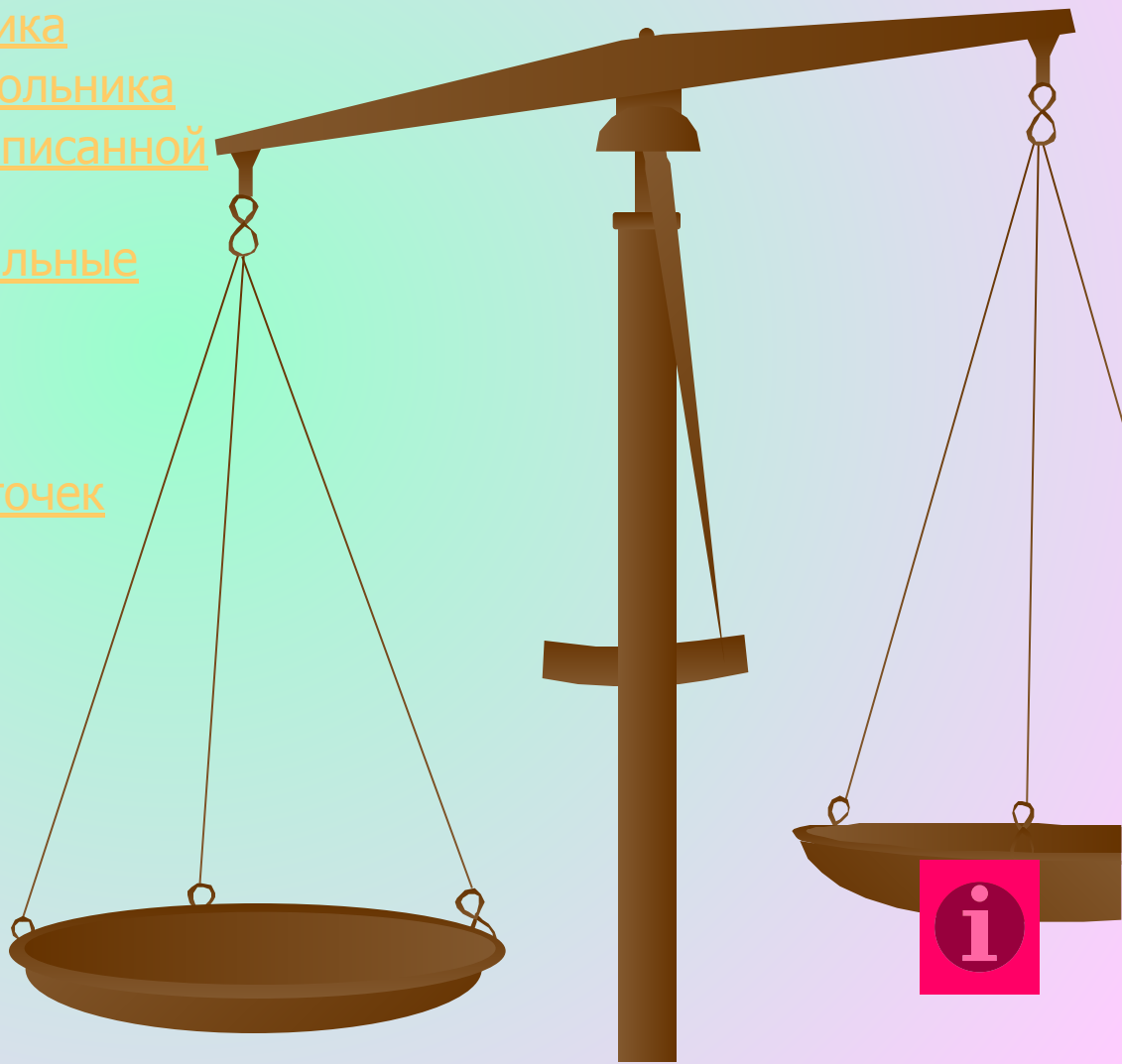


Замечательные точки треугольника



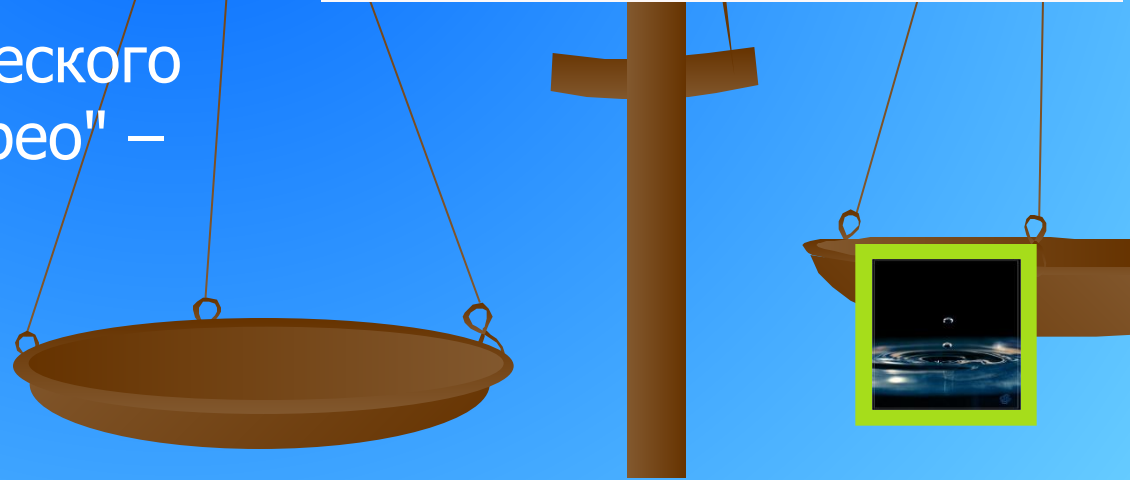
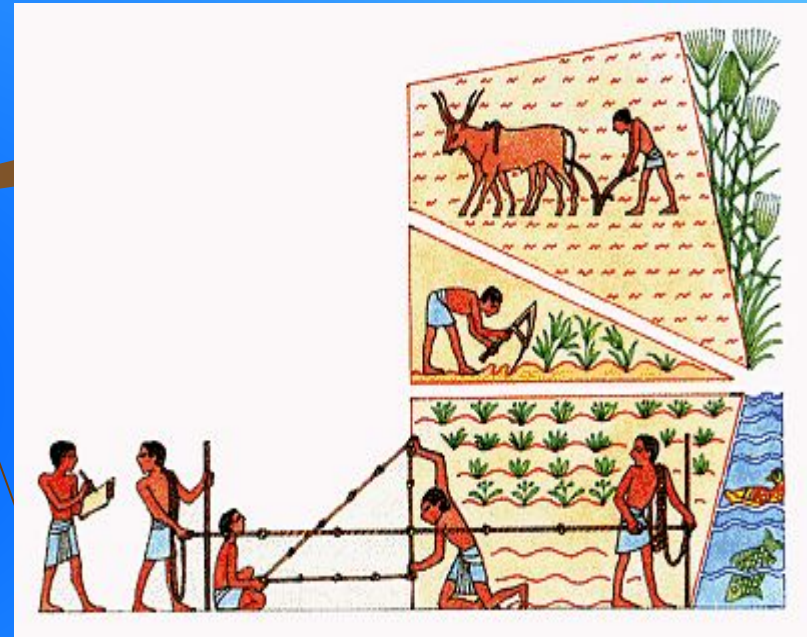
Оглавление

- Треугольник
- Из истории
- Элементы треугольника
- Центр тяжести треугольника
- Центр вписанной и описанной окружности
- Ортоцентр и изогональные точки
- Точка Лемуана
- Прямая Эйлера
- Окружность девяти точек
- Точка Ферма
- Точка Жергонна
- Точка Нагеля
- Точка Брокара
- Прямая Симпсона

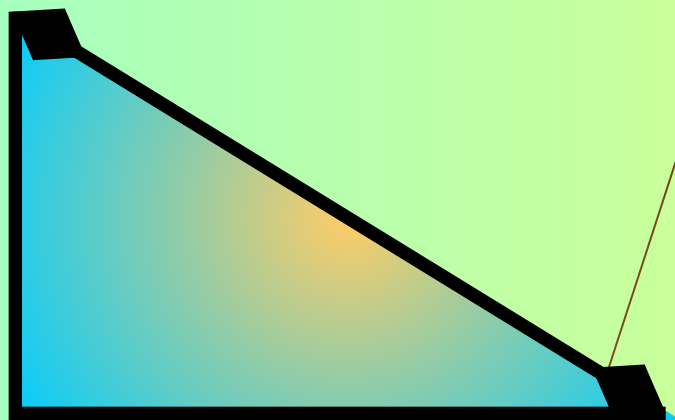


Треугольник

Крупнейший древнегреческий историк Геродот (V век до нашей эры) оставил описание того, как египтяне после каждого разлива Нила заново размечали плодородные участки его берегов, с которых ушла вода. По Геродоту, с этого и началась геометрия – "землемерие" (от греческого "гео" – "земля" и "метрео" – "измеряю").



