

МБОУ СОШ № 37  
Туренко Екатерина  
Леонидовна  
г. Хабаровск

## ● Понятие касательной

### □ Задача о касательной

### □ Задача о скорости движения

### □ Общее определение производной

### □ Смысл производной

### □ Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

### □ Основные правила Дифференцирования функций

### □ Производная сложной функции

### □ Производная обратной функции

### □ Производная неявной функции

### □ Производная функции, заданной Производная

### □ функции заданной Производная функции,

### □ Теорема о параметризации функции и ее следствия

## ● Теорема Ролля

## ● Теорема Ферма

### □ Возрастание и убывание функции одной переменной

### □ Экстремум функции одной переменной

### □ Вогнутость и выпуклость графика функции. Точки перегиба

# Понятие касательной

**Определение:** Касательной к данной непрерывной кривой в данной ее точке  $M$  (точка касания) называется предельное положение секущей  $MM'$ , проходящей через точку  $M$ , когда вторая точка пересечения  $M'$  неограниченно приближается по кривой к первой.

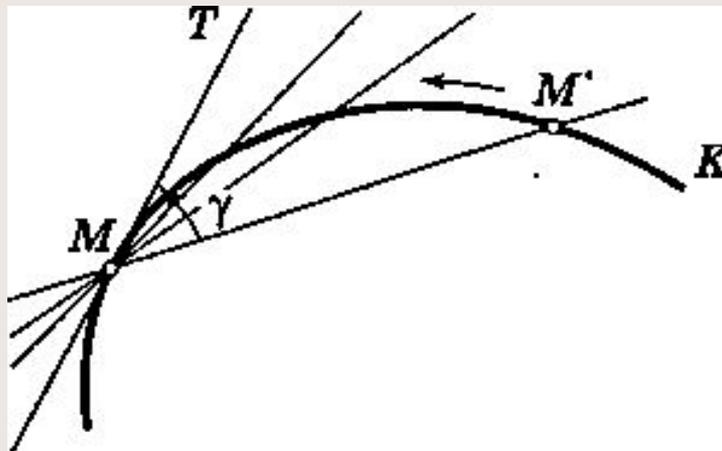


Рис. 1

# Задача о касательной

Зная уравнение непрерывной линии

$y = f(x)$ ,  
найти уравнение касательной в  
данной ее точке  $M(x, y)$ ,  
предполагая, что касательная  
существует.

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

$$\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$$

$$k = f'(x)$$

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$Y - y = k(X - x)$$

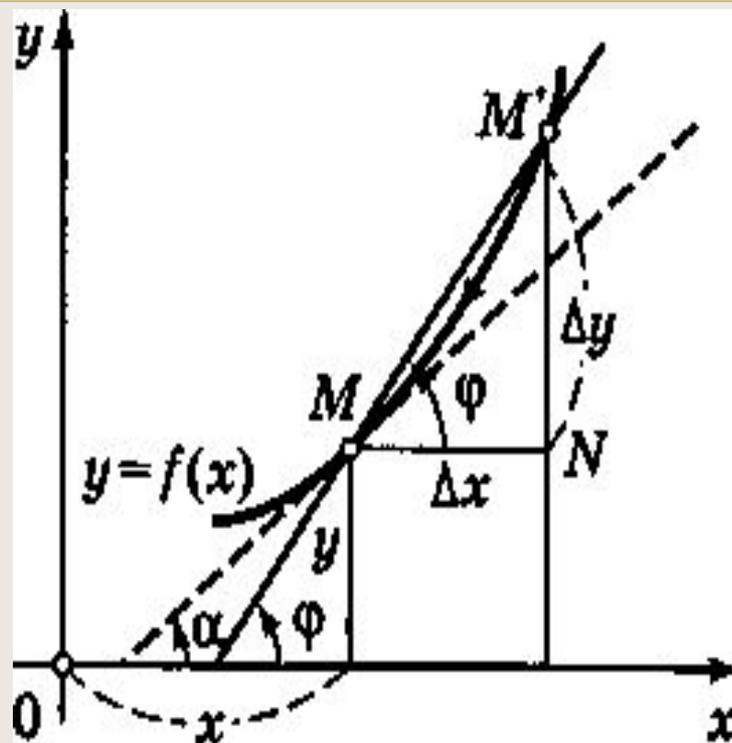


Рис. 2.

