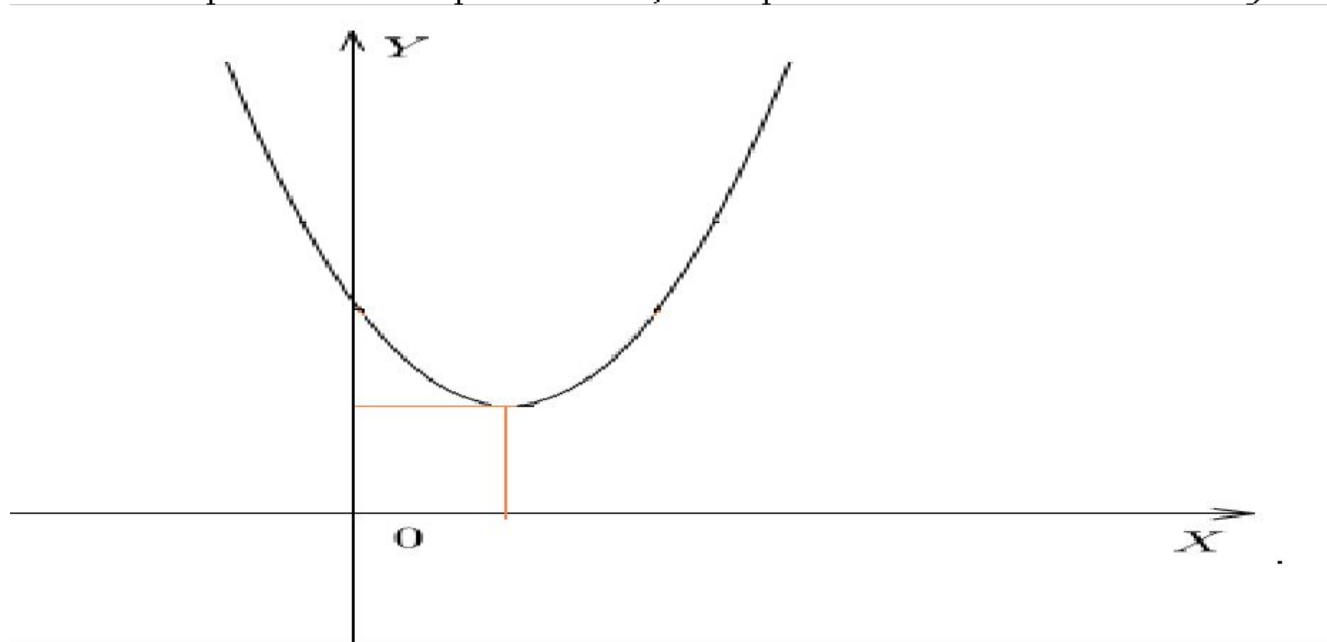
Квадратичная функция.

Формула: $y = ax^2 + bx + c$

График – парабола

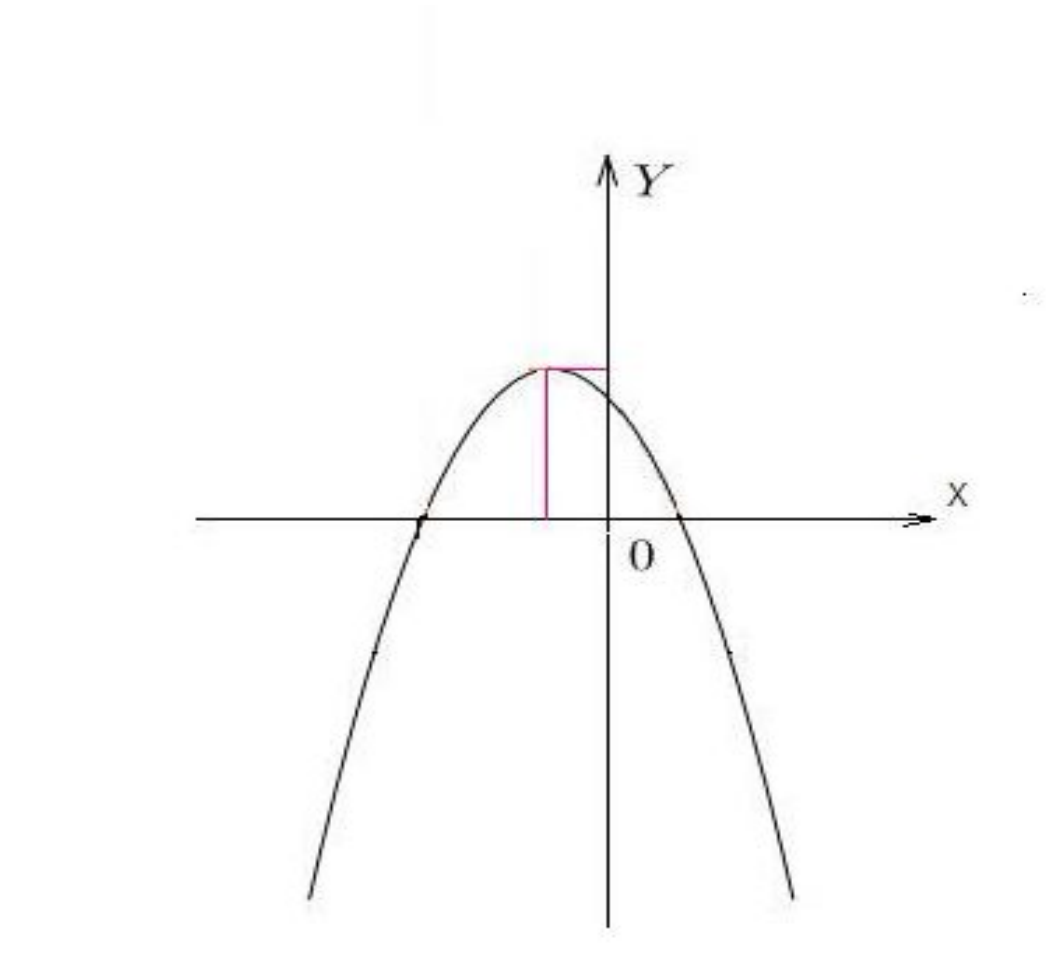
Координаты вершины параболы: $x_0 = -b/2a$, $y_0 = y(x_0)$