Треугольник по праву считается простейшей из фигур: любая плоская, то есть простирающаяся в двух измерениях, фигура должна содержать хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой. Если соединить эти точки попарно прямолинейными отрезками, то построенная фигура и будет **треугольником**.



Из трехсторонних фигур
равносторонний треугольник
есть фигура, имеющая три равные стороны

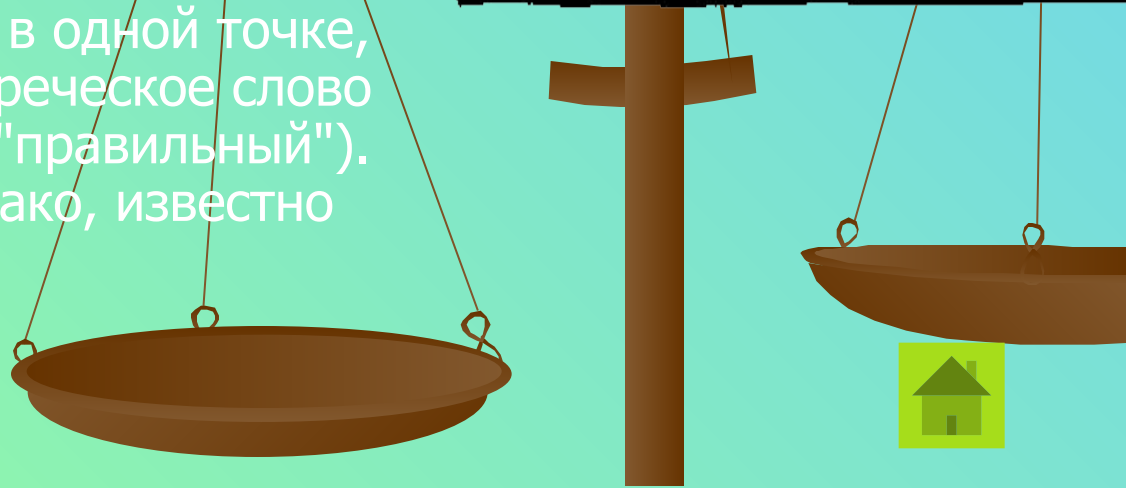
равнобедренный же –
имеющая только две равные стороны

разносторонний –
имеющая три неравные стороны



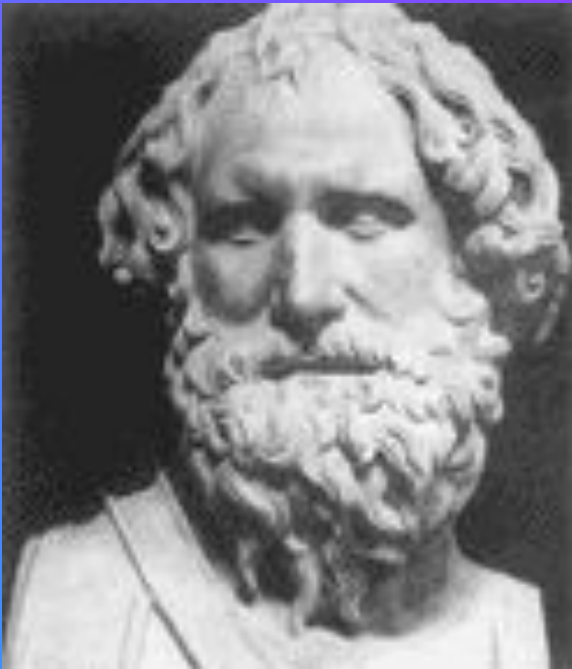
ИЗ ИСТОРИИ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧЕК ТРЕУГОЛЬНИКА

В четвертой книге "Начал" Евклид решает задачу: "Вписать круг в данный треугольник". Из решения вытекает, что три биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке – **центре вписанного круга**. Из решения другой задачи Евклида вытекает, что перпендикуляры, восстановленные к сторонам треугольника в их серединах, тоже пересекаются в одной точке – **центре описанного круга**. И три высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром (греческое слово "**ортос**" означает "прямой", "правильный"). Это предложение было, однако, известно Архимеду, Паппу, Проклу.

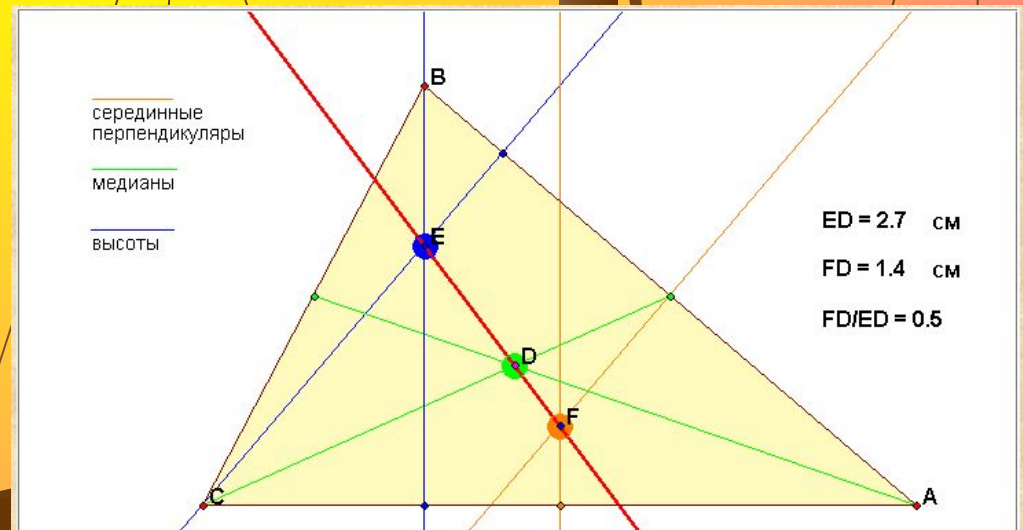


■ Четвертой особенной точкой треугольника является точка пересечения медиан. Архимед доказал, что она является центром тяжести (*барицентром*) треугольника.

На вышеназванные четыре точки было обращено особое внимание, и начиная с XVIII века они были названы "замечательными" или "особенными" точками треугольника. Исследование свойств треугольника, связанных с этими и другими точками, послужило началом для создания новой ветви элементарной математики – "*геометрии треугольника*" или "*новой геометрии треугольника*", одним из родоначальников которой стал Леонард Эйлер.