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

# Задача о скорости движения

- *Задача. Зная закон движения  $S=f(t)$ , найти скорость движущейся точки для любого момента времени.*

$$OM = x$$

$$t + \Delta t$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$OM' = x + \Delta x$$

$$x + x\Delta = f + \Delta t$$

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t)$$

$$v = f'(t)$$

# Общее определение производной

**Определение:**

Производной функции  $y = f(x)$  называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Найти производную функции  $y = x^2$

$$\Delta x \neq 0 \quad \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x * \Delta x + (\Delta x)^2 \quad (x^2)' = 2x$$

# Смысл производной

## Физический

Если функция описывает какой-либо физический процесс, то  $y = f(x)$  есть скорость протекания этого процесса.

Точка движется прямолинейно по закону  $S = t^2$ . Найти скорость движения в момент времени  $t=3$

$$y = kx + b$$

$$k = y'(x) = (x^2 + 1)' = 2x$$

$$k = 2 * 1 = 2$$

$$2 = 2 * 1 + b$$

## Геометрический

$f'(x) = k$  касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке, абсцисса которой равна  $x$ .

## Например

Уравнение касательной к кривой

$$y = x^2 + 1$$

в точке  $A(1;2)$

$$b = 0$$

$$y = 2x$$

# Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

---

Мы видели, что функция

$$y = f(x)$$

называется *непрерывной в точке  $x$* , если в этой точке

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

Функция называется *дифференцируемой в точке  $x$* , если в этой точке она имеет производную, т. е. если существует конечный предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

**Зависимость между  
непрерывностью и  
дифференцируемостью функции**  
**ТЕОРЕМА:**

*Если функция дифференцируема  
в некоторой точке, то в этой  
точке функция непрерывна.*

*Обратное утверждение неверно:  
непрерывная функция может не  
иметь производной.*

# Основные правила дифференцирования функций:

**I. Производная постоянной** величины равна нулю.

**II. Производная алгебраической суммы** конечного числа дифференцируемых функций равна такой же алгебраической сумме производных этих функций.

**III. Производная произведения** двух дифференцируемых функций равна произведению первого сомножителя на производную второго плюс произведение второго сомножителя на производную первого.

**IV. Производная частного.** Если числитель и знаменатель дроби — дифференцируемые функции и знаменатель не обращается в нуль, то производная дроби равна также дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя.

# Производная сложной функции

## ТЕОРЕМА:

Если  $y = f(z)$  и  $z = \varphi(x)$  — дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции  $y = f[\varphi(x)]$

существует и равна производной данной функции  $y$  по промежуточному аргументу  $z$ , умноженной на производную самого промежуточного аргумента  $z$  по независимой переменной  $x$ , т. е.

$$y'_x = y'_z z'_x$$

## Например

$$y = \ln(x^2 - 3x + 1) \qquad y = \ln \varphi \qquad \varphi = x^2 - 3x + 1$$

$$y'_x = y'_\varphi * \varphi'_x = \frac{1}{u} (2x - 3) \qquad \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1}$$

# Производная обратной функции

**ТЕОРЕМА.** Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.

Доказательство. Пусть  $y = f(x)$  Например  $y = \text{arctg } x$

$$\Delta y \neq 0 \quad y'_x = f'(x) \neq 0$$

$x = \text{tg } x$  обратная для  $y$

$$\Delta x \quad x = \varphi(y)$$

$$y'_x = \frac{1}{(\text{tgy})'}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \frac{\Delta y}{x}$$

$$\frac{\cos^2 y}{1}$$

$$\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$1 + \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}$$

$$1 + \text{ctg}^2 y$$

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

$$\frac{1}{1 + \text{tg}^2 x}$$

$$\frac{1}{1 + x^2}$$

# Производная неявной функции

**Определение:** Если  $y$  как функция от  $x$  задается соотношением  $F(x, y)=0$ , где  $F(x, y)$  - выражение, содержащее  $x$  и  $y$ , то  $y$  называется неявной функцией от  $x$ .

