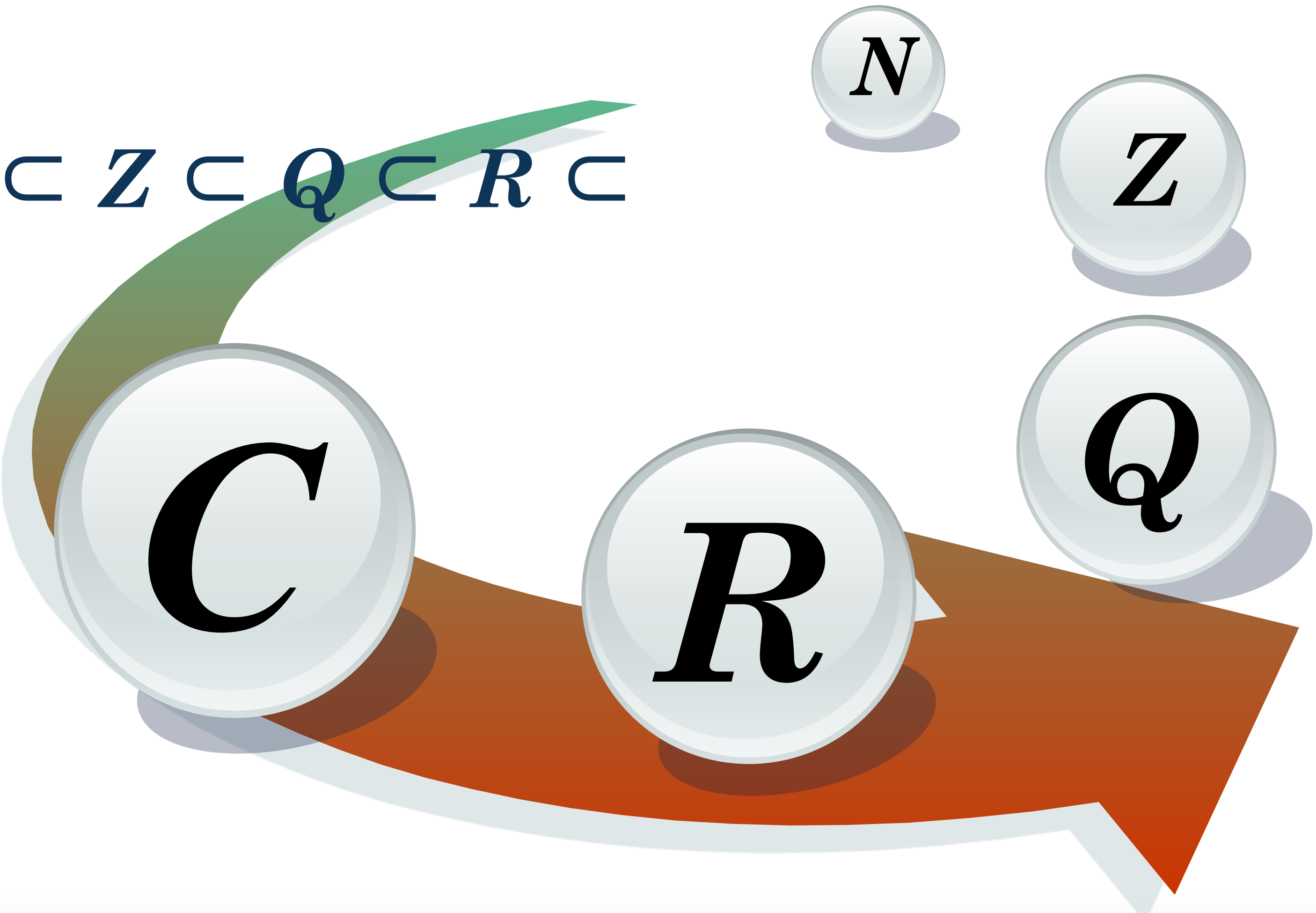
Решите уравнение:

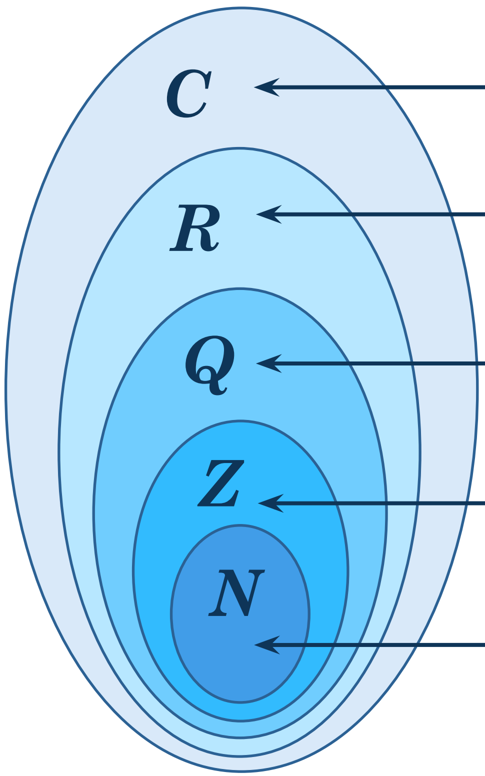
$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

Множества чисел

$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$



Алгебраические операции



Комплексные числа: +, –, ×, ÷, любые длины, $\sqrt{-1}$

Действительные числа: +, –, ×, ÷, любые длины

Рациональные числа: +, –, ×, ÷

Целые числа: +, –, ×

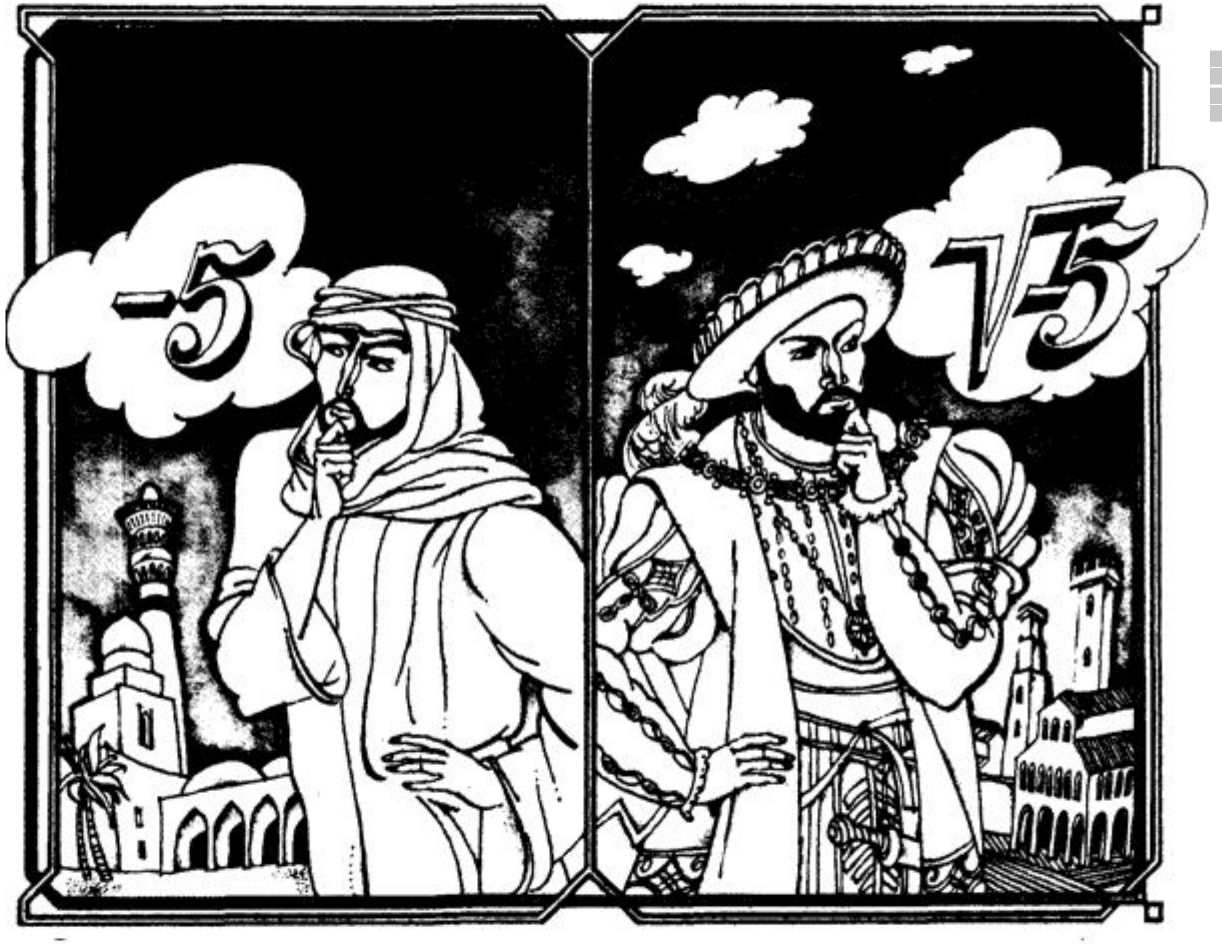
Натуральные числа: +, ×

Комплексные числа

"Комплексное число –
это тонкое и поразительное средство божественного духа, почти амфибия между бытием и небытием".

Г. Лейбниц

LOGO



**Многовековая история развития представления человека о числах –
одна из самых ярких сторон развития человеческой культуры.**

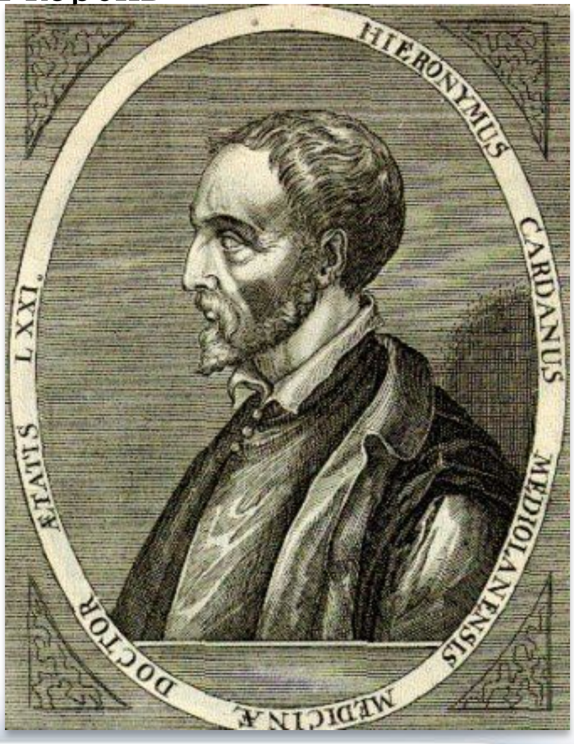
LOGO

Из истории комплексных чисел

Комплексные числа были введены в математику для того, чтобы сделать возможной операцию извлечения квадратного корня из любого действительного числа. Это, однако, не является достаточным основанием для того, чтобы вводить в математику новые числа. Оказалось, что если производить вычисления по обычным правилам над выражениями, в которых встречаются квадратный корень из отрицательного числа, то можно прийти к результату, уже не содержащему квадратный корень из отрицательного числа. В XVI в.

