МБОУ СОШ № 37
Туренко Екатерина Леонидовна
г. Хабаровск

- Понятие касательной
- Задача о касательной
- Задача о скорости движения
- Общее определение производной
- Смысл производной
- Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции
- Основные правила Дифференцирования функций
- Производная сложной функции
- Производная обратной функции
- Производная неявной функции
- Производная функции, заданной Производная функции, заданной Производная функции, заданной параметрически
- Понятие о производных высших порядков
- Теорема о конечном приращении функции и ее следствия
- Теорема Ролля
- Теорема Ферма
- Возрастание и убывание функции одной переменной
- Экстремум функции одной переменной
- Вогнутость и выпуклость графика функции. Точки перегиба

Понятие касательной

Определение: *Касательной к данной непрерывной кривой в данной ее точке M (точка касания) называется предельное положение секущей MM', проходящей через точку M, когда вторая точка пересечения M' неограниченно приближается по кривой к первой.*

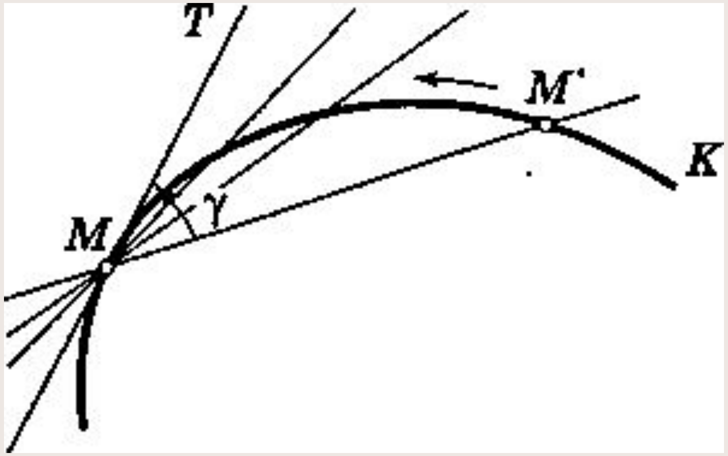


Рис. 1

Задача о касательной

Зная уравнение непрерывной линии

$$y = f(x),$$

найти уравнение касательной в данной ее точке М (х, у), предполагая, что касательная существует.

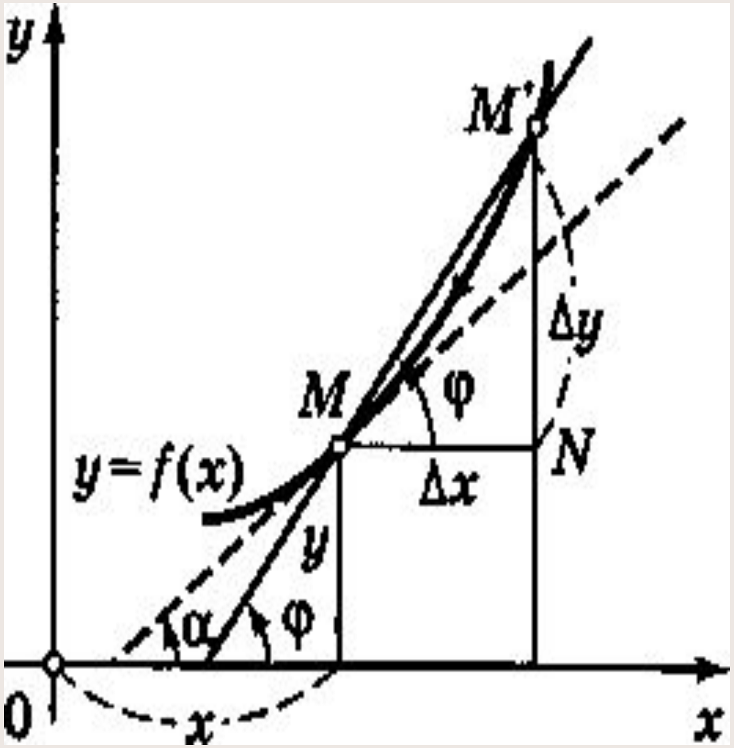
$$k = tg\varphi = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

$$tg\varphi \to tg\alpha$$

$$k = f'(x)$$

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



$$Y - y = k(X - x)$$

Рис. 2.