## Алгоритм нахождения производных заданных функций в неявном виде.

- 1) Находим производную от левой части равенства  $F(x, y)=0$ , рассматривая  $y$  как функцию от  $x$  и приравниваем ее к нулю.
- 2) Решаем полученное уравнение относительно  $y$ , в результате будем иметь выражение производной от неявной функции в виде  $y=f(x)$

**Пример.** Найти  $y'$   
 $x^3 y^2 + 5xy + 4$

$$(x^3 y^2)' + (5xy)' + 4'$$

$$(x^3)' y^2 + x^3 (y^2)' + (5x)' y + 5xy' + 0$$

$$3x^2 y^2 + x^3 2yy' + 5y + 5xy'$$

# Производная функции, заданной параметрически

## ТЕОРЕМА:

Если функция  $y$  от аргумента  $x$  задана параметрически

$$x = \varphi(t) \quad \text{и} \quad y = \psi(t)$$

где функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$

дифференцируемы и  $\varphi'(t) \neq 0$ , то производная

этой функции есть  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ ,

Например

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

$$x'_t = 2t$$

$$y'_t = 3t^2$$

$$y'_x = y'_t : x'_t = 3t^2 : 2t = \frac{3}{2}t$$

# Понятие о производных высших порядков

Производная  $f'(x)$  от функции  $f(x)$  называется производной первого порядка и представляет собой некоторую новую функцию. Может случиться, что эта функция сама имеет производную. Тогда производная от производной первого порядка называется производной второго порядка или второй производной и обозначается так:  $f''(x)$ .

Итак,

$$f''(x) = [f'(x)]'$$

$$f'''(x) = [f''(x)]'$$

## Пример

1) Пусть  $y = \sin x$

Тогда имеем последовательно

$$y' = \cos x, y'' = -\sin x, y''' = -\cos x, y^{IV} = \sin x, \dots$$

2) Пусть  $y(x) = 4x^3 + 2 \cos x$

Найти:  $y'''$

$$y' = 12x^2 - 2 \sin x$$

$$y'' = 24x - 2 \cos x$$

$$y''' = -24x + 2 \sin x$$

# Теорема о конечном приращении функции и ее следствия

## ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА:

Конечное приращение дифференцируемой функции равно соответствующему приращению аргумента, умноженному на значение ее производной в некоторой промежуточной точке, т. е. если  $f(x)$  есть дифференцируемая функция на некотором промежутке  $\langle a, b \rangle$  и  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) — любые значения из этого промежутка, то

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$$

где  $x_1 < \xi < x_2$ .

**Доказательство:**  $y = f(x)$

$$A(x_1, f(x_1))$$

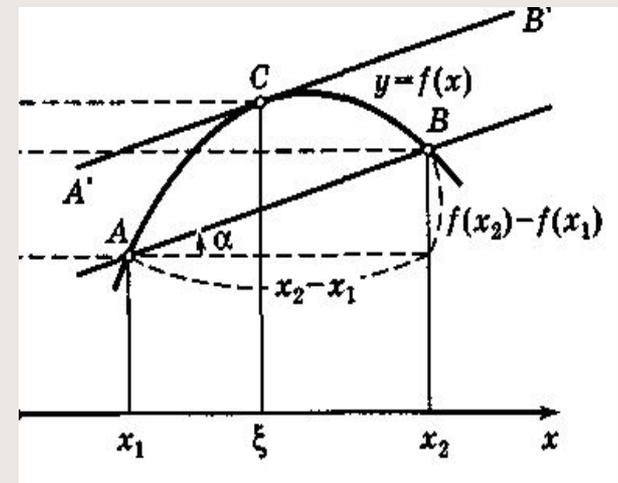
$$B(x_2, f(x_2))$$

$$C(\xi, f(\xi))$$

$$x_1 < \xi < x_2.$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$$



# ТЕОРЕМА РОЛЛЯ:

*Между двумя последовательными корнями дифференцируемой функции всегда содержится, по меньшей мере, один корень ее производной.*

