Понятие обратной функции.

Определение обратных тригонометрических функций.

Алгебра и начала анализа, 10 класс.

Касьянова Е.Н.

Рассмотрим пример какой-либо функции, заданной в явном виде формулой y=f(x). Пусть, для определенности, это будет линейная функция y=2x–7. Вспомним, как выполняется такая задача: *найти значение функции по заданному значению аргумента*. Вспомнили?..

…Правильно: для этого надо данное значение аргумента подставить в формулу и произвести вычисления. Например, при x=2, значение функции равно $y=2\cdot 2-7=-3$.

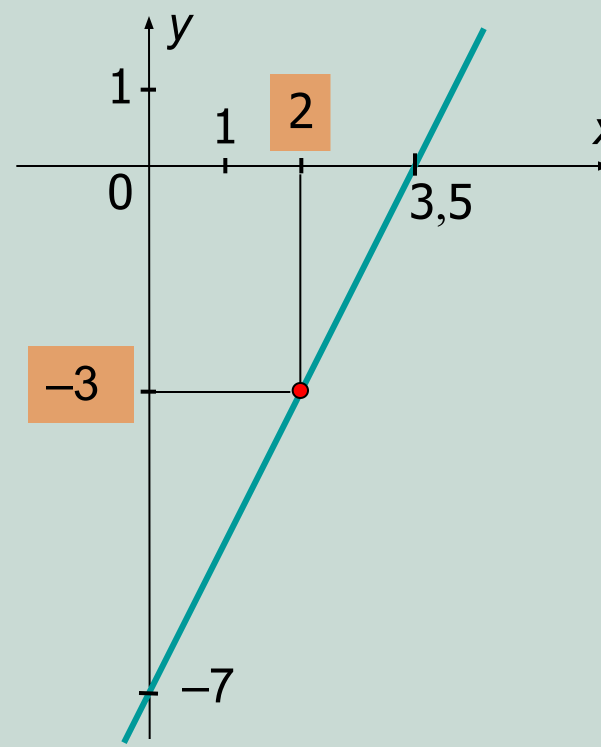
Эту же задачу можно выполнить графическим способом. Для этого нужно:

1) построить график данной функции;

2) отметить на оси абсцисс значение 2;

3) получить на графике точку с отмеченной абсциссой 2;

4) найти ординату полученной в п.3 точки.



Для любой другой функции задача нахождения значения функции по заданному значению аргумента решается аналогично.

А теперь вспомним, как решается обратная задача по нахождению значения аргумента при заданном значении функции. В нашем примере с линейной функцией $y=2x-7$ это происходит по следующему алгоритму: в формулу, задающую данную функцию подставляют заданное значение функции и решают полученное уравнение с переменной x. Например, при $y=-5 \Rightarrow 2x-7=-5 \Rightarrow x=1$.

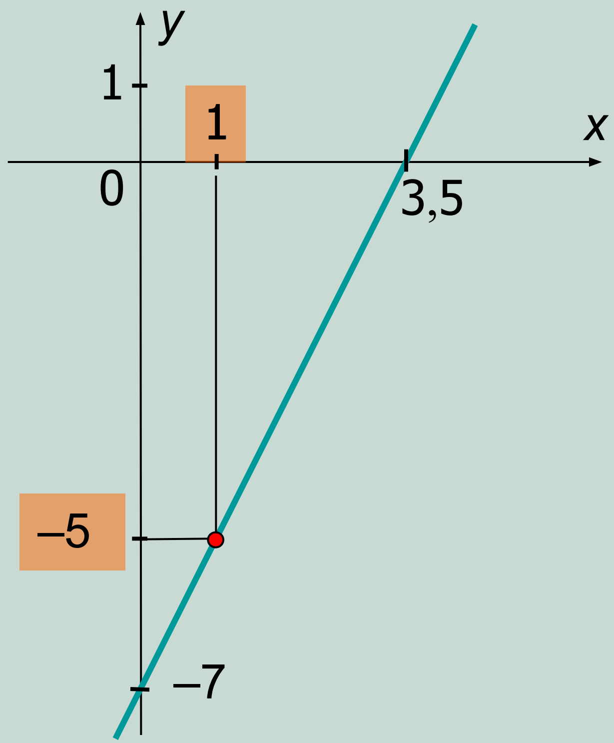
Эту же задачу можно выполнить графическим способом. Для этого нужно:

1) построить график данной функции;

2) отметить на оси ординат значение –5;

3) получить на графике точку с отмеченной ординатой –5;

4) найти абсциссу полученной в п.3 точки.