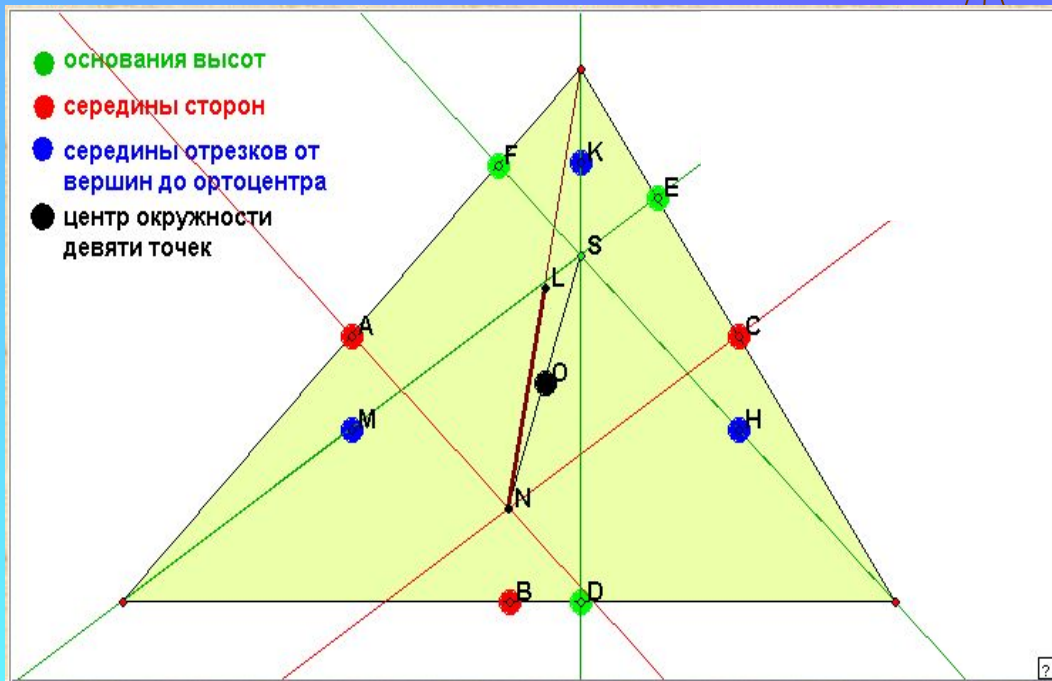


- В 1765 году **Эйлер** доказал, что в любом треугольнике ортоцентр, барицентр и центр описанной окружности лежат на одной прямой, названной позже "**прямой Эйлера**". В двадцатых годах XIX века французские математики **Ж. Понселе**, **Ш. Брианшон** и другие установили независимо друг от друга следующую теорему: основания медиан, основания высот и середины отрезков высот, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, лежат на одной и той же окружности.



- Эта окружность называется "окружностью девяти точек", или "окружностью Фейербаха", или "окружностью Эйлера". Фейербах установил, что центр этой окружности лежит на прямой Эйлера.

Большой вклад в развитие геометрии треугольника внесли математики XIX – XX веков Лемуан, Брокар, Тебо и другие.



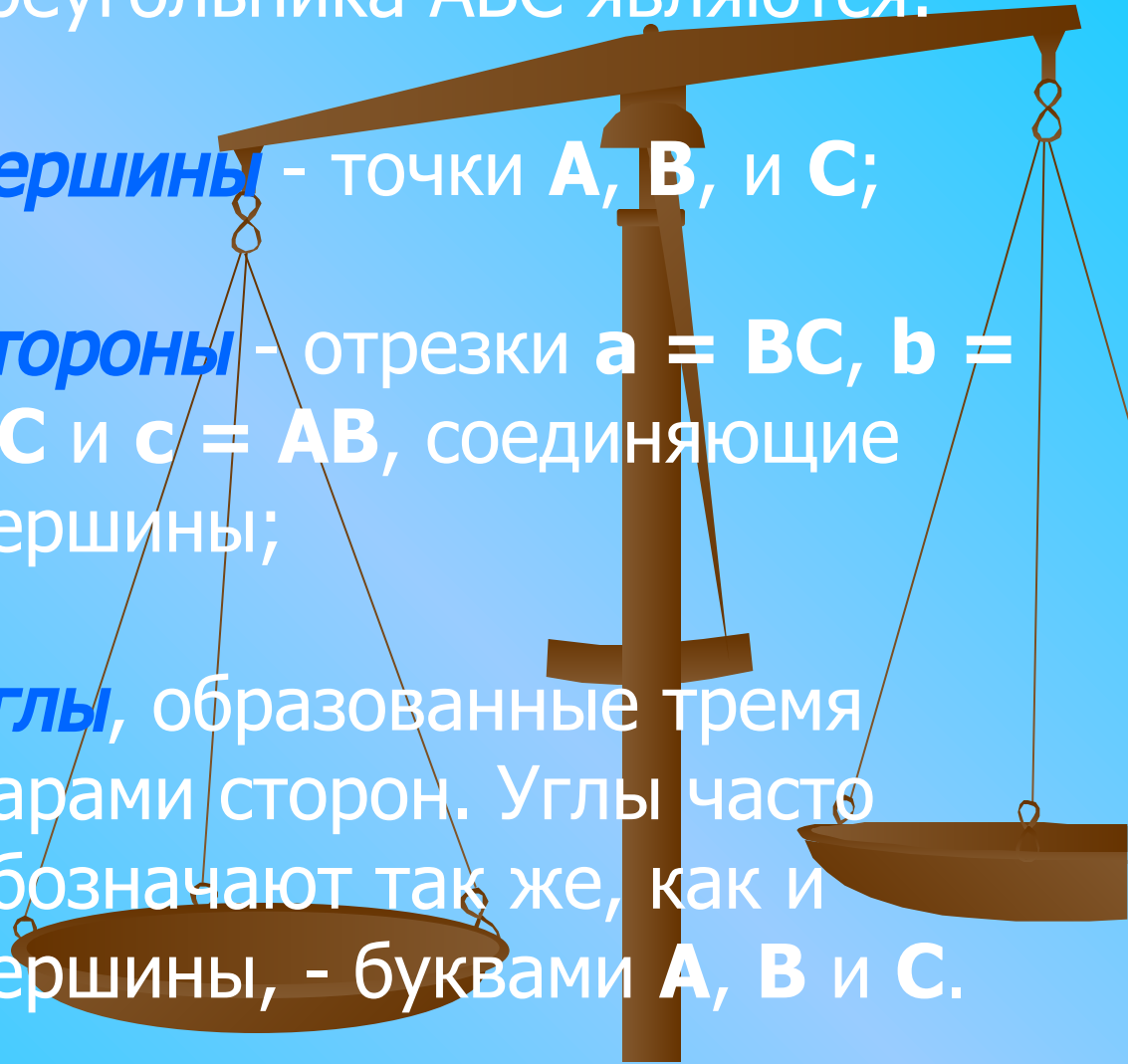
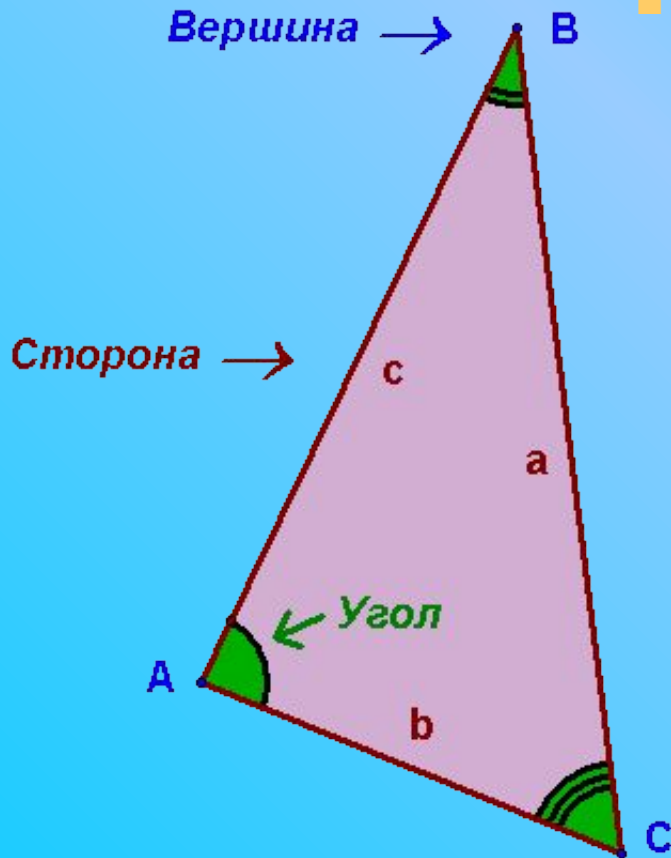
ЭЛЕМЕНТЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

- Основными элементами треугольника ABC являются:

вершины - точки A , B , и C ;

стороны - отрезки $a = BC$, $b = AC$ и $c = AB$, соединяющие вершины;

