

МБОУ СОШ № 37
Туренко Екатерина
Леонидовна
г. Хабаровск

● Понятие касательной

□ Задача о касательной

□ Задача о скорости движения

□ Общее определение производной

□ Смысл производной

□ Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

□ Основные правила Дифференцирования функций

□ Производная сложной функции

□ Производная обратной функции

□ Производная неявной функции

□ Производная функции, заданной Производная

□ функции заданной Производная функции,

□ Теорема о параметризации функции и ее следствия

● Теорема Ролля

● Теорема Ферма

□ Возрастание и убывание функции одной переменной

□ Экстремум функции одной переменной

□ Вогнутость и выпуклость графика функции. Точки перегиба

Понятие касательной

Определение: Касательной к данной непрерывной кривой в данной ее точке M (точка касания) называется предельное положение секущей MM' , проходящей через точку M , когда вторая точка пересечения M' неограниченно приближается по кривой к первой.

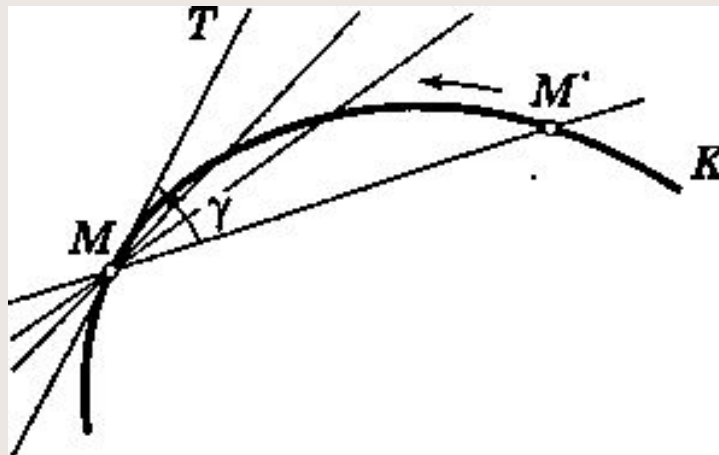


Рис. 1

Задача о касательной

Зная уравнение непрерывной линии

$y = f(x)$,
найти уравнение касательной в
данной ее точке $M(x, y)$,
предполагая, что касательная
существует.

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

$$\operatorname{tg} \varphi \rightarrow \operatorname{tg} \alpha$$

$$k = f'(x)$$

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$Y - y = k(X - x)$$

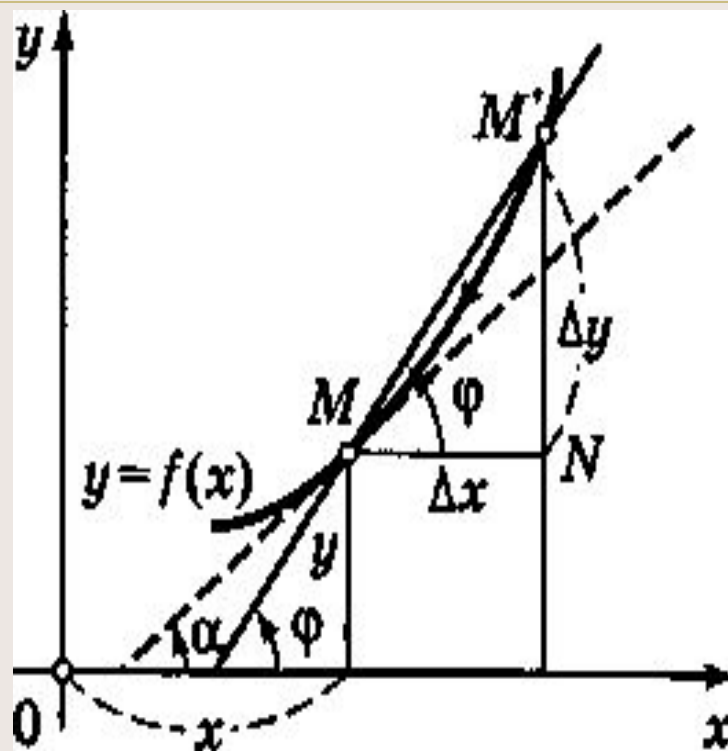


Рис. 2.

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

Задача о скорости движения

- *Задача. Зная закон движения $S=f(t)$, найти скорость движущейся точки для любого момента времени.*

$$OM = x$$

$$t + \Delta t$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$OM' = x + \Delta x$$

$$x + x\Delta = f + \Delta t$$

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t)$$

$$v = f'(t)$$

Общее определение производной

Определение:

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Найти производную функции $y = x^2$

$$\Delta x \neq 0 \quad \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x * \Delta x + (\Delta x)^2 \quad (x^2)' = 2x$$

Смысл производной

Физический

Если функция описывает какой-либо физический процесс, то $y = f(x)$ есть скорость протекания этого процесса.