Для любой другой функции задача нахождения значения аргумента по заданному значению функции решается аналогично.

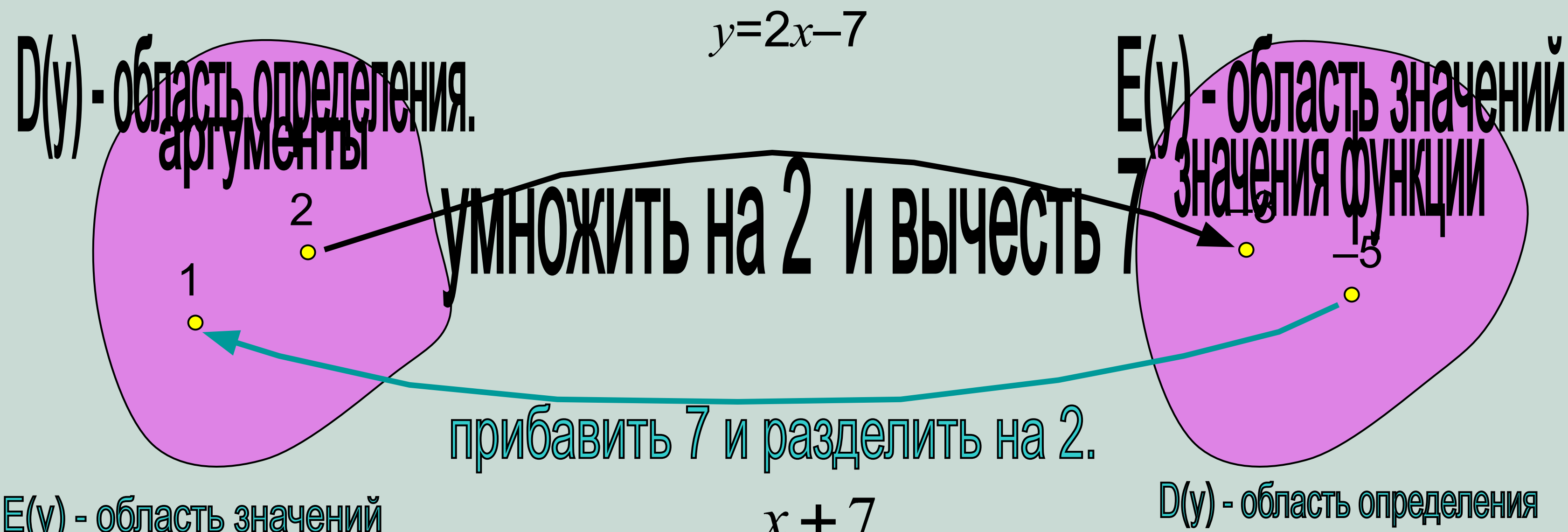
Однако, при решении обратной задачи можно поступить по-другому. Для этого составляют *обратную зависимость*, считая заданное значение данной функции аргументом этой зависимости. Сделать это можно двумя способами:

1) Выразить из формулы данной функции x через y. В нашем случае:

$y=2x-7 \Rightarrow 2x=y+7 \Rightarrow x=0{,}5y+3{,}5$. А теперь записать эту зависимость, как новую функцию, в привычном для нас виде: $y=0{,}5x+3{,}5$. **Или**

2) Поменять в формуле данной функции x и y. В нашем случае:

$y=2x-7 \Rightarrow x=2y-7$. А теперь записать эту зависимость, как новую функцию, в привычном для нас виде, выразив y через x : $2y=x+7 \Rightarrow y=0{,}5x+3{,}5$.



$$y=\frac{x+7}{2}$$

Таким образом, мы получили обратную для функции y=2x–7 зависимость, которая является в свою очередь также функцией y=0,5x+3,5. С помощью обратной функции мы можем решать обратную задачу по нахождению значения аргумента при заданном значении данной функции. Только для обратной функции это заданное значение функции является аргументом! Значит, для