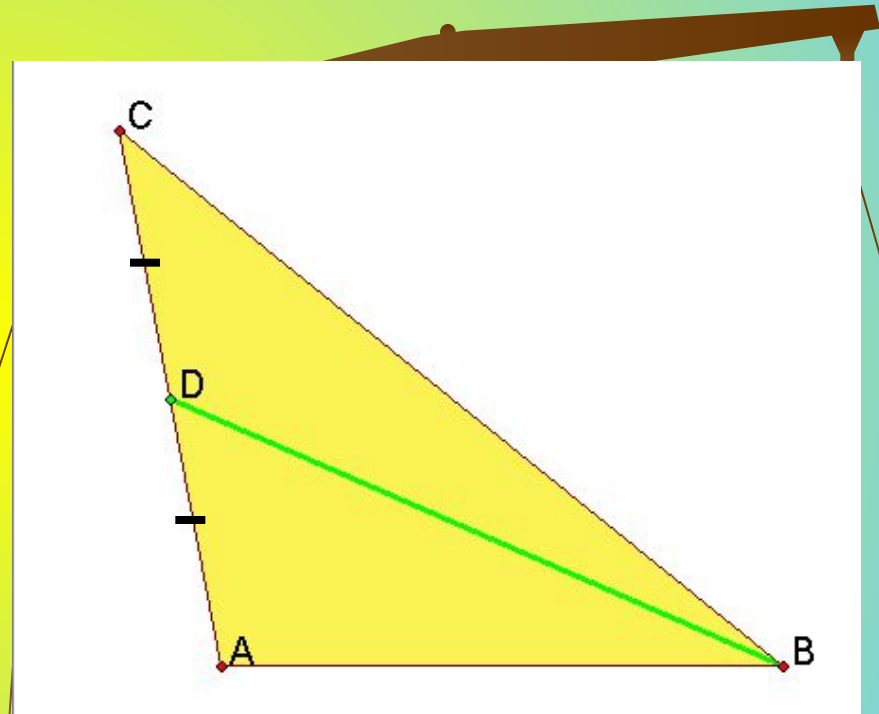
углы, образованные тремя парами сторон. Углы часто обозначают так же, как и вершины, - буквами A , B и C .



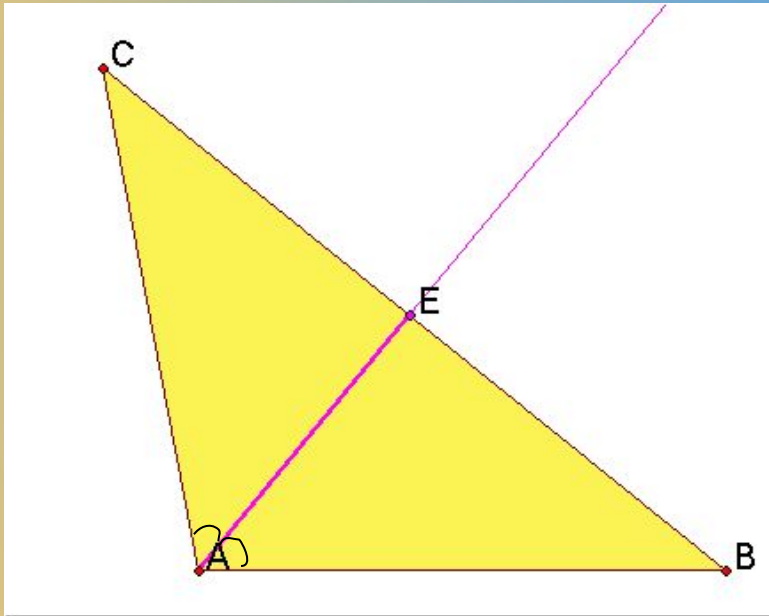
МЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА

■ Медиана треугольника - это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Поэтому, для построения медианы необходимо выполнить следующие действия:

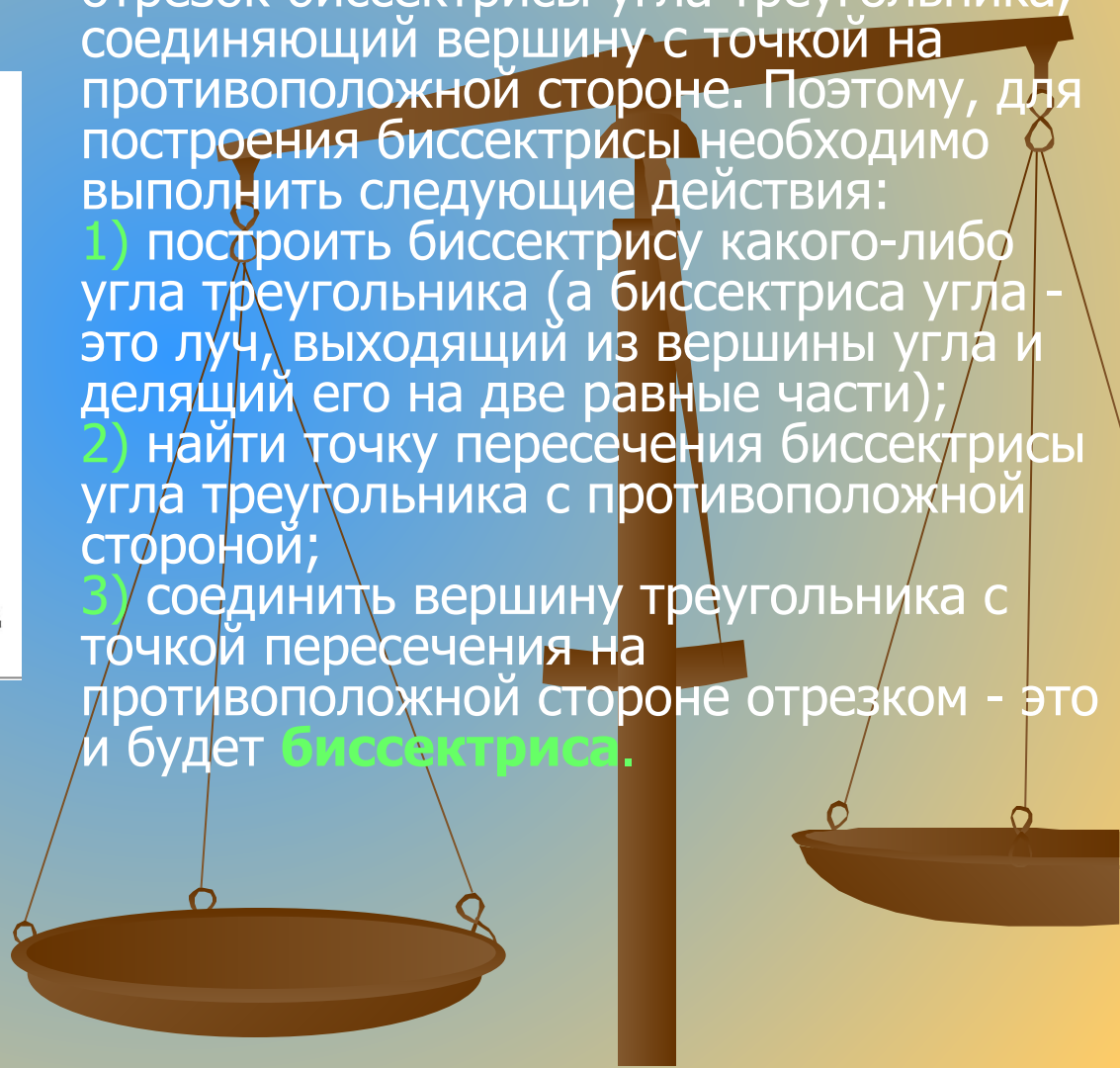
- 1) найти середину стороны;
- 2) соединить точку, являющуюся серединой стороны треугольника, с противоположной вершиной отрезком - это и будет медиана.