**Доказательство:** В самом деле, если  $f(x)$  — дифференцируемая функция и  $f(x_1) = f(x_2) = 0$  ( $x_1 < x_2$ )

то из формулы имеем  $(x_2 - x_1)f'(\xi) = 0$

или, так как,  $x_2 \neq x_1$

$$f'(\xi) = 0, \text{ где } x_1 < \xi < x_2$$

# ТЕОРЕМА ФЕРМА:

Если функция  $y=f(x)$  определена и непрерывна на  $(a, b)$  и пусть эта функция принимает  $\max$  во внутренней точке  $x_0$  этого интервала, тогда если существует  $f'(x_0)$ , то  $f'(x_0) = 0$

**Доказательство:** Пусть в точке  $x_0$  функция  $y = f(x)$  принимает  $\max$  значение для любых  $x \in (a, b)$ ,  $x_0 \in ]a, b[ \Rightarrow$  для любых,  $x \in ]a, b[ f(x) < f(x_0), x \neq x_0$

следовательно

$$f(x) - f(x_0) < 0, \text{ для любых } x \neq x_0$$

Существует функция  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{ т.е. } f'(x) \leq 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad f'(x) \geq 0 \text{ Следовательно, } f'(x_0) = 0$$

# Возрастание и убывание функции одной переменной

## ТЕОРЕМА 1: (Необходимый признак возрастания функции)

1) Если дифференцируемая функция возрастает в некотором промежутке, то производная этой функции неотрицательна в этом промежутке.

### Доказательств

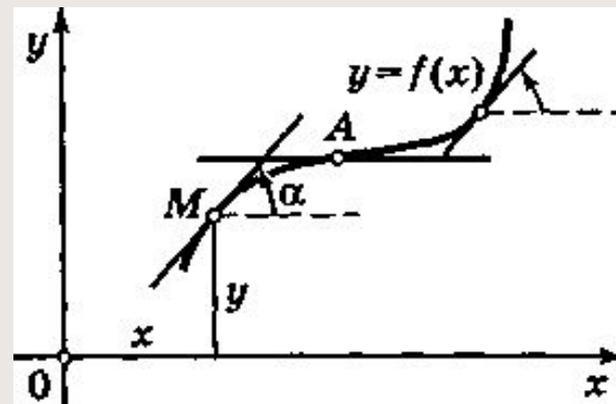
1) Пусть дифференцируемая функция  $f(x)$  возрастает в промежутке  $(a,b)$ . Согласно определению производной,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$$

$$f'(x) \geq 0$$



## ТЕОРЕМА 2: (Необходимый признак убывания функции)

*Если дифференцируемая функция убывает в некотором промежутке, то ее производная неположительна в этом промежутке.*

### Доказательств

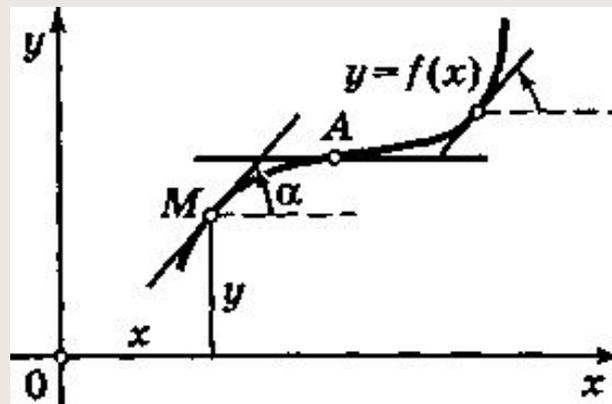
Пусть дифференцируемая функция  $f(x)$  убывает в промежутке  $(a,b)$ . Согласно определению производной,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0$$

$$f'(x) \leq 0$$



# ТЕОРЕМА: Достаточный признак возрастания функции

1) Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка, то функция возрастает на этом промежутке.

## Доказательств

**во:** 1) Пусть, например, дифференцируемая функция  $f(x)$  такова, что  $f'(x) > 0$  при  $a < x < b$

Для любых двух значений  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , принадлежащих промежутку  $(a, b)$ , в силу теоремы о конечном приращении функции имеем

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

где  $\xi$  — промежуточное значение между  $x_1$  и  $x_2$  и, следовательно, лежащее внутри промежутка  $(a, b)$ .

