Лекція-2.2.
Тема:
«Ейлерів й гамільтонів цикл»

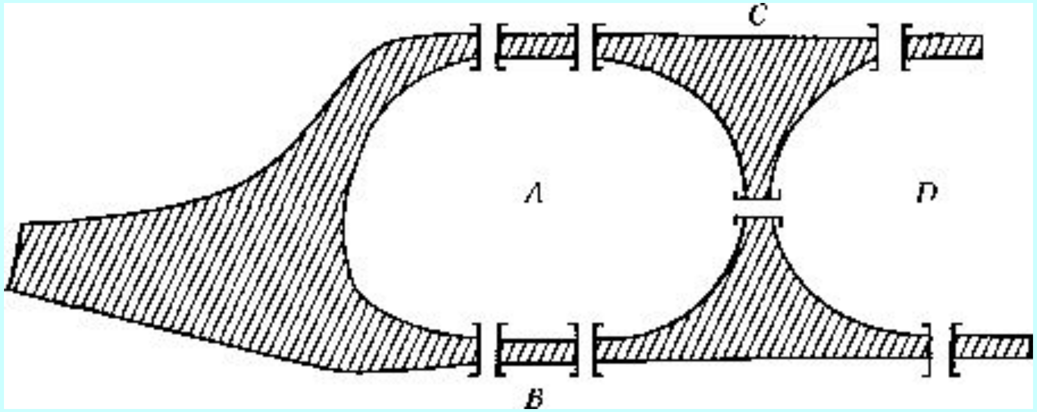
Зміст

- Вступ…………………………………………… 3
- Ейлер розв’язав………………………...……………....4
- Малій кроки є значущими....………………………..6
- Ейлерів цикл…………………………………..……...7
- Теорема 1 ………………………………..…..............8
- Крок 2. Достатність..........................…….....……9
- Гамільтонів цикл………………………..…...……10
- Цікава гра……….……...……….…………..…...11
- Теорема...…..…12
- Висновки ………………………………………......14
- Список літератури 15

Вступ

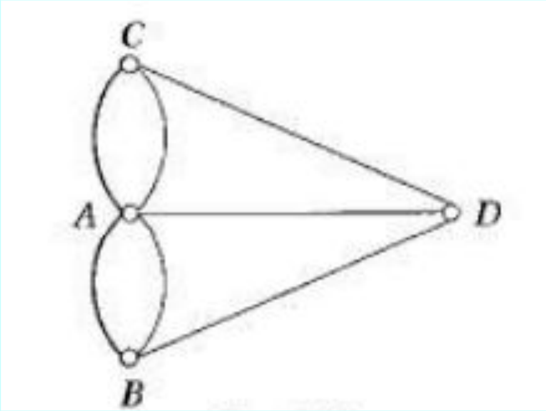
Початок теорії графів як розділу математики пов'язують із задачею про кенігсберзькі мости. Сім мостів міста Кенігсберга (нині - Калінінград у Росії) було розміщено на річці Прегель так, як зображено на рис.

Чи можна, починаючи з якоїсь точки міста, пройти через усі мости точно по одному разу й повернутись у початкову точку?



Ейлер розв'язав.

Його розв'язання, опубліковане 1736 р., було першим явним застосуванням теорії графів. Ейлер поставив у відповідність плану міста мультиграф *C*, вершини якого відповідають чотирьом частинам *A*, *B*, C, D міста, а ребра — мостам. Цей мультиграф зображено нище.



Малій кроки є значущими

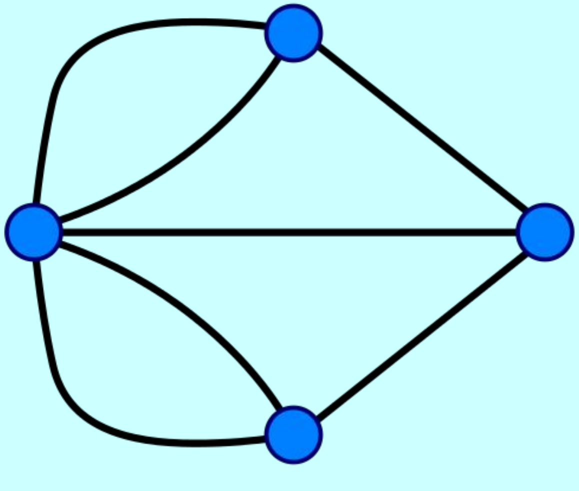
Отже, задачу про кенігсберзькі мости мовою теорії графів можна сформулювати так: чи існує в мультиграфі *C* простий цикл, який містить усі ребра цього мультиграфа?

Ейлер довів нерозв’язність задачі про кенігсберзькі мости. Нагадаємо, що в простому циклі ребра не повторюються, а вершини можуть повторюватись.

Ейлерів цикл

Ейлеровим циклом у зв'язному мультиграфі *C* називають простий цикл, який містить усі ребра графа

Ейлеровим шляхом — простий шлях, що містить усі реб- за графа.