Точка движется прямолинейно по закону $S = t^2$. Найти скорость движения в момент времени $t=3$

$$y = kx + b$$

$$k = y'(x) = (x^2 + 1)' = 2x$$

$$k = 2 * 1 = 2$$

$$2 = 2 * 1 + b$$

Геометрический

$f'(x) = k$ касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой равна x .

Например

Уравнение касательной к кривой

$$y = x^2 + 1$$

в точке $A(1;2)$

$$b = 0$$

$$y = 2x$$

Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Мы видели, что функция

$$y = f(x)$$

называется *непрерывной в точке x* , если в этой точке

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

Функция называется *дифференцируемой в точке x* , если в этой точке она имеет производную, т. е. если существует конечный предел:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

**Зависимость между
непрерывностью и
дифференцируемостью функции**

ТЕОРЕМА:

*Если функция дифференцируема
в некоторой точке, то в этой
точке функция непрерывна.*

*Обратное утверждение неверно:
непрерывная функция может не
иметь производной.*

Основные правила дифференцирования функций:

I. Производная постоянной величины равна нулю.

II. Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна такой же алгебраической сумме производных этих функций.

III. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению первого сомножителя на производную второго плюс произведение второго сомножителя на производную первого.

IV. Производная частного. Если числитель и знаменатель дроби — дифференцируемые функции и знаменатель не обращается в нуль, то производная дроби равна также дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя.

Производная сложной функции

ТЕОРЕМА:

Если $y = f(z)$ и $z = \varphi(x)$ — дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции $y = f[\varphi(x)]$

существует и равна производной данной функции y по промежуточному аргументу z , умноженной на производную самого промежуточного аргумента z по независимой переменной x , т. е.

$$y'_x = y'_z z'_x$$

Например

$$y = \ln(x^2 - 3x + 1) \qquad y = \ln \varphi \qquad \varphi = x^2 - 3x + 1$$

$$y'_x = y'_\varphi * \varphi'_x = \frac{1}{u} (2x - 3) \qquad \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1}$$

Производная обратной функции

ТЕОРЕМА. Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ Например $y = \operatorname{arctg} x$

$$\Delta y \neq 0 \quad y'_x = f'(x) \neq 0$$

$$\Delta x \quad x = \varphi(y)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \frac{\Delta y}{x}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

$$x = \operatorname{tg} x \text{ обратная для } y$$

$$y'_x = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\cos^2 y}{1 + \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}} = \frac{\cos^2 y}{\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\sin^2 y}} = \frac{\cos^2 y \sin^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{\cos^2 y}{1 + \operatorname{ctg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Производная неявной функции

Определение: Если y как функция от x задается соотношением $F(x, y)=0$, где $F(x, y)$ - выражение, содержащее x и y , то y называется неявной функцией от x .

Алгоритм нахождения производных заданных функций в неявном виде.

- 1) Находим производную от левой части равенства $F(x, y)=0$, рассматривая y как функцию от x и приравниваем ее к нулю.
- 2) Решаем полученное уравнение относительно y , в результате будем иметь выражение производной от неявной функции в виде $y=f(x)$

Пример. Найти y'
 $x^3 y^2 + 5xy + 4$

$$(x^3 y^2)' + (5xy)' + 4'$$

$$(x^3)' y^2 + x^3 (y^2)' + (5x)' y + 5xy' + 0$$

$$3x^2 y^2 + x^3 2yy' + 5y + 5xy'$$

Производная функции, заданной параметрически

ТЕОРЕМА:

Если функция y от аргумента x задана параметрически

$$x = \varphi(t) \quad \text{и} \quad y = \psi(t)$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$

дифференцируемы и $\varphi'(t) \neq 0$, то производная

этой функции есть $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$,

Например

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$$

$$x'_t = 2t$$

$$y'_t = 3t^2$$

$$y'_x = y'_t : x'_t = 3t^2 : 2t = \frac{3}{2}t$$

Понятие о производных высших порядков

Производная $f'(x)$ от функции $f(x)$ называется производной первого порядка и представляет собой некоторую новую функцию. Может случиться, что эта функция сама имеет производную. Тогда производная от производной первого порядка называется производной второго порядка или второй производной и обозначается так: $f''(x)$.