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

Задача о скорости движения

- Задача. *Зная закон движения S=f(t), найти скорость движущейся точки для любого момента времени.*

$$OM = x$$

$$t + \Delta t$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$OM' = x + \Delta x$$

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$x + x\Delta = f + \Delta t$$

$$\Delta x = f(t+\Delta t) - f(t)$$

$$v = f'(t)$$

Общее определение производной

Определение: *Производной функции y = f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует*

Δ

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Найти производную функции $y = x^2$

$\Delta x \neq 0$ $\quad \Delta y = (x + \Delta x)^2$ $\quad y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$

$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x * \Delta x + (\Delta x)^2$ $\quad$ (x2)' = 2x

Смысл производной

Физический

Если функция описывает какой-либо физический процесс, то $y = f(x)$ *есть скорость протекания*
y
этого процесса.

Геометрический

$f'(x) = k$ *касательной к графику функции y=f (x) в точке, абсцисса которой равна x.*

Например

Точка движется прямолинейно по закону $S = t^2$ *.Найти скорость движения в момент времени t=3*

Уравнение касательной к кривой

$$y = x^2 + 1$$

в точке A(1;2)

y=kx+b

$$k = y'(x) = (x^2 + 1)' = 2x$$

*k=2*1=2*

*2=2*1+b*

b=0

y=2x

Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Мы видели, что функция

$$y = f(x)$$

называется *непрерывной в точке x,* если в этой точке

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

Функция называется *дифференцируемой в точке x,* если в этой точке она имеет производную, т. е. если существует конечный предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$$

Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции

ТЕОРЕМА:

Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке функция непрерывна. Обратное утверждение неверно: непрерывная функция может не иметь производной.

Основные правила дифференцирования функций:

I. ***Производная постоянной*** *величины равна нулю.*

II. ***Производная алгебраической суммы*** *конечного числа дифференцируемых функций равна такой же алгебраической сумме производных этих функций.*

III. ***Производная произведения*** *двух дифференцируемых функций равна произведению первого сомножителя на производную второго плюс произведение второго сомножителя на производную первого.*

IV**. Производная частного.** *Если числитель и знаменатель дроби — дифференцируемые функции и знаменатель не обра щается в нуль, то производная дроби равна также дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя.*

Производная сложной функции

ТЕОРЕМА:

Если y = f(z)и z= φ(x)— дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции $y = f[\varphi(x)]$

существует и равна производной данной функции y по промежуточному аргументу z, умноженной на производную самого промежуточного аргумента г по независимой переменной x, т. е.

$$y'_x = y'_z z'_x$$

Например

$y = \ln(x^2 - 3x + 1)$ $\qquad y = \ln\varphi \qquad \varphi = x^2 - 3x + 1$

$$y'_x = y'_\varphi * \varphi'_x = \frac{1}{u}(2x - 3) \qquad \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1}$$

Производная обратной функции

ТЕОРЕМА. *Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.*

Доказательство. *Пусть* $y = f(x)$ Например $y=arctg\,x$

$\Delta y \neq 0$ $y'_x = f'(x) \neq 0$ $x=tg\,x$ *обратная для* y

Δx $x = \varphi(y)$

$$y'_x = \frac{1}{(tgy)'}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \frac{\Delta y}{x}$$

$$\frac{\cos^2 y}{1}$$

$$\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = 1 : \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$1 + \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y}$$

$$1 + ctg^2 y$$

$$x_y{}' = \frac{1}{y_x{}'}$$

$$\frac{1}{1 + tg^2 x}$$

$$\frac{1}{1 + x^2}$$

Производная неявной функции

Определение: *Если у как функция от x задается соотношением F(x, y)=0, где F(x, y) - выражение, содержащее x и y, то y называется неявной функции от x.*

Алгоритм нахождения производных заданных функций в неявном виде.