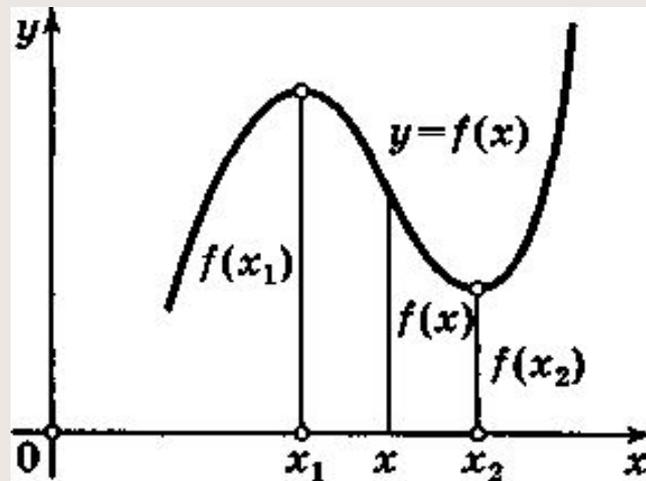
Так как  $x_2 - x_1 > 0$  и  $f(x_2) - f(x_1) > 0$  то отсюда получим

$$f'(\xi) > 0$$

Следовательно, функция  $f(x)$  возрастет на промежутке  $(a, b)$ .

# Экстремум функции одной переменной

**Определение:** Максимум или минимум функции называется *экстремумом функции*, а те значения аргумента, при которых достигаются экстремумы функции, называются *точками экстремума функции* (соответственно: *точками максимума* или *точками минимума функции*).



# НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ

**ТЕОРЕМА.** *В точке экстремума (двустороннего) дифференцируемой функции производная ее равна нулю.*

**Доказательство.** Пусть, для определенности,  $x_0$  есть точка минимума функции  $f(x)$ .

$$f(x_0 + \Delta x_0) > f(x_0) \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x_0} > 0 \quad f'(x_0) \geq 0, \quad \Delta x_0 > 0$$
$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x_0} < 0 \quad f'(x_0) \leq 0, \quad \Delta x_0 < 0$$
$$f'(x_0) = 0$$

# ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ

ТЕОРЕМА: Если дифференцируемая функция  $f(x)$  такова, что для некоторого значения  $x_0$  ее аргумента  $x$  производная  $f'(x)$  равна нулю и меняет свой знак при переходе через это значение, то число является экстремумом функции  $f(x)$ , причем:

1) функция  $f(x)$  имеет максимум при  $x = x_0$ , если изменение знака производной  $f'(x)$  происходит с плюса на минус;

2) функция  $f(x)$  имеет минимум при  $x = x_0$ , если изменение знака производной  $f'(x)$  происходит с минуса на плюс.

**Доказательство.** Пусть  $f(x_0) = 0$ ,  $f'(x) > 0$  при  $x_0 - \xi < x < x_0$   
 $f'(x) < 0$  при  $x_0 < x < x_0 + \xi$        $f(x_0) > f(x)$        $x < x_0$

$[x_0 - \xi, x_0]$      $[x_0, x_0 + \xi]$        $f(x_0) > f(x)$        $x > x_0$

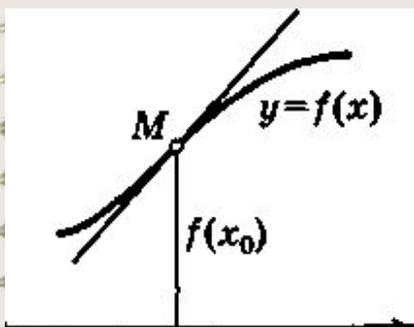
# Вогнутость и выпуклость графика функции. Точки перегиба

**Определение:** График дифференцируемой функции  $y = f(x)$  называется вогнутым вверх (или выпуклым вниз) в промежутке  $(a, b)$ , если соответствующая часть кривой

$$y = f(x) (x \in \langle a, b \rangle)$$

расположена выше касательной, проведенной в любой ее точке  $M(x, f(x))$ .