Итак,

$$f''(x) = [f'(x)]'$$
$$f'''(x) = [f''(x)]'$$

Пример

1) Пусть $y = \sin x$

Тогда имеем последовательно

$$y' = \cos x, y'' = -\sin x, y''' = -\cos x, y^{IV} = \sin x, \dots$$

2) Пусть $y(x) = 4x^3 + 2 \cos x$

Найти: y'''

$$y' = 12x^2 - 2 \sin x$$

$$y'' = 24x - 2 \cos x$$

$$y''' = -24x + 2 \sin x$$

Теорема о конечном приращении функции и ее следствия

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА:

Конечное приращение дифференцируемой функции равно соответствующему приращению аргумента, умноженному на значение ее производной в некоторой промежуточной точке, т. е. если $f(x)$ есть дифференцируемая функция на некотором промежутке $\langle a, b \rangle$ и x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) — любые значения из этого промежутка, то

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$$

где $x_1 < \xi < x_2$.

Доказательство: $y = f(x)$

$$A(x_1, f(x_1))$$

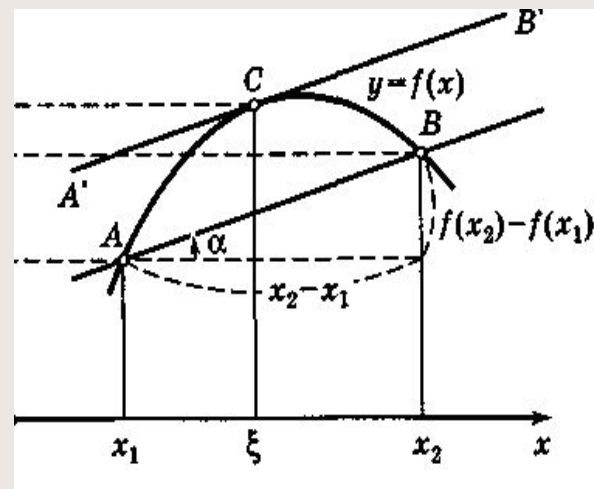
$$B(x_2, f(x_2))$$

$$C(\xi, f(\xi))$$

$$x_1 < \xi < x_2.$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$$



ТЕОРЕМА РОЛЛЯ:

Между двумя последовательными корнями дифференцируемой функции всегда содержится, по меньшей мере, один корень ее производной.

Доказательство: В самом деле, если $f(x)$ — дифференцируемая функция и $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ($x_1 < x_2$)

то из формулы имеем $(x_2 - x_1)f'(\xi) = 0$

или, так как, $x_2 \neq x_1$

$$f'(\xi) = 0, \text{ где } x_1 < \xi < x_2$$

ТЕОРЕМА ФЕРМА:

Если функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на (a, b) и пусть эта функция принимает \max во внутренней точке x_0 этого интервала, тогда если существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$

Доказательство: Пусть в точке x_0 функция $y = f(x)$ принимает \max значение для любых $x \in (a, b)$, $x_0 \in]a, b[\Rightarrow$ для любых, $x \in]a, b[f(x) < f(x_0), x \neq x_0$

следовательно

$$f(x) - f(x_0) < 0, \text{ для любых } x \neq x_0$$

Существует функция $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{ т.е. } f'(x) \leq 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad f'(x) \geq 0 \text{ Следовательно, } f'(x_0) = 0$$

Возрастание и убывание функции одной переменной

ТЕОРЕМА 1: (Необходимый признак возрастания функции)

1) Если дифференцируемая функция возрастает в некотором промежутке, то производная этой функции неотрицательна в этом промежутке.

Доказательств

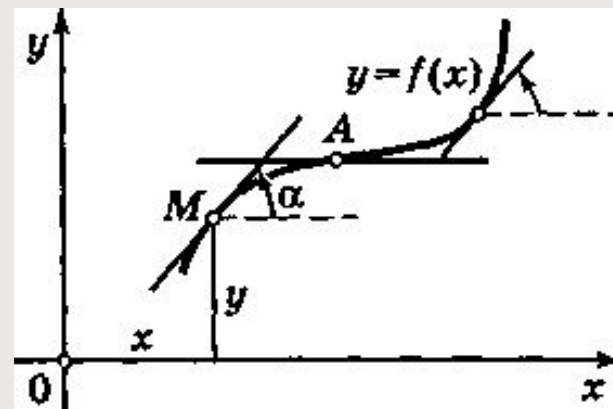
1) Пусть дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает в промежутке (a,b) . Согласно определению производной,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$$

$$f'(x) \geq 0$$



ТЕОРЕМА 2: (Необходимый признак убывания функции)

Если дифференцируемая функция убывает в некотором промежутке, то ее производная неположительна в этом промежутке.