$$y=x=-5 \Rightarrow y=0{,}5\cdot(-5)+3{,}5=1.$$

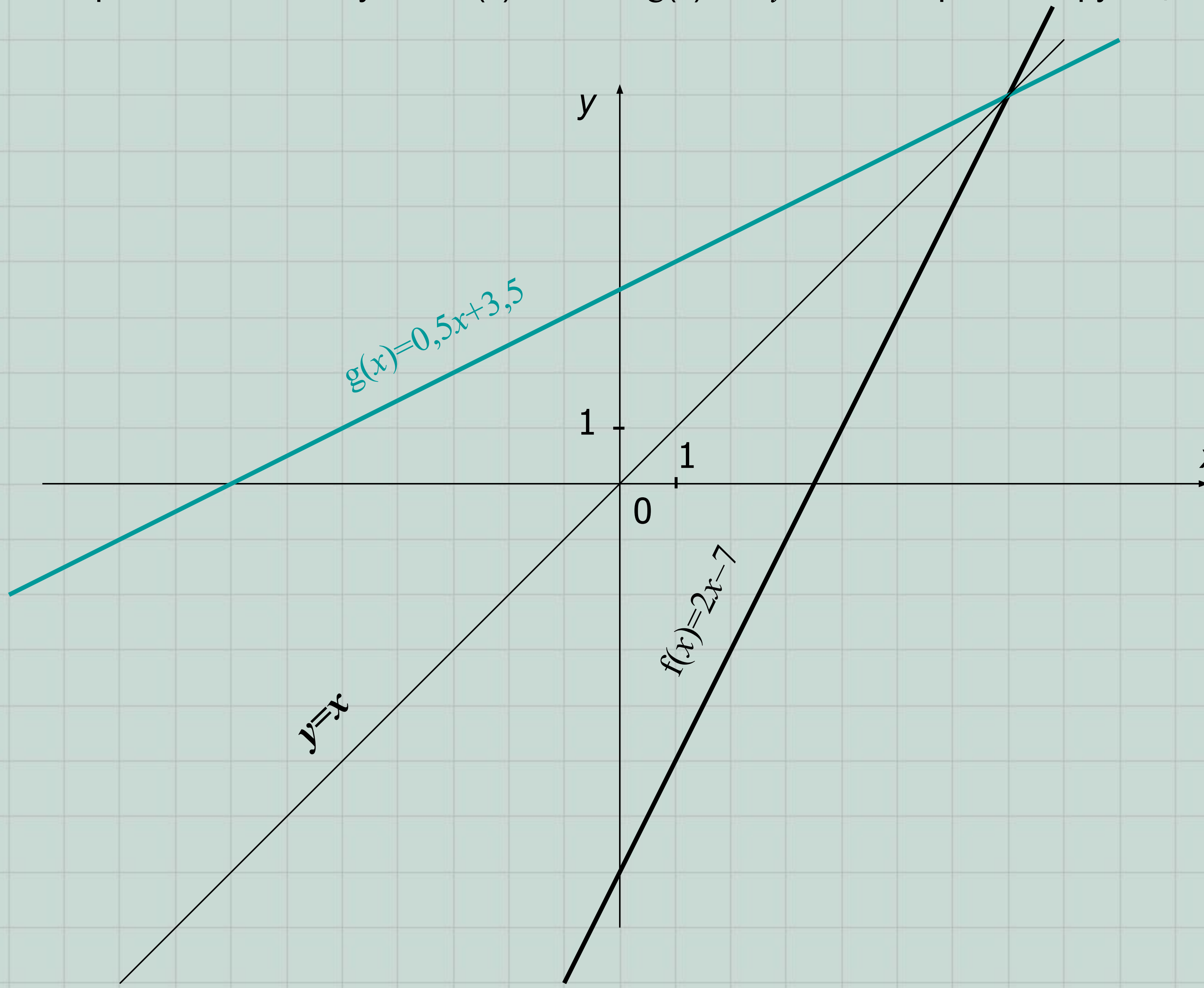
Примечание 1. Если для данной функции можно составить обратную зависимость, являющуюся также функцией, то говорят , что данная функция *обратима* и обратная зависимость является *обратной функцией*.

Примечание 2. Если функция y=f(x) является обратимой и y=g(x) – обратная для неё функция, то:

1) $D(\mathrm{f})=E(\mathrm{g})$ и $E(\mathrm{f})=D(\mathrm{g})$; 2) $\mathrm{f}(\mathrm{g}(x))=\mathrm{g}(\mathrm{f}(x))=x$.

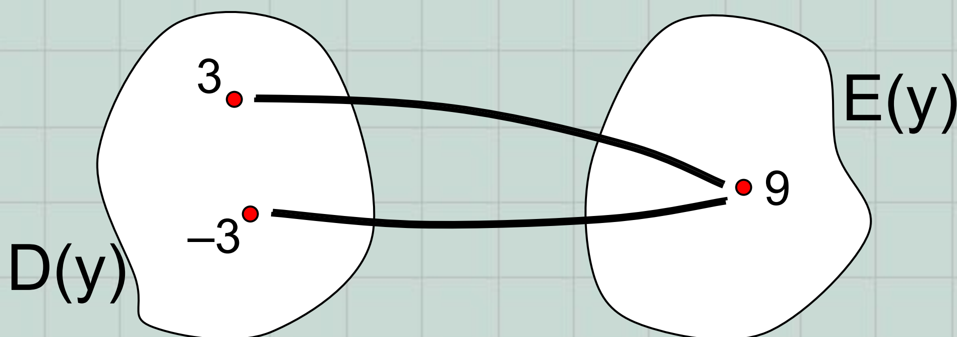
Примечание 3. Графики данной и обратной для неё функций симметричны относительно прямой y=x.