1) Находим производную от левой части равенства F(x, y)=0, рассматривая у как функцию от x и приравниваем ее к нулю.

2) Решаем полученное уравнение относительно у, в результате будем иметь выражение производной от неявной функции в виде y=f(x)

Пример. Найти y'

$$x^3y^2+5xy+4$$

$$(x^3y^2)'+(5xy)+4'$$

$$(x^3)'y^2+x^3(y^2)'+(5x)'y+5xy'+0$$

$$3x^2y^2+x^3 2yy'+5y+5xy$$

Производная функции, заданной параметрически

ТЕОРЕМА:

Если функция y от аргумента x задана параметрически

$$x = \varphi(t) \quad \text{и} \quad y = \psi(t)$$

где функции $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$

дифференцируемы и $\varphi'(t) \neq 0$, *то производная*

этой функции есть $y_x' = \dfrac{y_t'}{x_t'}$

Например

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \qquad x_t' = 2t \qquad y_t' = 3t^2$$

$$y_x' = y_t' : x_t' = 3t^2 : 2t = \frac{3}{2}t$$

Понятие о производных высших порядков

Производная f '(x) от функции f (x) называется производной первого порядка и представляет собой некоторую новую функцию. Может случиться, что эта функция сама имеет производную. Тогда производная от производной первого порядка называется производной второго порядка или второй производной и обозначается так: f ''(x). Итак,

$$f''(x) = \left[f'(x)\right]'$$

$$f'''(x) = \left[f''(x)\right]'$$

Пример

1)Пусть y = sin x

Тогда имеем последовательно

$$y' = \cos x, y'' = -\sin x, y''' = -\cos x, y^{IV} = \sin x, ...$$

2)Пусть $y(x) = 4x^3 + 2\cos x$

Найти: y'''

$$y' = 12x^2 - 2\sin x$$

$$y'' = 24x - 2\cos x$$

$$y''' = -24x + 2\sin x$$

Теорема о конечном приращении функции и ее следствия

ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА:

Конечное приращение дифференцируемой функции равно соответствующему приращению аргумента, умноженному на значение ее производной в некоторой промежуточной точке, т. е. если f(x) есть *дифференцируемая функция на некотором промежутке* $\langle a, b\rangle$ *и* $x_1,$ x_2 *(*$x_1 < x_2$*) — любые значения из этого промежутка, то*

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi)$$

где $x_1 < \xi < x_2.$

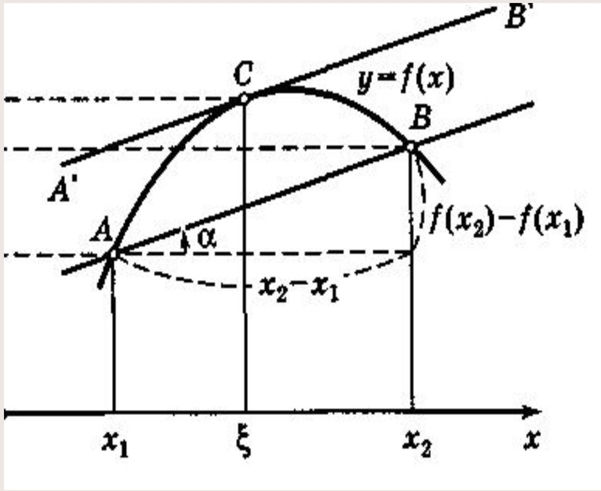
Доказательство: $y = f(x)$

$A\,(x_1, f(x_1))$ $B\,(x_2\;\; f(x_2))$

$C(\xi, f(\xi))$ $x_1 < \xi < x_2.$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi)$$



ТЕОРЕМА РОЛЛЯ:

Между двумя последовательными корнями дифференцируемой функции всегда содержится, по меньшей мере, один корень ее производной.