Ветви параболы вверх: $a > 0$, в вершине – точка минимума



Ветви параболы вниз: $a < 0$, в вершине – точка максимума

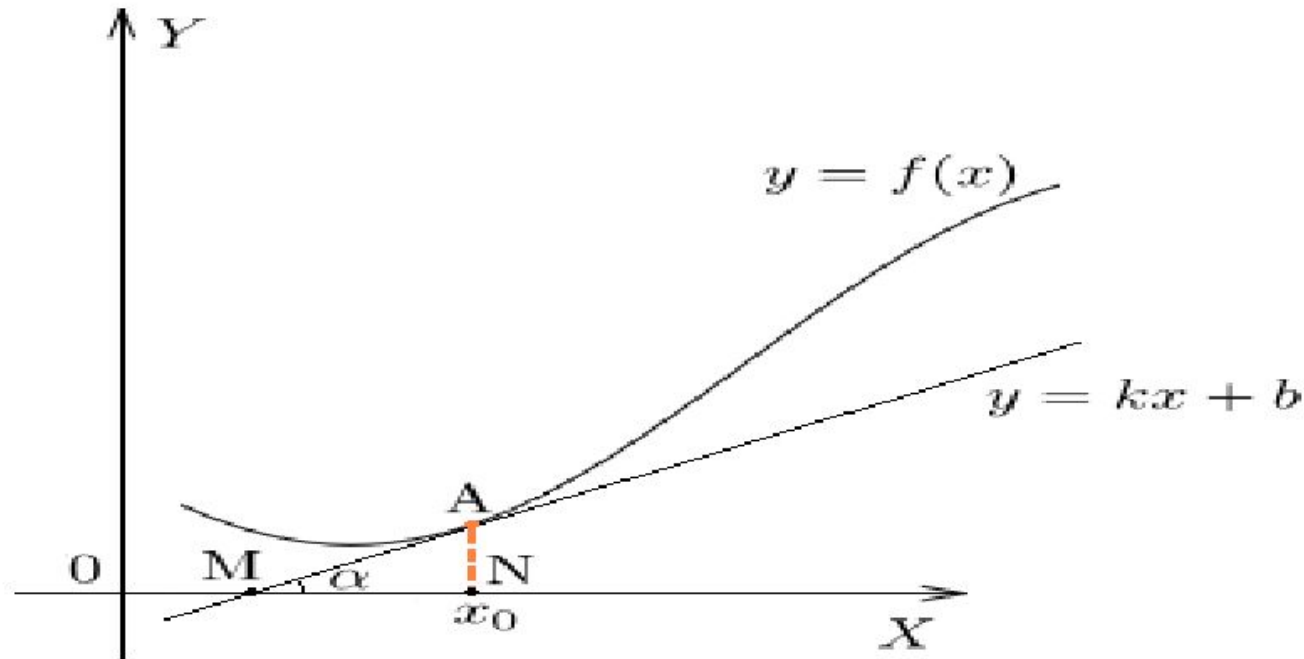
Квадратичная функция (ветви вниз)



Производная функции.

Производная — это скорость изменения функции.

Производная функции обозначается $f'(x)$.



Производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой к графику функции в этой точке. Другими словами — угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику функции в этой точке.

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

Задача

- Спрос на продукцию монополиста задан функцией $P=100-2Q$, где P – цена товара за шт., а Q – выпуск товара. Его издержки задаются функцией $TC = 2Q^2+2$. Компания стремится максимизировать свою прибыль. Подскажите ей, какую цену ей нужно назначить?
- 1. Прибыль компании – это выручка (TR) минус издержки (TC). Выручка – это количество проданного товара (Q) умноженное на его цену (P). То есть выручка у нас $TR=P*Q$, заменим P на $100-Q$ (по условию) $\rightarrow TR=(100-2Q)Q=100Q - 2Q^2$.
- Таким образом, функцию прибыли можно записать как $\pi = TR - TC = 100Q - 2Q^2 - 2Q^2 - 2 = 100Q - 4Q^2 - 2$ – перед нами парабола, ветви которой направлены вниз
- 2) π максимальна, когда $\pi' = 0 \Rightarrow (100Q - 4Q^2 - 2)'$
- $=100 - 8Q = 0 \Rightarrow Q = 12,5$
- 3) Подставляем объем производства в функцию цены имеем $P=100-2*12,5=75$
- Ответ: 75

Онлайн курсы по олимпиадной ЭКОНОМИКЕ

- Для 9-10 класса (с 1 декабря) – <http://eruditlab.ru/index/0-52> (при записи до 15 декабря скидка)
- Для 11 класса (только для продвинутых) - <http://eruditlab.ru/index/0-25> (при записи до 15 декабря бесплатный доступ к занятиям сентября-ноября – 25 занятий в записи, тесты, учебные материалы)

Спасибо за внимание!