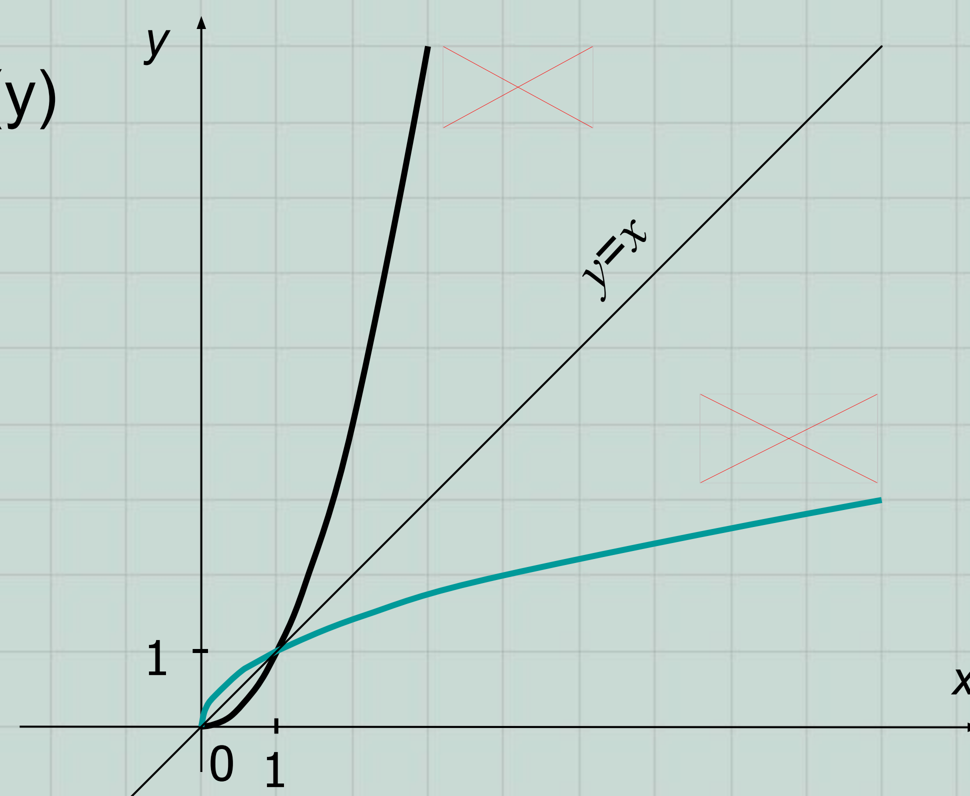
В рассмотренном нами случае: f(x)=2x–7 и g(x)=0,5y+3,5 – обратные функции.