БИСSEКТРИСА ТРЕУГОЛЬНИКА



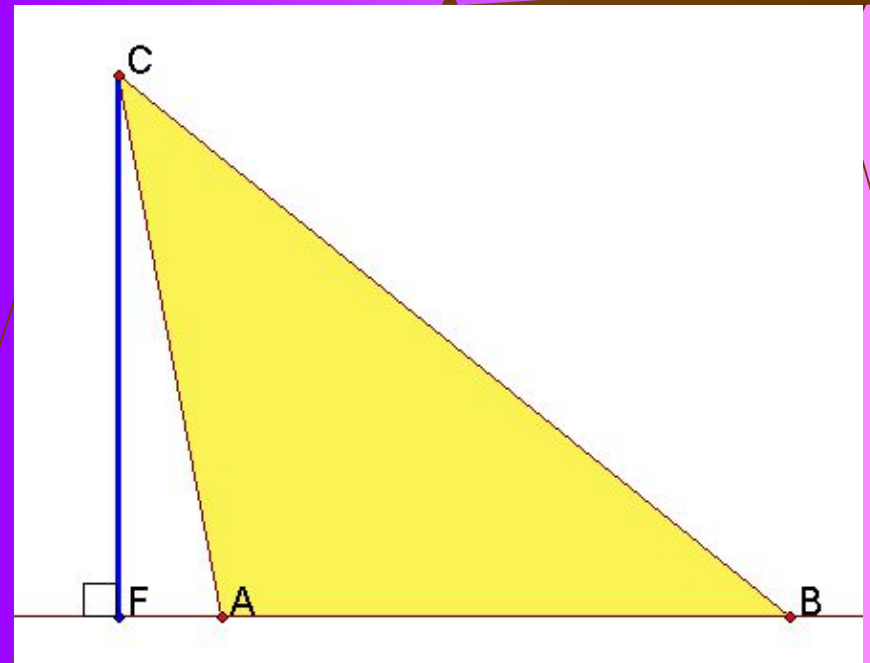
- **Биссектриса треугольника** - это отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противоположной стороне. Поэтому, для построения биссектрисы необходимо выполнить следующие действия:
 - 1) построить биссектрису какого-либо угла треугольника (а биссектриса угла - это луч, выходящий из вершины угла и делящий его на две равные части);
 - 2) найти точку пересечения биссектрисы угла треугольника с противоположной стороной;
 - 3) соединить вершину треугольника с точкой пересечения на противоположной стороне отрезком - это и будет **биссектриса**.



ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА

Высота треугольника - это перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону. Поэтому, для построения высоты необходимо выполнить следующие действия:

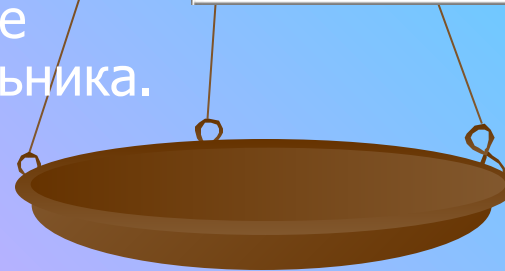
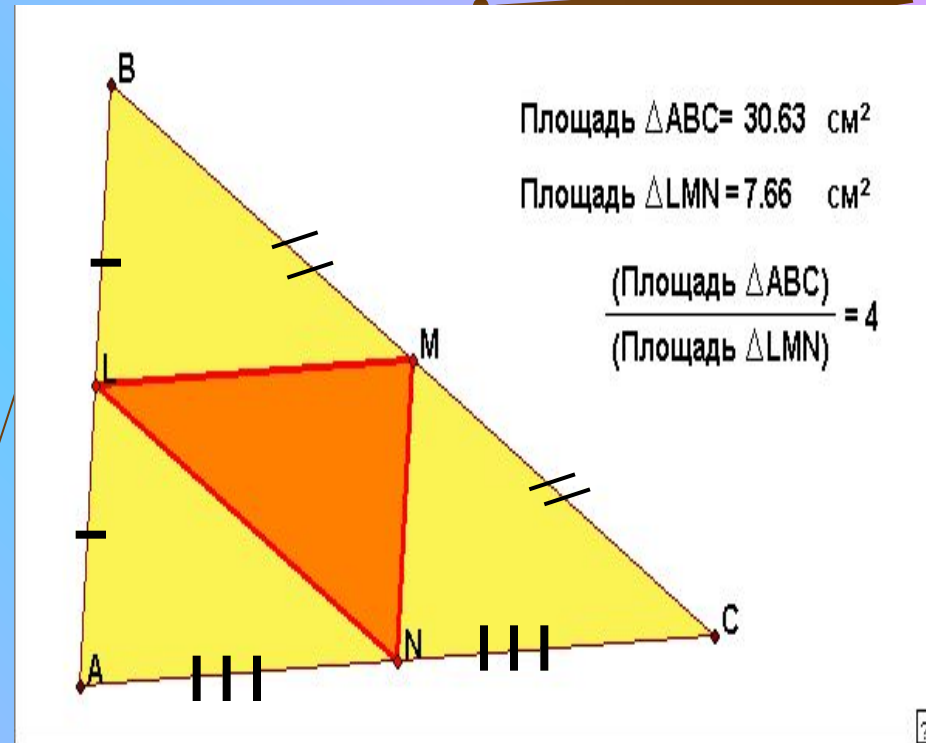
- 1) провести прямую, содержащую одну из сторон треугольника (в случае, если проводится высота из вершины острого угла в тупоугольном треугольнике);
- 2) из вершины, лежащей напротив проведенной прямой, опустить перпендикуляр к ней (а перпендикуляр - это отрезок, проведенный из точки к прямой, составляющей с ней угол 90° градусов) - это и будет **высота**.



СРЕДНИЕ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

■ *Средние линии* - это отрезки, соединяющие середины двух сторон. Поэтому для построения средней линии необходимо выполнить следующие действия:
1) найти середины двух сторон треугольника;
2) соединить середины сторон отрезком - это и будет *средняя линия*.

■ Три средние линии треугольника образуют "вписанный" в него треугольник, называемый *серединным*. Его площадь в четыре раза меньше площади данного треугольника. А периметр в два раза меньше периметра данного треугольника.



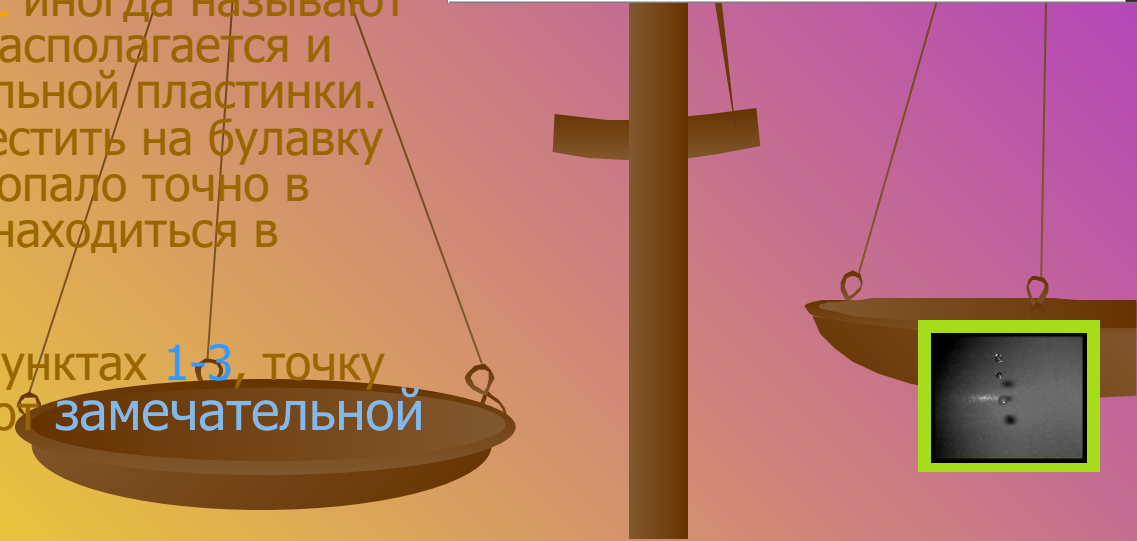
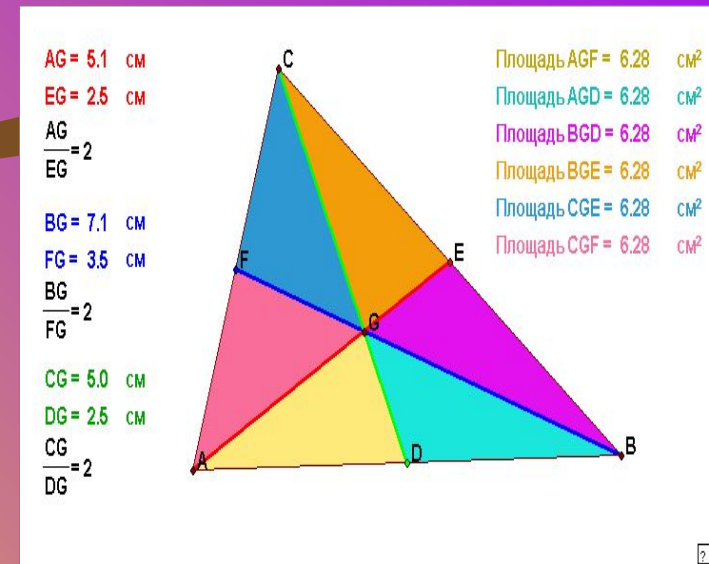
ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТРЕУГОЛЬНИКА (точка пересечения медиан)

1. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, начиная от вершины треугольника.