Аналогично, график дифференцируемой функции  $y = f(x)$  называется выпуклым вверх (или вогнутым вниз) в промежутке  $(a, b)$ , если соответствующая часть кривой расположена ниже касательной, проведенной к любой ее точке  $M(x, f(x))$



**Определен  
ие:**

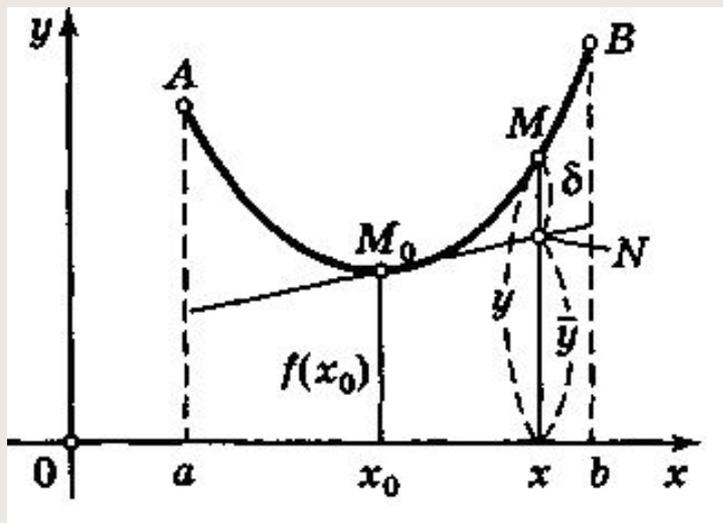
Точкой перегиба графика дифференцируемой функции  $y = f(x)$  называется его точка, при переходе через которую кривая меняет свою вогнутость на выпуклость или наоборот

# ТЕОРЕМА:

Если для дважды дифференцируемой функции  $y = f(x)$  вторая ее производная  $f''(x)$  положительна внутри промежутка  $(a, b)$ , то график этой функции вогнут вверх в данном промежутке.

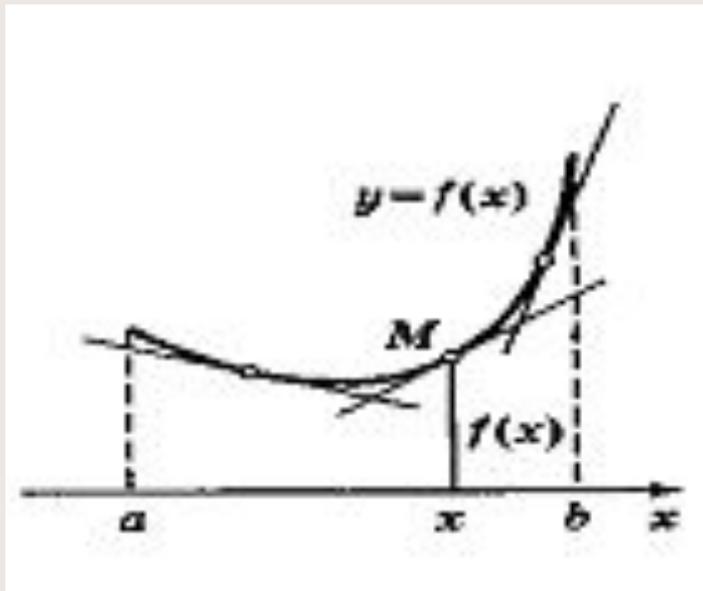
**Доказательство:**

Пусть  $f''(x) > 0$  при  $a < x < b$ ,  $x_0$  — любая точка промежутка  $(a, b)$ . Сравним в точке  $x$  ординату  $y$  кривой  $y = f(x)$  ординатой  $y$  ее касательной  $MoN$ , проведенной в точке



# Достаточные условия вогнутости (выпуклости) графика функции.

**Теорема:** Если же вторая производная  $f''(x)$  отрицательна внутри промежутка  $(a, b)$ , то график функции  $y = f(x)$  вогнут вниз в этом промежутке.



## Доказательство

Аналогично доказывается, что если  $f''(x) < 0$  при  $a < x < b$ , то график функции  $y = f(x)$  вогнут вниз на промежутке  $(a, b)$ .