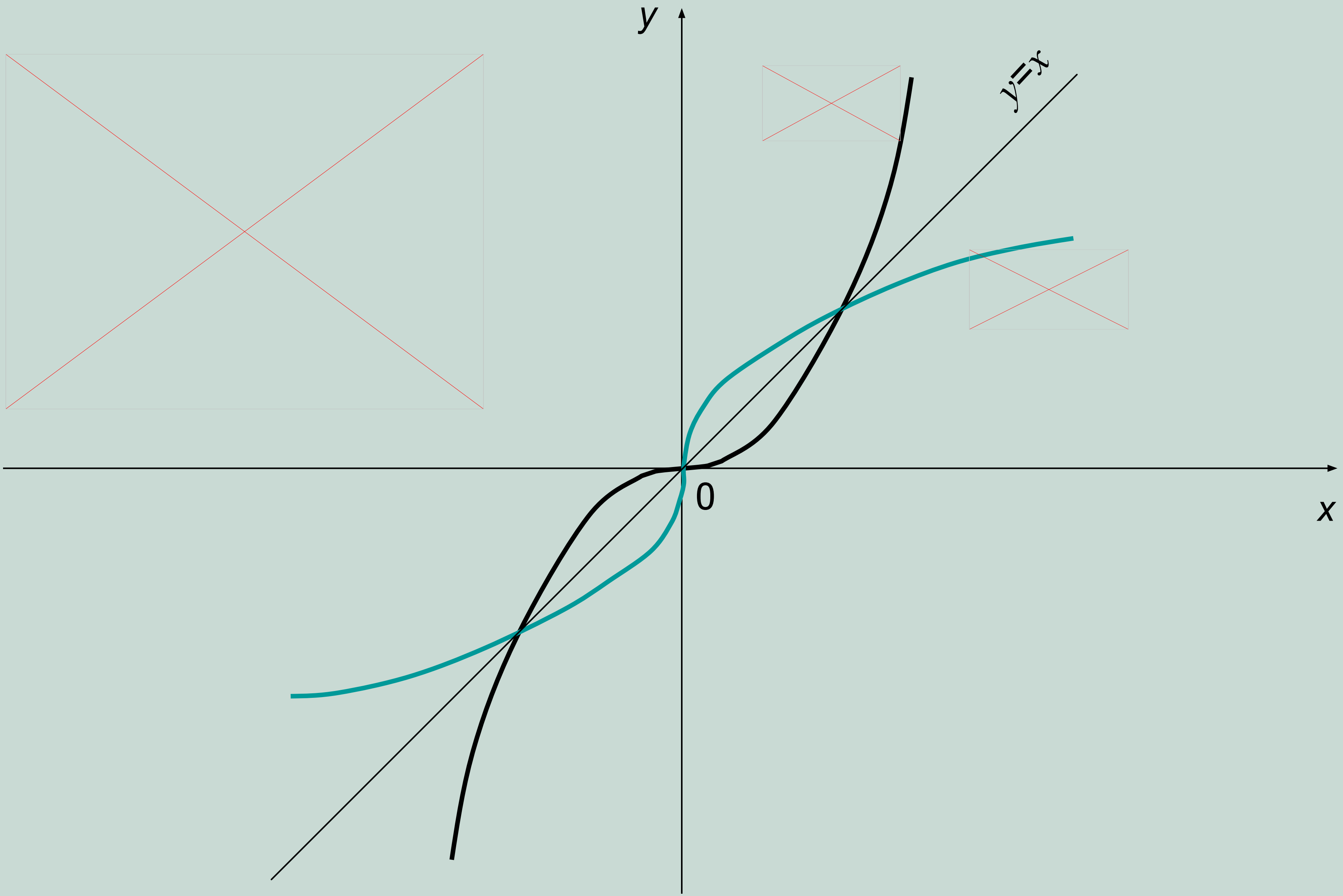
Чтобы обратная для данной функции зависимость была также функцией *необходимо и достаточно*, чтобы каждое свое значение функция принимала только при одном значении аргумента. Значит, чтобы функция была обратимой, данная функция должна быть *монотонно возрастающей* или *монотонно убывающей* на всей своей области определения.

Пример 1. Функция $y=x^2$ не является обратимой на $D(y)=$□, т.к. при $x=3$ или –3 функция принимает одно и то же значение 9, а значит, обратная зависимость функцией не является. Однако, на области x∈[0; +□) данная функция обратима и обратной для неё является знакомая Вам функция .





Пример 2. Любая степенная функция с нечетным натуральным показателем является обратимой (проверьте самостоятельно).



Рассмотрим теперь знакомую Вам тригонометрическую функцию $y=sinx$. На всей области определения ($x\in$□) она обратимой не является (самостоятельно объясните почему). Выберем ближайший к началу отсчета промежуток возрастания данной функции – отрезок . На данном промежутке функция обратима и обратной для неё является функция:

$$x = sin\, y.$$

Теперь перед нами стоит задача выразить эту зависимость в привычном для нас виде, т.е. y через x. Это можно сделать с помощью нового для Вас понятия – $arcsinx$, т.е.

Читают – «арксинус числа икс».

Определение. **Арксинусом** числа $x\in[-1;1]$ называется число $y\in$ (величина угла в радианной мере), синус которого равен x.

<u>Пример 1</u>. $sin(0,5\pi)=1$ □ $arcsin1=$.