2. Медианы треугольника делят его на равновеликие треугольники. Треугольники называются равновеликими, если у них равны площади.

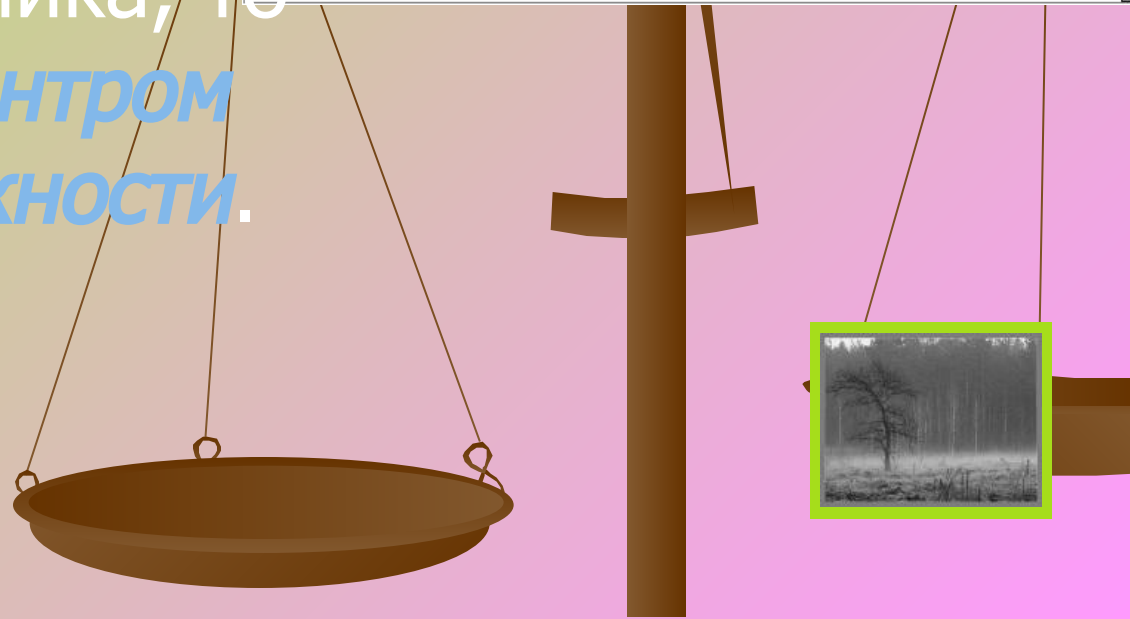
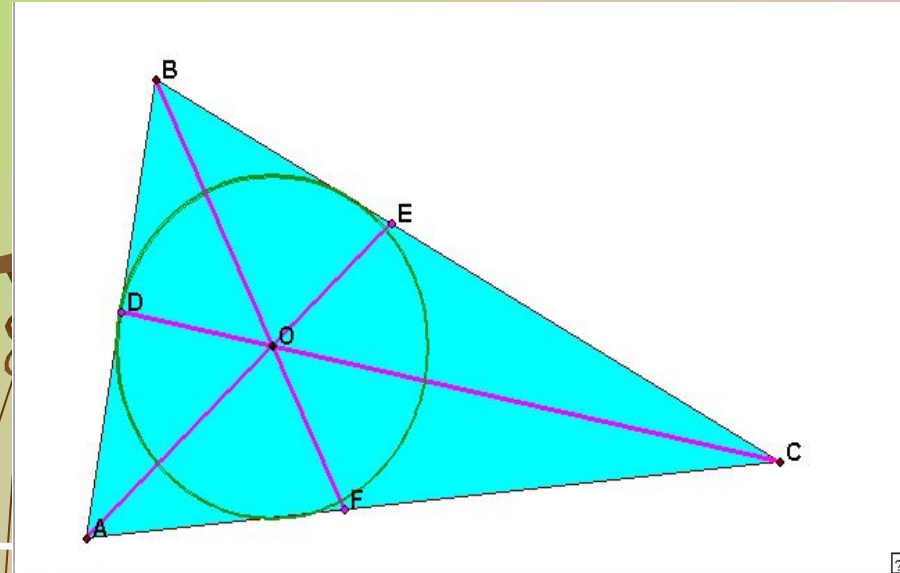
3. Точку пересечения медиан треугольника называют **центром тяжести** или **центром масс**. Оказывается, если поместить в вершины треугольника равные массы, то их центр попадет в эту точку. Центр равных масс иногда называют **центроидом**. В этой же точке располагается и центр масс однородной треугольной пластинки. Если подобную пластинку поместить на булавку так, чтобы острие последней попало точно в центроид, то пластинка будет находиться в равновесии.

За особенности, описанные в пунктах 1-3, точку пересечения медиан и называют **замечательной точкой** треугольника.



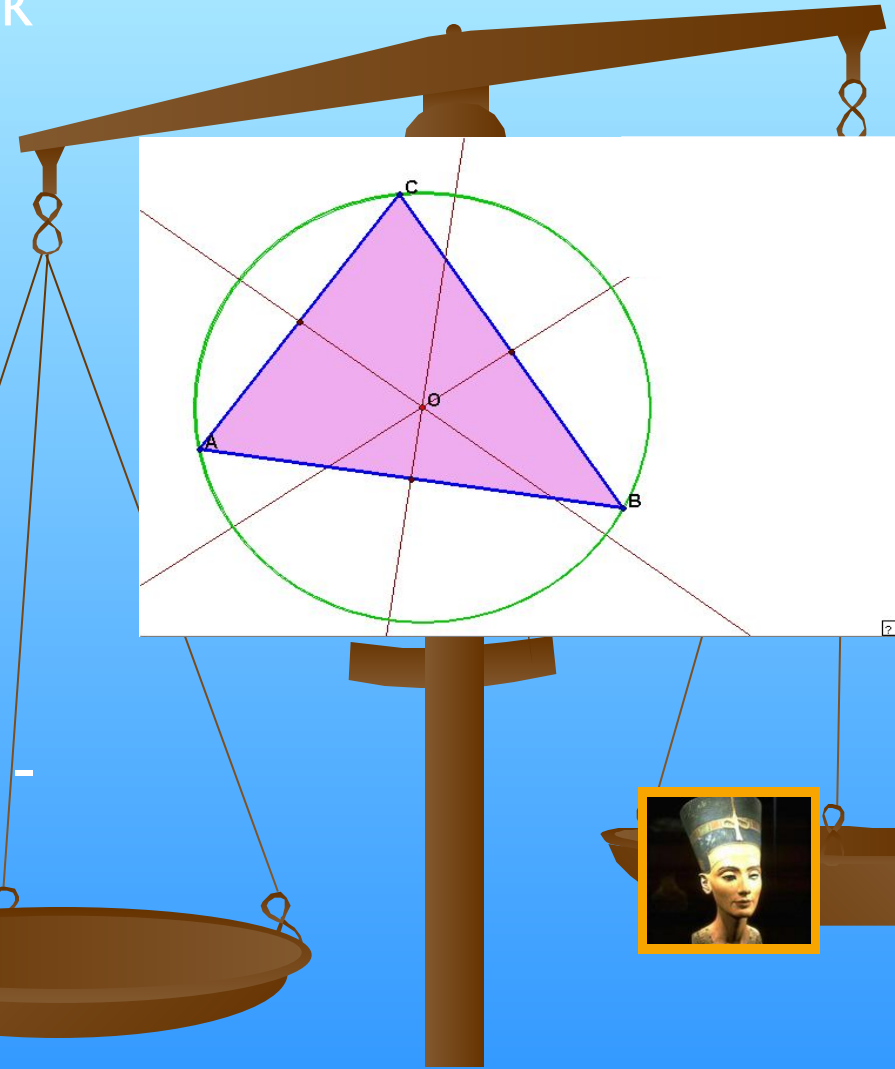
ЦЕНТР ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ (точка пересечения биссектрис)

- Биссектрисы любого треугольника пересекаются в одной точке, которая равноудалена от всех сторон треугольника, то есть является **центром вписанной окружности**.