Кардано нашел формулу для решения кубического уравнения. Оказалось, когда кубическое уравнение имеет три действительных корня, в формуле Кардано встречается квадратный корень из отрицательного числа.

Впервые, по-видимому, мнимые величины появились в известном труде «Великое искусство, или об алгебраических правилах» ***Кардано*** (1545), который счёл их непригодными к употреблению.



Кардано Джероламо

Из истории комплексных чисел

Он же дал некоторые простейшие правила действий с комплексными числами. Выражения вида $a+b\sqrt{-1}$, появляющиеся при решении квадратных и кубических уравнений, стали называть «мнимыми» в XVI-XVII веках, однако даже для многих крупных ученых XVII века алгебраическая и геометрическая сущность мнимых величин представлялась неясной. Известно, например, что ***Ньютон*** не включал мнимые величины в понятие числа, а ***Лейбницу*** принадлежит фраза: «Мнимые числа – это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием»

Пользу мнимых величин, в частности, при решении кубического уравнения, в так называемом неприводимом случае (когда вещественные корни выражаются через кубические корни из мнимых величин), впервые оценил ***Бомбелли*** (1572). Задача о выражении корней степени n из данного числа была в основном решена в работах ***Муавра*** (1707) и ***Котса*** (1722).

Символ $i=\sqrt{-1}$ предложил ***Эйлер*** (1777, опубл. 1794), взявший для этого первую букву слова ***imaginarius***.