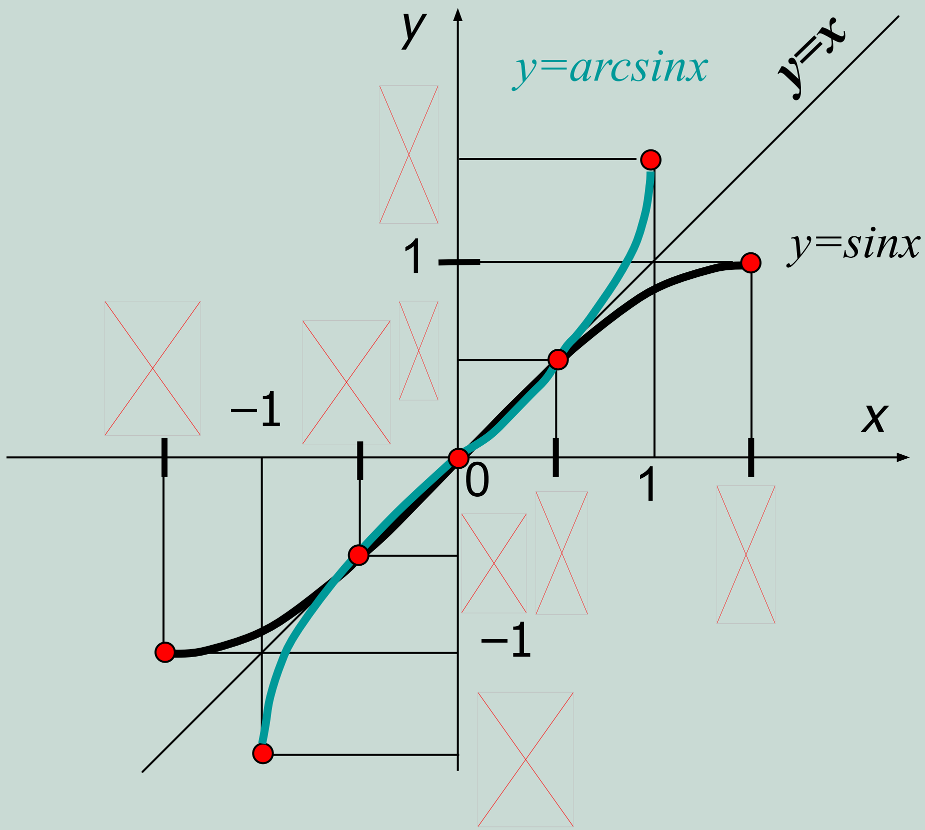
<u>Пример 2</u>. sin . Но записать тождественное равенство в виде $arcsin$ нельзя,

т.к. . Применив свойство $sinx=sin(\pi-x)$, получим:

А, значит,

А теперь ответьте на вопрос: синус какого угла равен 0,1?... Правильно: $arcsin0,1$.

Итак, если $D(sin)=$ и $E(sin)=[–1; 1]$, то $D(arcsin)=[–1; 1]$ и $E(arcsin)=$. К тому же, зная график функции $y=sinx$ и свойство графиков взаимно обратных функций, нетрудно получить график функции $y=arcsinx$.