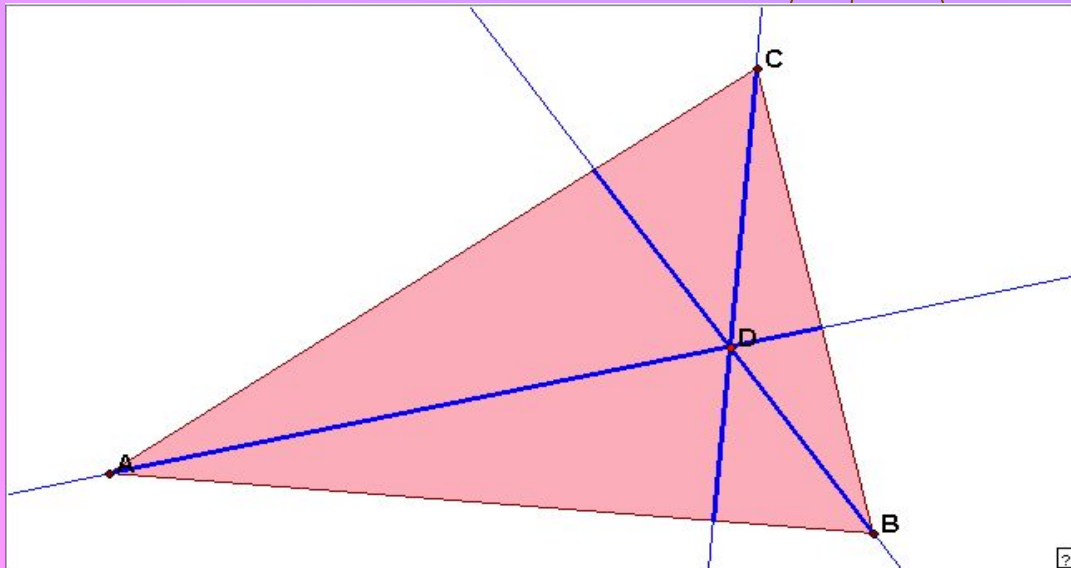
ЦЕНТР ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ (точка пересечения серединных перпендикуляров)

■ Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является *центром описанной окружности*. Точка пересечения серединных перпендикуляров в остроугольном треугольнике лежит внутри треугольника, в прямоугольном - на середине гипотенузы, а в тупоугольном - вне треугольника.



ОРТОЦЕНТР ТРЕУГОЛЬНИКА (точка пересечения высот)

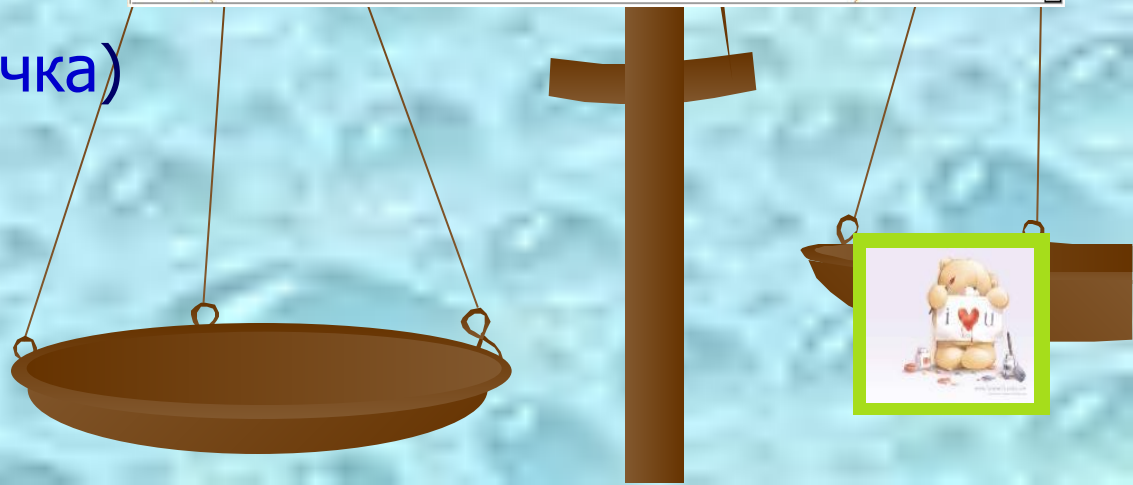
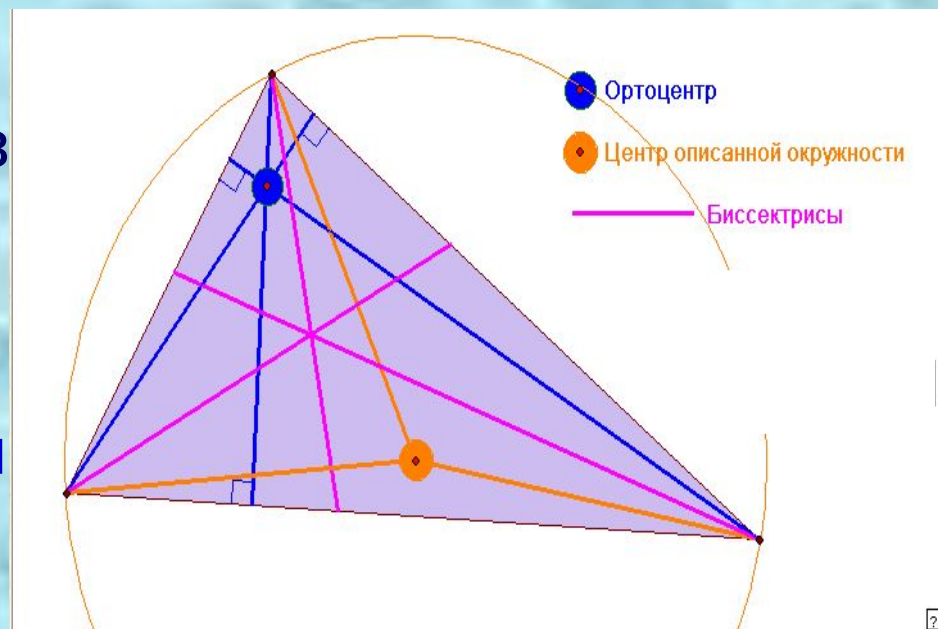
Высоты треугольника (или их продолжения) всегда пересекаются в одной точке, называемой его **ортоцентром**. В остроугольном треугольнике ортоцентр лежит внутри треугольника, в прямоугольном - совпадает с вершиной прямого угла, а в тупоугольном треугольнике - находится вне треугольника на пересечении продолжений высот.