Доказательство: В самом деле, если *f*(x) — дифференцируемая функция и $f(x_1) = f(x_2) = 0(x_1 < x_2)$

то из формулы имеем $(x_2 - x_1) f'(\xi) = 0$

или, так как , $x_2 \neq x_1$

$f'(\xi) = 0,$ где $x_1 < \xi x_2$

ТЕОРЕМА ФЕРМА:

Если функция y=*f* (x) определена и непрерывна (a, b) и пусть эта функция принимает max во внутренней точке x_0 этого интервала, тогда если существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$

Доказательство: Пусть в точке x_0 функция $y = f(x)$ принимает *max* значение для любых $x \in (a,b)$, $x_0 \in]a,b[\Rightarrow$ для любых, $x \in]a,b[\; f(x) < f(x_0), x \neq x_0$

следовательно

$f(x) - f(x_0) < 0$, для любых $x \neq x_0$

Существует функция $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, т.е. $f'(x) \leq 0$

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, $f'(x) \geq 0$ Следовательно, $f'(x_0) = 0$

Возрастание и убывание функции одной переменной

ТЕОРЕМА 1: (Необходимый признак возрастания функции)

1) Если дифференцируемая функция возрастает в некотором промежутке, то производная этой функции неотрицательна в этом промежутке.

Доказательство:

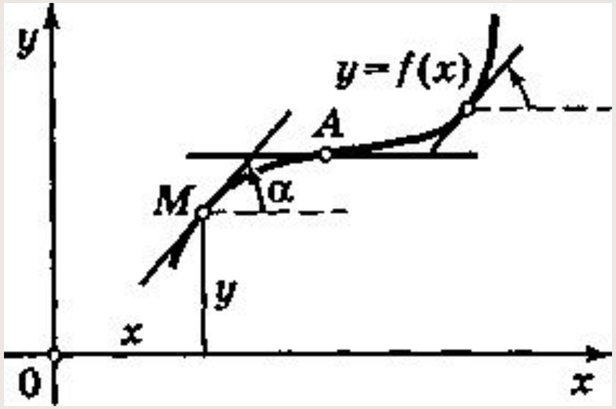
1) Пусть дифференцируемая функция f(x) возрастает в промежутке (a,b*).* Согласно определению производной,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$$

$$f'(x) \geq 0$$

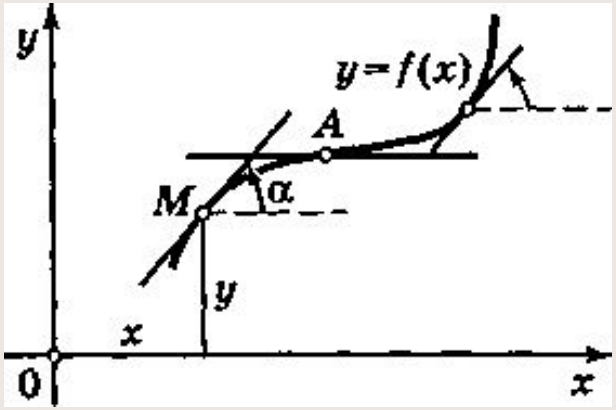


ТЕОРЕМА 2: (Необходимый признак убывания функции)

Если дифференцируемая функция убывает в некотором промежутке, то ее производная неположительна в этом промежутке.

Доказательст во:

Пусть дифференцируемая функция *f*(x) убывает в промежутке (a,b*).* Согласно определению производной,



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} < 0$$

$$f'(x) \le 0$$

ТЕОРЕМА: Достаточный признак возрастания функции

1) Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка, то функция возрастает на этом промежутке.

