Решение иррациональных уравнений с параметром.

Решение иррационального уравнения

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

Зависит от четности натурального числа *n*:

- если n – ***четное***, то есть n=2k, где k – натуральное число, то данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^{2k}(x) \end{cases}$$

- если n – ***нечетное***, то есть n=2k+1, где k – натуральное число, то данное уравнение равносильно уравнению:

$$f(x) = g^{2k+1}(x)$$

Пример 1. Решить уравнение относительно x

$$\sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1$$

Решение: исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ x^2 + ax - 2a = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ (a-2)x = 1 + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1, \\ x = \dfrac{1+2a}{a-2}, \\ a \neq 2. \end{cases}$$

Найдем a, при которых $\dfrac{1+2a}{a-2}$ больше -1, т.е. решим неравенство

$$\frac{1+2a}{a-2} \geq -1 \Rightarrow a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup (2; +\infty)$$

Ответ: $\forall a \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup (2; +\infty)$ $\quad x = \dfrac{1+2a}{a-2}$

$\forall a \in \left(\frac{1}{3}; 2\right]$ - решений нет.

Пример 2. При каких *a* уравнение $\sqrt{x+3}=2x-a$ имеет единственный корень?

Решение: исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2x-a\ge 0 \\ x+3=4x^2-4ax+a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{a}{2} \\ 4x^2-(4a+1)x+a^2-3=0 \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение, если:

$$\left[\begin{array}{l} D=0 \\ f\left(\dfrac{a}{2}\right)<0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (4a+1)^2-16(a^2-3)=0 \\ 4\cdot\dfrac{a^2}{4}-(4a+1)\cdot\dfrac{a}{2}+a^2-3<0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\dfrac{49}{8} \\ a>-6 \end{array}\right.$$

Ответ: при $a=-\dfrac{49}{8}$ или $a>-6$ данное уравнение имеет единственный корень.

Пример 3. При каких а уравнение $\sqrt{x+2a+1} = a + \frac{x}{4}$ имеет два корня?

Решение: исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} a + \frac{x}{4} \geq 0 \\ x + 2a + 1 = a^2 + \frac{ax}{4} + \frac{x^2}{16} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -4a \\ x^2 + 8(a-2)x + 16a^2 - 32a - 16 = 0 \end{cases}$$

Данная система имеет два решения, если:

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(-4a) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16(a-2)^2 - 16a^2 + 32a - 16 > 0 \\ 16a^2 + 8(-4a)(a-2) + 16a^2 - 32a + 16 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -32a+80>0 \\ 32a-16>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<\dfrac{5}{2} \\ a>\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ: при $a \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$ данное уравнение имеет два корня.