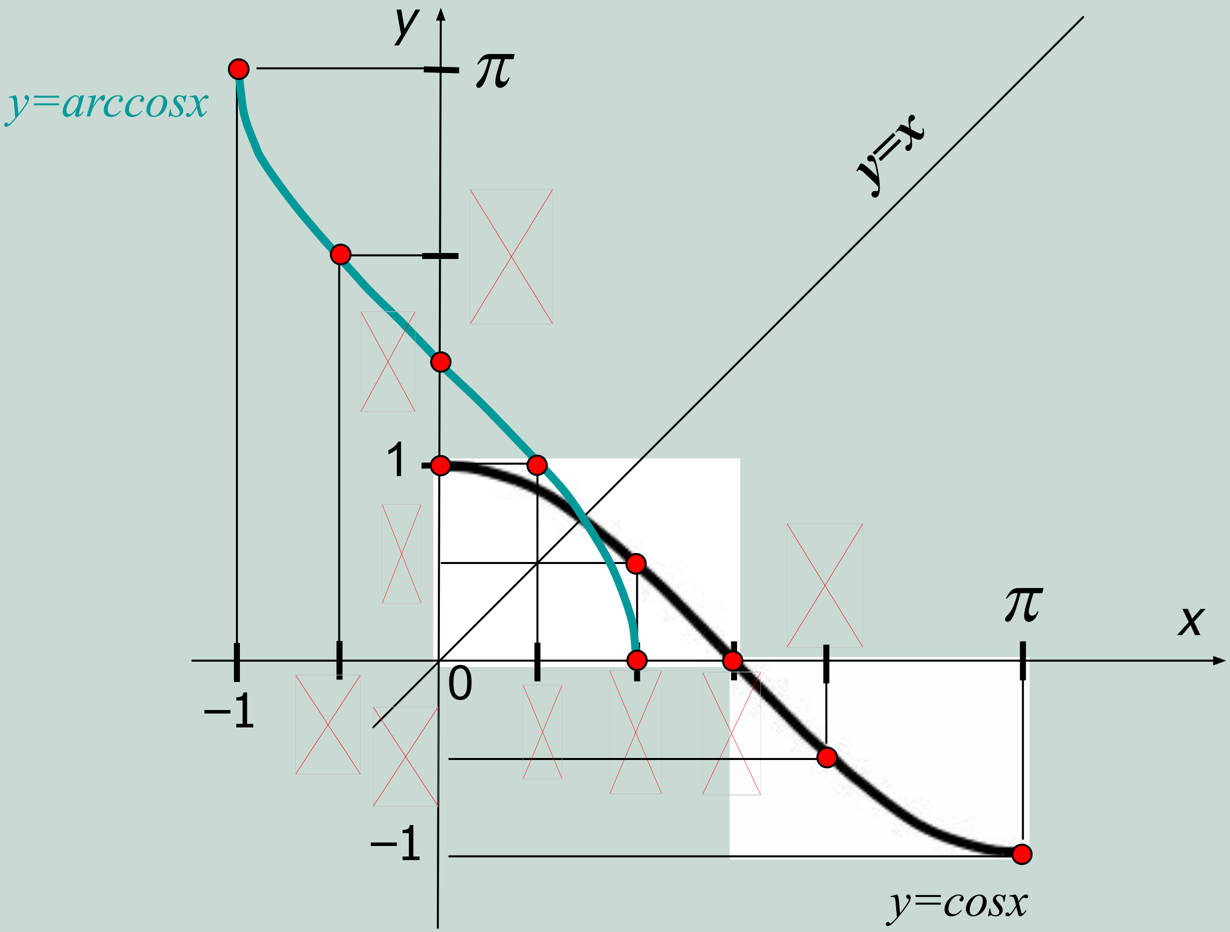


Из определения следует, что $sin(arcsiny)=y$ и $arcsin(sinx)=x,$ при y□[–1; 1], x□ .
Полезно вывести и запомнить также, что $arcsin(–a)= –arcsin(a)$.

Аналогично можно ввести понятие **арккосинуса** числа.

Определение. **Арккосинусом** числа $x\in[-1;1]$ называется число $y\in$ (величина угла в радианной мере), косинус которого равен x, т.е.

Примечание. Для значений функции арккосинус выбран отрезок , т.к. это ближайший к началу отсчета промежуток убывания функции косинус.



Из определения следует, что $\cos(\arccos y)=y$ и $\arccos(\cos x)=x,$ при $y \in [-1;1]$, $x \in [0;\pi]$

Полезно вывести и запомнить также, что $\arccos(-a)=\pi-\arccos(a)$.

Задание. Заполните предложенную таблицу:

a	1				0				–1
$arccosa$	0								π

Задание. Подумайте как обосновать (самостоятельно ☺ или с помощью учителя) следующие тождества: $\sin(\arccos a)=\sqrt{1-a^2}$;

$\cos(\arcsin a)=\sqrt{1-a^2}$; $\arcsin a+\arccos a=\frac{\pi}{2}$.

Дадим теперь определение двум оставшимся обратным тригонометрическим функциям $y=arctgx$ и $y=arcctgx$.

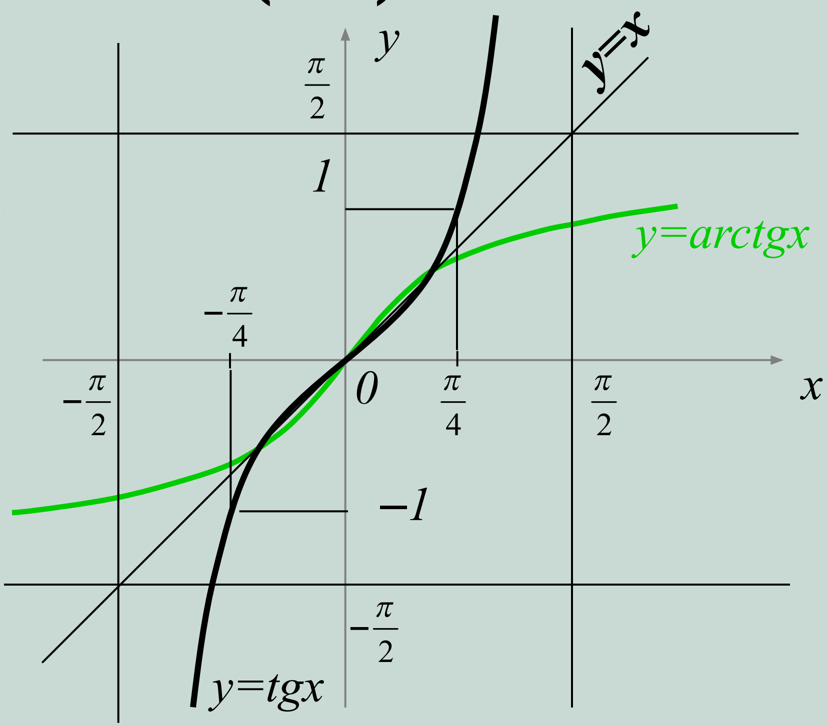
Определение. **Арктангенсом** числа $x \in$ □ называется число $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (величина угла в радианной мере), тангенс которого равен x, т.е.

