Інтегральне числення. Диференціальні рівняння.

ЗМІСТ

- **Невизначений інтеграл.**
- **Властивості невизначеного інтеграла. Визначений інтеграл.**
- **Формула Ньютона-Лейбніца.**
- **Властивості визначеного інтеграла.**
- **Основні поняття теорії диференціальних рівнянь.**

Невизначений інтеграл, його властивості і обчислення

Означення. Функція F(x) називається первісною функції f(x) на деякому проміжку, якщо $F'(x) = f(x)$ для кожного *x* з цього проміжку

Наприклад функція *cosx* являється первісною для функції – *sinx,* тому що

$$(\cos x)' = -\sin x$$

Первісна та невизначений інтеграл

Очевидно, якщо F(x) – первісна функції f(x), то , де C –деяка постійна, також являється первісною для функції f(x). Якщо F(x) є будь – яка первісна для функції f(x), то всяка функція виду *Ф (x)*= також являється первісною для функції f(x)

Первісна та невизначений інтеграл

Означення. Сукупність всіх первісних функції f(x), визначених на деякому проміжку, називається невизначеним інтегралом від функції f(x) на цьому проміжку і позначається $\int f(x)dx$

Первісна та невизначений інтеграл

Якщо F(x) – деяка первісна для функції f(x), то пишуть $\int f(x)dx = F(x) + C$, хоча логічніше писати $\int f(x)dx = \{F(x) + C\}$. Ми по існуючих правилах будемо писати $\int f(x)dx = F(x) + C$. Таким чином один і той же символ $\int f(x)dx$ буде визначати як всю сукупність первісних функції f(x), так і будь – який елемент цієї множини

Властивості інтеграла, котрі випливають з означення

Первісна невизначеного інтегралу рівна підінтегральній функції, а його диференціал – його підінтегральному виразу. Тобто:

$$1.\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x);$$

$$2.d\int f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)'dx = f(x)dx.$$

Властивості інтеграла, котрі випливають з означення

Невизначений інтеграл від неперервно диференційованої функції дорівнює самій цій функції з точністю до постійної.

$$\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C,$$

Так як $\varphi(x)$ являється первісною для $\varphi'(x)$

Властивості інтегралу

$\int c \cdot f(x)\ dx = c \cdot \int f(x)dx$, де $c \neq 0$, тобто сталий множник можна виносити за знак інтеграла.

$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$,

тобто невизначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі невизначених інтегралів від цих функцій.

Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, де a і b сталі, $(a \neq 0)$.

Висновок 1. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$, тут $b = 0$.

Висновок 2. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C$, тут $a = 1$.

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Таблиця невизначених інтегралів

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ..

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$.

17. $\int shxdx = chx + C$.

18. $\int chxdx = shx + C$.

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

Методи інтегрування

- **Метод інтегрування заміни змінної.**
- **Метод інтегрування по частинах.**
- **Метод безпосереднього інтегрування**

Метод інтегрування заміни змінної.

Нехай потрібно знайти $\int f(x)dx$, причому безпосередньо підібрати первісну для $f(x)$ ми не можемо, але нам відомо, що вона існує. Часто вдається найти первісну, ввівши нову змінну, по формулі:

$$\int f(x)dx = \int [\varphi(t)]\varphi_t^1 dt$$

$x = \varphi(t)$ де , а t - нова змінна

Метод інтегрування по частинах.

Цей метод заснований на формулі:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Метод безпосереднього інтегрування

Приклад. Обчислити $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1)dx$

$$\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx=\int x^2dx+3\int x^3dx+\int xdx+\int dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C$$

Визначений інтеграл.

Означення. Вираз $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, називається інтегральною сумою функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Визначений інтеграл.

Означення. Якщо існує $\lim\limits_{\max \Delta x \to 0_i} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$, яка не залежить ні від способу розбиття відрізку $[a,b]$ на частини, ні від вибору точок $\overline{x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$, то така границя називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ і позначається

$$\int_a^b f(x)dx$$

Властивості визначеного інтегралу

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

2. $\int_a^b dx = b - a$;

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$;

Властивості визначеного інтегралу

5. $\int_a^b Kf(x)dx = K\int_a^b f(x)dx$;

6. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

7. $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, если $f(x) \geq 0$.

Обчислення визначеного інтегралу

Теорема. Нехай $F(x)$- первісна функції $f(x)$
Тоді

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Цю формулу називають формулою Ньютона – Лейбніца, з якої випливає, що для обчислення визначеного інтегралу необхідно знайти первісну від підінтегральної функції.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