Доказательств

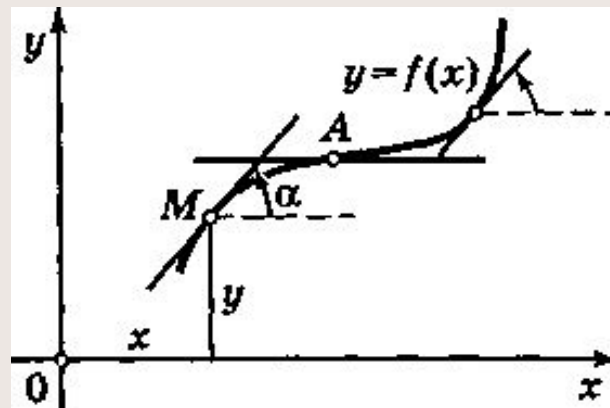
Пусть дифференцируемая функция $f(x)$ убывает в промежутке (a,b) . Согласно определению производной,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0$$

$$f'(x) \leq 0$$



ТЕОРЕМА: Достаточный признак возрастания функции

1) Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка, то функция возрастает на этом промежутке.

Доказательств

во: 1) Пусть, например, дифференцируемая функция $f(x)$ такова, что $f'(x) > 0$ при $a < x < b$

Для любых двух значений $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, принадлежащих промежутку (a, b) , в силу теоремы о конечном приращении функции имеем

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

где ξ — промежуточное значение между x_1 и x_2 и, следовательно, лежащее внутри промежутка (a, b) .

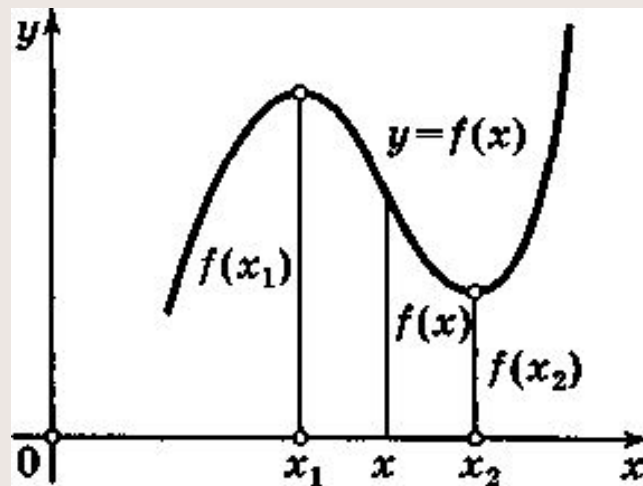
Так как $x_2 - x_1 > 0$ и $f(x_2) - f(x_1) > 0$ то отсюда получим

$$f'(\xi) > 0$$

Следовательно, функция $f(x)$ возрастет на промежутке (a, b) .

Экстремум функции одной переменной

Определение: Максимум или минимум функции называется *экстремумом функции*, а те значения аргумента, при которых достигаются экстремумы функции, называются *точками экстремума функции* (соответственно: *точками максимума* или *точками минимума функции*).



НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ

ТЕОРЕМА. *В точке экстремума (двустороннего) дифференцируемой функции производная ее равна нулю.*

Доказательство. Пусть, для определенности, x_0 есть точка минимума функции $f(x)$.

$$f(x_0 + \Delta x_0) > f(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$$

$$f'(x_0) \geq 0, \quad \Delta x_0 > 0$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$$

$$f'(x_0) \leq 0, \quad \Delta x_0 < 0$$

$$f'(x_0) = 0$$

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ

ТЕОРЕМА: Если дифференцируемая функция $f(x)$ такова, что для некоторого значения x_0 ее аргумента x производная $f'(x)$ равна нулю и меняет свой знак при переходе через это значение, то число является экстремумом функции $f(x)$, причем:

1) функция $f(x)$ имеет максимум при $x = x_0$, если изменение знака производной $f'(x)$ происходит с плюса на минус;

2) функция $f(x)$ имеет минимум при $x = x_0$, если изменение знака производной $f'(x)$ происходит с минуса на плюс.