Теорема 1

Зв’язний мультиграф *C* має ейлерів цикл тоді й лише тоді, коли степені всіх його вершин парні.

Крок 1. Необхідність. Нехай у графі *C* існує ейлерів цикл. Він проходить через кожну вершину графа та входить до неї по одному ребру, а виходить по іншому. Це означає, що кожна вершина інцидентна парній кількості ребер ейлерового циклу. Оскільки такий цикл містить усі ребра графа *C*, то звідси зипливає парність степенів усіх його вершин.

Крок 2. Достатність

Почнемо шлях P_1 із довільної вершини v_1 продовжимо його, наскільки це можливо, вибираючи щоразу нове ребро. Степені всіх вершин парні, то, увійшовши в будь-яку вершину, відмінну від v_1, ми завжди маємо можливість вийти з неї через іще не пройдене ребро. Тому шлях P_1 можна продовжити, додавши це ребро.

Отже, побудова шляху P_1 завершиться у вершині v_1 тобто P_1 обов'язково ВИЯВИТЬСЯ ЦИКЛОМ.

Алгоритм Флері побудови ейлерового циклу

- Робота алгоритму полягає в нумерації ребер у процесі побудови ейлеровог циклу.

  - Крок 1. Початок. Починаємо з довільної вершини u та присвоюємо довільному ребру $\{u, v\}$ номер 1. Викреслюємо ребро $\{u, v\}$ й переходимо у вершину v.

- Крок 2.
  - Ітерагоя. Нехай v — вершина, у яку ми перейшли на попередньому кроці, k — останній присвоєний номер. Вибираємо довільне ребро, інцидент- не вершині v, причому міст вибираємо лише тоді, коли немає інших можливостей. Присвоюємо вибраному ребру номер $(k + 1)$ і викреслюємо його.
- Крок 3.
  - Закінчення. Цей процес закінчуємо, коли всі ребра графа викреслено та пронумеровано ці номери задають послідовність ребер в ейлеро вому циклі.

Гамільтонів цикл у графі

Шлях $x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n$ у зв'язному графі $G = (V, E)$ називають *гамільтоновим циклом,* якщо $V = \{x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ і $x_1 \mathrel{!}= x_2$ для $0 \le i \le j \le n$. Цикл $x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n$ (тут $n > 1$) у графі $G = (V, E)$ називають *гамільтоновим циклом,* якщо $x_0, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n$ — гамільтонів шлях.

Інакше кажучи, гамільтонів цикл і гамільтонів шлях проходять через кожну вершину графа точно один раз

«Навколосвітня подорож»

Кожній із двадцяти вершин додекаедра (правильного дванадцятигранника, грані якого — п’ятикутники) приписано назву одного з великих міст світу. Потрібно, розпочавши з довільного міста, відвідати решту 19 міст точно одип раз і повернутись у початкове місто.

Перехід дозволено ребрами додекаедра

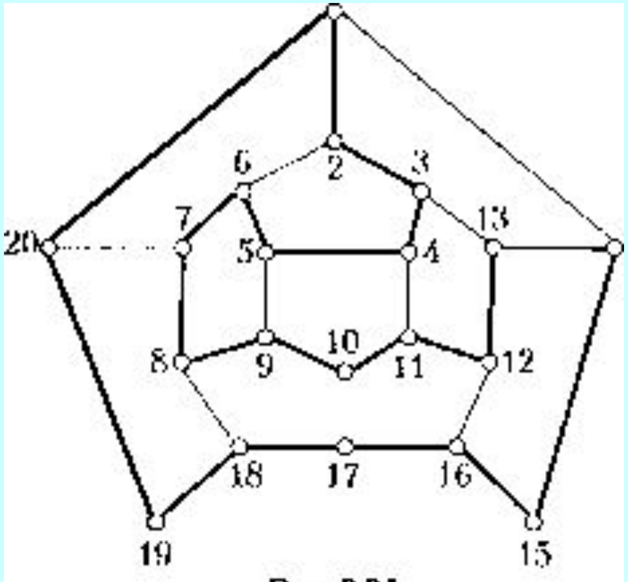


Рис. 3.34

Теорема

Інтуїтивно зрозуміло, що граф із багатьма ребрами, достатньо рівномірно розподіленими, з великою ймовірністю має гамільтонів цикл.

Якщо для кожної вершини v зв'язного простого графа з $n \geq 3$ вершинами виконується нерівність $\deg(v) \geq n/2$, то цей граф має ***гамільтонів цикл***.

Висновки

- Отже, для задач даного типу покищо не є відомий чіткий алгоритм, але є влучні спроби його знаходження.
- Незважаючи на зовнішню подібність формулювань задач про існування ейлерового й гамільтонового циклів, ці задачі принципово різні. Використовуючи результати попереднього підрозділа, легко виявити, чи має граф ейлерів цикл, і, якщо має, то побудувати його.
- Граф, який містить гамільтонів цикл, часто називають *гамільтоновим графом*.

Список літератури

- 1. Нікольський Ю. В. Дискретна математика/ Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина. – Київ: Видавнича група BHV, 2007. – 367 с.