Доказательство: 1) Пусть, например, дифференцируемая функция *f*(x) такова, что $f'(x) > 0$ при $a < x < b$

Для любых двух значений $a \le x_1 < x_2 \le b$, принадлежащих промежутку (a, *b),* в силу теоремы о конечном приращении функции имеем

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

где ξ — промежуточное значение между x_1 и x_2 и, следовательно, лежащее внутри промежутка (a, b*).*

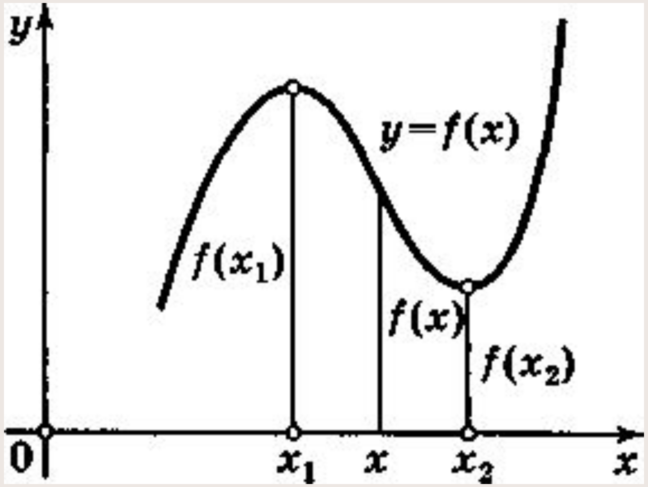
Так как $x_2 - x_1 > 0$ и $f(x_2) - f(x_1) > 0$ то отсюда получим

$$f'(\xi) > 0$$

Следовательно, функция *f*(*x*) возрастет на промежутке (a, b).

Экстремум функции одной переменной

Определение: Максимум или минимум функции называется *экстремумом функции,* а те значения аргумента, при которых достигаются экстремумы функции, называются *точками экстремума функции* (соответственно: *точками максимума* или *точками минимума функции).*



НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ

ТЕОРЕМА. *В точке экстремума (двустороннего) дифференцируемой функции производная ее равна нулю.*

Доказательство. Пусть, для определенности, x_0 есть точка минимума функции f(x).

$$f(x_0+\Delta x_0) > f(x_0)$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x_0}$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x_0} > 0$$

$$f'(x_0) \geq 0, \qquad \Delta x_0 > 0$$

$$f'(x_0) \leq 0 \qquad \Delta x_0 < 0$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x_0} < 0$$

$$f'(x_0) = 0$$

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ

ТЕОРЕМА: *Если дифференцируемая функция f(x) такова, что для некоторого значения* x_0 *ее аргумента x производная f '(x) равна нулю и меняет свой знак при переходе через это значение, то число является экстремумом функции f(x)*, *причем:*

1) *функция f(x) имеет максимум при x —* x_0 *,если изменение знака производной f '(x) происходит с плюса на минус;*

2) *функция f(x) имеет минимум при x =* x_0 *, если изменение знака производной f* '(x) *происходит с минуса на плюс.*

Доказательство. Пусть $f(x_0) = 0$, $f'(x) > 0$ при $x_0 - \xi < x < x_0$

$f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \xi$

$$f(x_0) > f(x) \qquad x < x_0$$

$$[x_0 - \xi, x_0] \quad [x_0, x_0 + \xi] \qquad f(x_0) > f(x) \qquad x > x_0$$

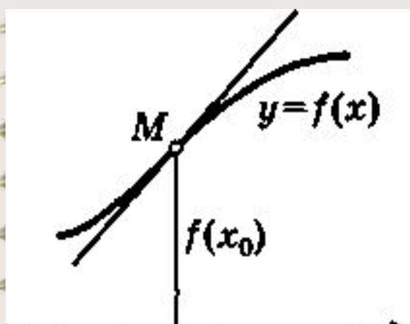
Вогнутость и выпуклость графика функции. Точки перегиба

Определение: *График дифференцируемой функции y = f(x) называется вогнутым вверх (или выпуклым вниз) в промежутке (a, b), если соответствующая часть кривой*

$$y = f(x)(x \in \langle a, b \rangle)$$

расположена выше касательной, проведенной в любой ее точке M(x, f(x)).