Леонард Эйлер

Из истории комплексных чисел

Он же высказал в 1751 году мысль об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел. К такому же выводу пришел ***Д'Аламбер*** (1747), но первое строгое доказательство этого факта принадлежит ***Гауссу*** (1799). ***Гаусс*** и ввёл в широкое употребление термин «комплексное число» в 1831 г, хотя этот термин ранее использовал в том же смысле французский математик ***Лазар Карно*** в 1803 году.

Полные гражданские права мнимым числам дал ***Гаусс***, который назвал их комплексными числами, дал геометрическую интерпретацию и доказал основную теорему алгебры, утверждающую, что каждый многочлен имеет хотя бы один действительный корень. Геометрическое истолкование комплексных чисел и действий над ними появилось впервые в работе ***Весселя*** (англ.), (1799). Первые шаги в этом направлении были сделаны ***Валлисом*** (Англия) в 1685 году.

Карл Гаусс

Понятие комплексного числа

Комплексное число $z = (a; b)$ записывают как $z = a + bi$.

$\boxed{i^2 = -1}$, i – мнимая единица.

Число $Re\, z$ называется действительной частью числа z,
а число $Im\, z$ – мнимой частью числа z.
Их обозначают a и b соответственно: $a = Re\, z$, $b = Im\, z$.

Определение:
Числа вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, называются ***комплексными***.

Пример. Решите уравнение:

$x^2 - 6x + 13 = 0$

Решение. Найдем дискриминант по формуле

$D = b^2 - 4ac$.

Так как $a = 1$, $b = -6$, $c = 13$, то

$D = (-6)2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 36 - 52 = -16$;

Корни уравнения находим по формулам

$$x = \frac{6 - 4i}{2}; x = \frac{6 + 4i}{2}$$

LOGO

Решите уравнения:

$$x^2 - 4x + 13 = 0.$$

$$9x^2 + 12x + 29 = 0.$$

Взаимопроверка
Ответы:

1) $$x = \frac{4 \pm 6i}{2}$$

2)

Действия над комплексными числами

Сравнение

$a + bi = c + di$ означает, что $a = c$ и $b = d$ (два комплексных числа равны между собой тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части)

Сложение

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Вычитание

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Умножение

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Деление

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Сопряженные числа

Числа $z = a + bi$ и $z = a - bi$ называются ***сопряженными***

Прокомментировать:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(2 + 3i) + (5 + i) = (2 + 5) + (3 + 1)i = 7 + 4i;$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(5 - 8i) - (2 + 3i) = (3 - 2) + (-8 - 3)i = 1 - 11i;$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac + bd) + (ad + bc)i$$

$$(-1 + 3i)(2 + 5i) = -2 - 5i + 6i + 15i^2 = -2 - 5i + 6i - 15 = -17 + i;$$

Произведение двух чисто мнимых чисел – действительное число:

$$bi \cdot di = bdi^2 = -bd$$

Например:

$5i \cdot 3i = 15i^2 = -15;$

Работа в группах

- $(-2+3i)+(1-8i)=(-2+1)+(3+(-8))i=-1-5i;$
- $(-2+3i)+(1-3i)=(-2+1)+(3+(-3))i=-1+0i=-1.$
- $(3-2i)-(1-2i)=(3-1)+((-2)-(-2))i=2+0i=2.$
- $(2+3i)(2-3i)=4-6i+6i-9i^2=4+9=13.$
- $-2i\cdot 3i=-6i^2=6.$

Примеры

Произведение двух сопряженных чисел – действительное число:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

Деление комплексного числа $a + bi$ на комплексное число $c + di \neq 0$ определяется как операция обратная умножению и выполняется по формуле:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Формула теряет смысл, если $c + di = 0$, так как тогда $c^2 + d^2 = 0$, т. е. деление на нуль и во множестве комплексных чисел исключается.

Обычно деление комплексных чисел выполняют путем умножения делимого и делителя на число, сопряженное делителю.

Прокомментируйте

1). $$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{(1+i)^2}{1+1}=\frac{1+2i+i^2}{2}=i$$

2). $$\frac{3+2i}{2+i}=\frac{(3+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{8+i}{2^2-i^2}=\frac{8+i}{5}=\frac{8}{5}+\frac{1}{5}i$$

Вычислите:

«Мы приходим к выводу, что не существует никаких абсурдных, иррациональных, неправильных, необъяснимых или глухих чисел, но что среди чисел существует такое совершенство и согласие, что нам надо размышлять дни и ночи над их удивительной законченностью».

Симон Стевин.

LOGO

Спасибо за урок!