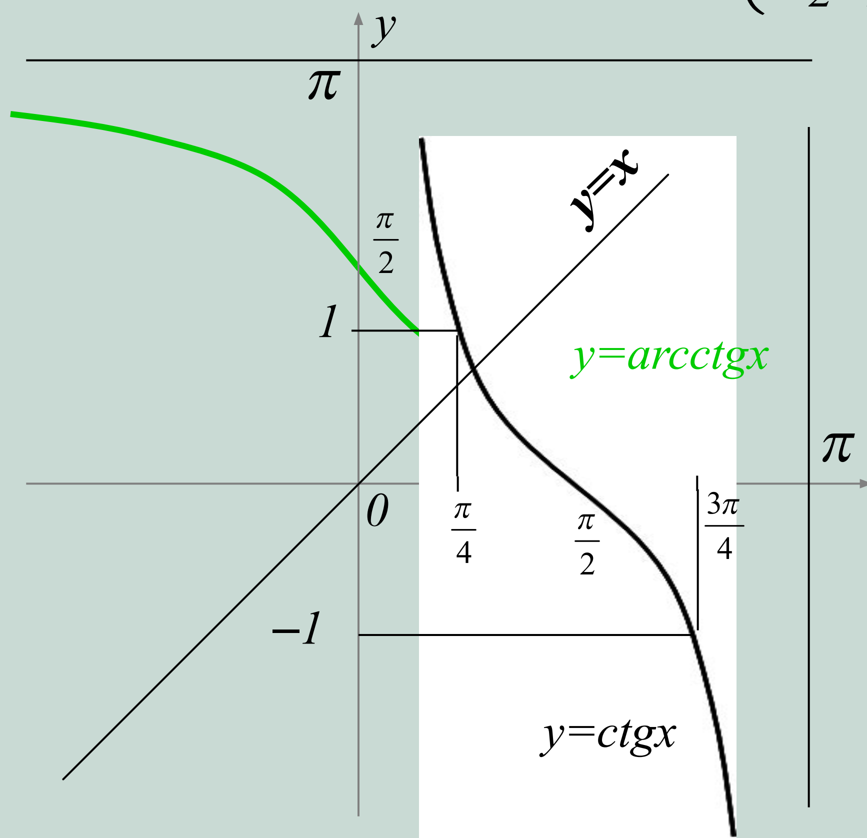
$$x = tgy \Leftrightarrow y = arc\,tgx.$$

Определение. **Арккотангенсом** числа $x \in$ □ называется число $y \in (0; \pi)$ (величина угла в радианной мере), котангенс которого равен x, т.е.

$$x = ctgy \Leftrightarrow y = arc\,ctgx.$$

Обязательно разберитесь, почему $D(arctg)=D(arcctg)=$□ и $E(arctg)=\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $E(arcctg)=(0; \pi)$!





Тригонометрические функции связаны между собой различными тригонометрическими формулами (например, $sin^2x+cos^2x=1$). Обратные тригонометрические функции также связаны друг с другом. Полезно вывести и помнить следующие тождества:

$$arctg(-a) = -arctga$$

$$arcctg(-a) = \pi - arcctga$$

$$\left.\begin{aligned} &arcsin\, a = arccos\sqrt{1-a^2} = arctg\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}; \\ &arc\,co\,s\, a = arcsin\sqrt{1-a^2} = arcctg\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}; \\ &arctga = arcctg\frac{1}{a} = arcsin\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}; \end{aligned}\right\} \text{при } a>0,$$

$$arcsin\, a + arccos\, a = \frac{\pi}{2} = arctga + arcctga.$$

Понятие об обратных тригонометрических функциях позволяет нам решать *тригонометрические уравнения и неравенства*. Но это уже тема нового урока!