Аналогично, график дифференцируемой функции y = f(x) называется выпуклым вверх (или вогнутым вниз) в промежутке (a, b), если соответствующая часть кривой расположена ниже касательной, проведенной к любой ее точке M(x, f(x))



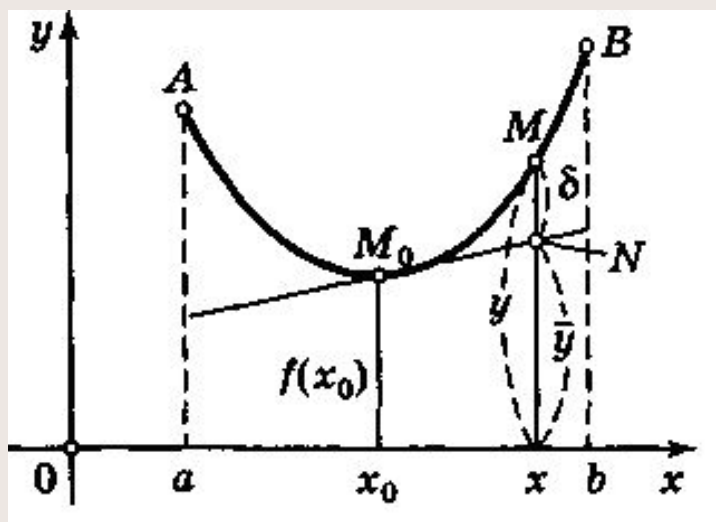
Определение: *Точкой перегиба графика дифференцируемой функции y = f(x) называется его точка, при переходе через которую кривая меняет свою вогнутость на выпуклость или наоборот*

ТЕОРЕМА:

Если для дважды дифференцируемой функции y = f(x) вторая ее производная f "(x) положительна внутри промежутка (a,b), то график этой функции вогнут вверх в данном промежутке.

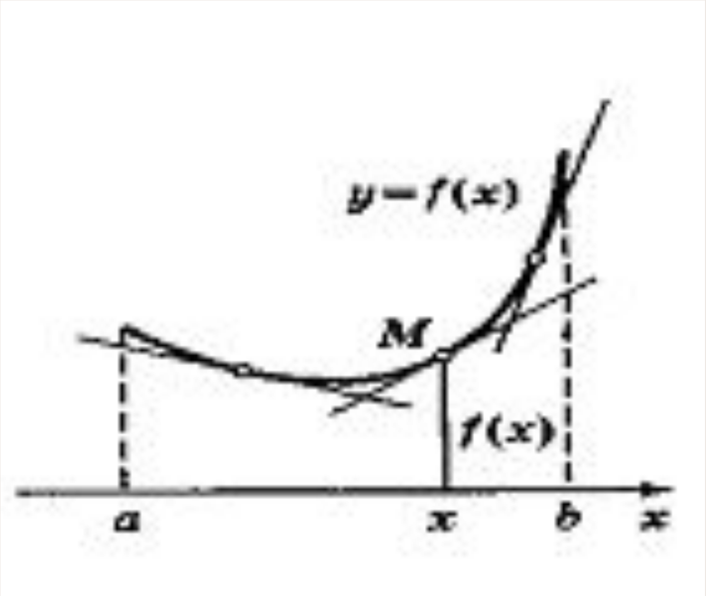
Доказательство:

Пусть f "(x) > 0 при $a<x<b$ и x_0 — любая точка промежутка (a, b). Сравним в точке x ординату y кривой y=f(x) ординатой y ее касательной MoN, проведенной в точке



Достаточные условия вогнутости (выпуклости) графика функции.

Теорема: *Если же вторая производная f''(x) отрицательна внутри промежутка (a, b), то график функции y = f(x) вогнут вниз в этом промежутке.*



Доказательство:

Аналогично доказывается, что если f "(x) < 0 при a < x < b, то график функции y = f(x) вогнут вниз на промежутке (a, b).