Доказательство. Пусть $f(x_0) = 0$, $f'(x) > 0$ при $x_0 - \xi < x < x_0$
 $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \xi$ $f(x_0) > f(x)$ $x < x_0$

$[x_0 - \xi, x_0]$ $[x_0, x_0 + \xi]$ $f(x_0) > f(x)$ $x > x_0$

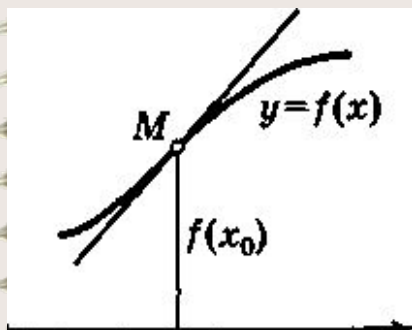
Вогнутость и выпуклость графика функции. Точки перегиба

Определение: График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется вогнутым вверх (или выпуклым вниз) в промежутке (a, b) , если соответствующая часть кривой

$$y = f(x) (x \in \langle a, b \rangle)$$

расположена выше касательной, проведенной в любой ее точке $M(x, f(x))$.

Аналогично, график дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется выпуклым вверх (или вогнутым вниз) в промежутке (a, b) , если соответствующая часть кривой расположена ниже касательной, проведенной к любой ее точке $M(x, f(x))$



**Определен
ие:**

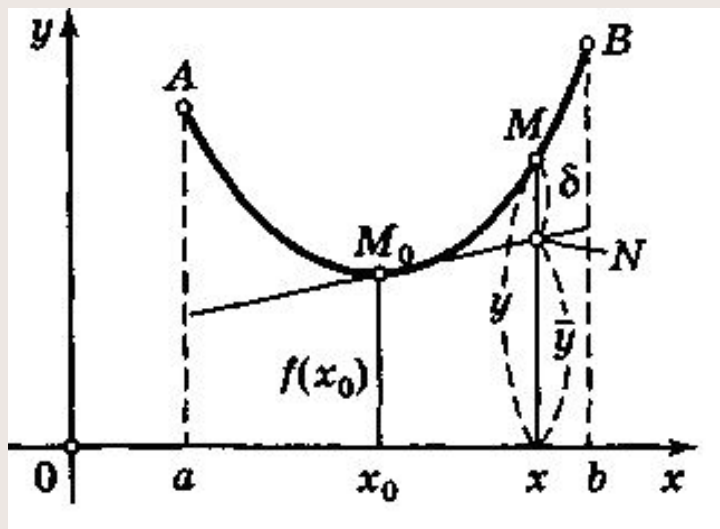
Точкой перегиба графика дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется его точка, при переходе через которую кривая меняет свою вогнутость на выпуклость или наоборот

ТЕОРЕМА:

Если для дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ вторая ее производная $f''(x)$ положительна внутри промежутка (a, b) , то график этой функции вогнут вверх в данном промежутке.

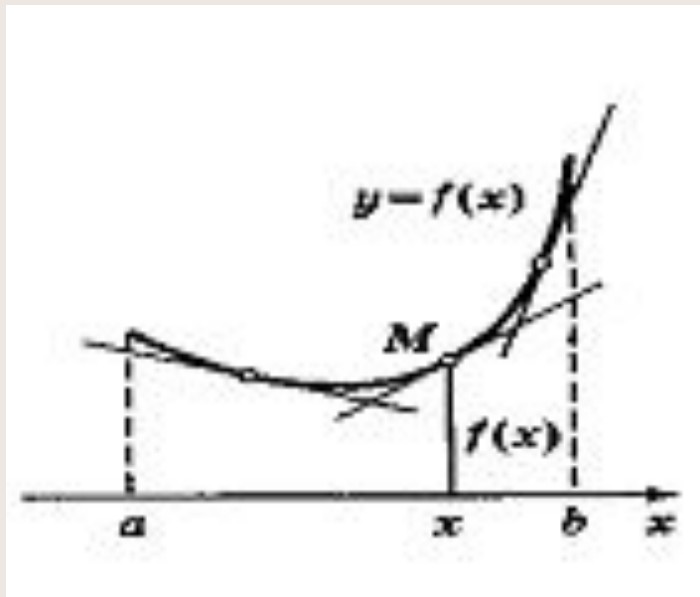
Доказательство:

Пусть $f''(x) > 0$ при $a < x < b$, x_0 — любая точка промежутка (a, b) . Сравним в точке x ординату y кривой $y = f(x)$ ординатой y ее касательной MoN , проведенной в точке



Достаточные условия вогнутости (выпуклости) графика функции.

Теорема: Если же вторая производная $f''(x)$ отрицательна внутри промежутка (a, b) , то график функции $y = f(x)$ вогнут вниз в этом промежутке.



Доказательство

Аналогично доказывается, что если $f''(x) < 0$ при $a < x < b$, то график функции $y = f(x)$ вогнут вниз на промежутке (a, b) .