ИЗОГОНАЛЬНЫЕ ТОЧКИ

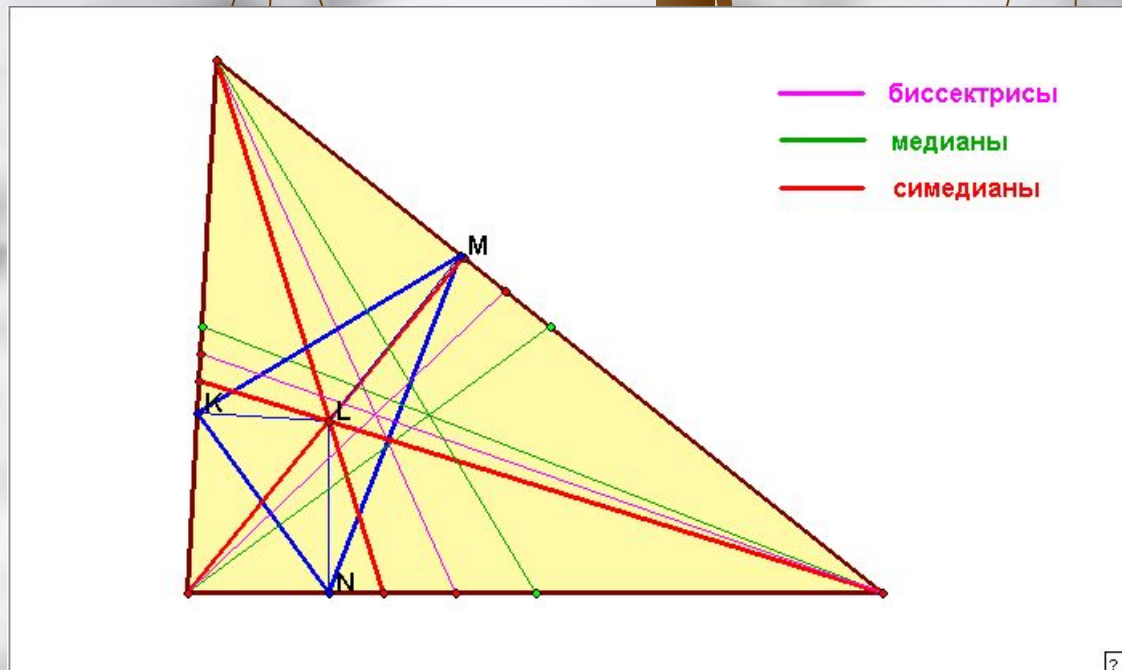
Прямые, симметричные высотам относительно соответствующих биссектрис, проходят через центр описанной окружности, то есть содержат ее радиусы.

Подобные две точки (синяя и **оранжевая**) называются **ИЗОГОНАЛЬНЫМИ**. Таким образом, ортоцентр треугольника (синяя точка) изогонален центру описанной окружности (**оранжевая точка**)



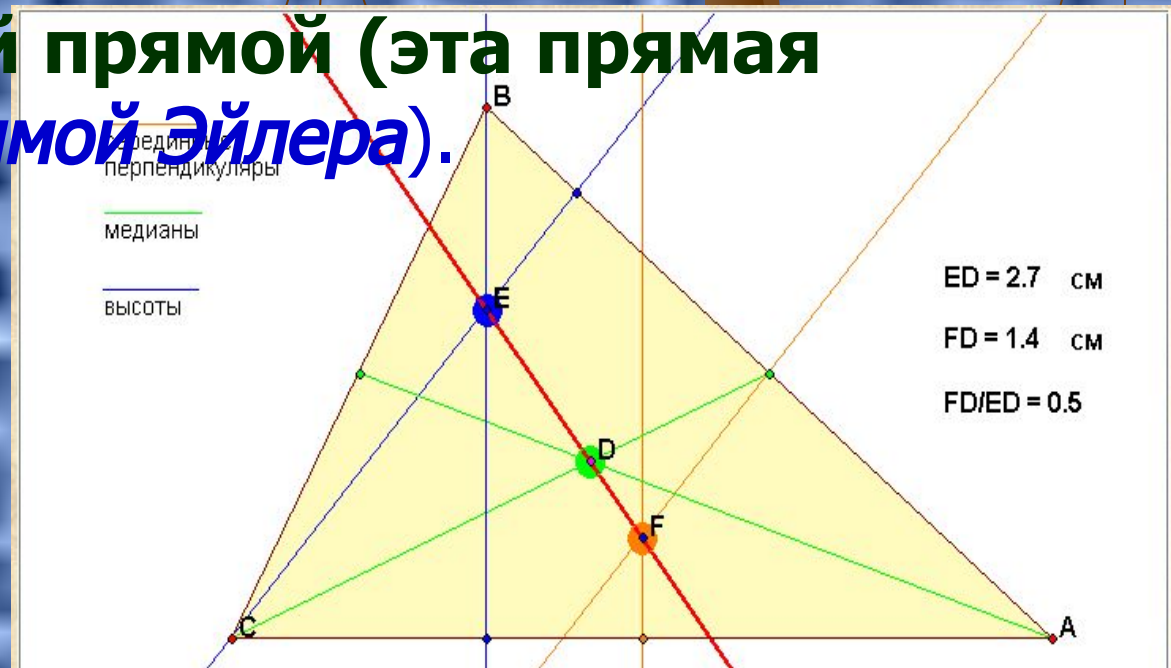
ТОЧКА ЛЕМУАНА

Отразив относительно **биссектрис** треугольника соответствующие **медианы**, получаем новые замечательные линии - **симедианы**. Точка L их пересечения называется **точкой Лемуана** треугольника. Она является центроидом треугольника KMN , образованного ее проекциями на стороны исходного треугольника.



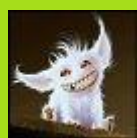
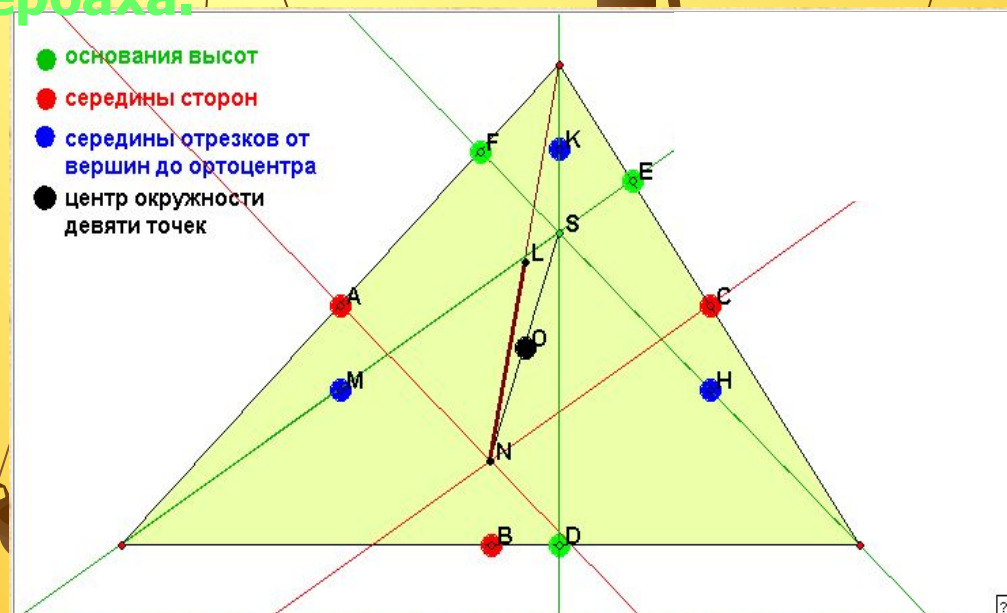
ПРЯМАЯ ЭЙЛЕРА

- Во всяком треугольнике точка пересечения медиан, точка пересечения высот (или их продолжений) и точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника лежат на одной прямой (эта прямая называется *прямой Эйлера*).



ОКРУЖНОСТЬ ДЕВЯТИ ТОЧЕК

Средины сторон треугольника (точки **A**, **B** и **C**), основания его высот (точки **D**, **E** и **F**) и середины отрезков от вершин до ортоцентра (точки **M**, **K** и **H**) лежат на одной окружности. Ее радиус равен половине радиуса описанной окружности (отрезок **NL**), а центр **O** лежит посередине отрезка **NS**, где **N** - центр описанной окружности, а точка **S** - ортоцентр треугольника. Такая окружность называется **окружностью девяти точек**, или **окружностью Эйлера**, или **окружностью Фейербаха** - по имени Карла Фейербаха, провинциального учителя математики из Германии, родного брата философа **Людовика Фейербаха**.

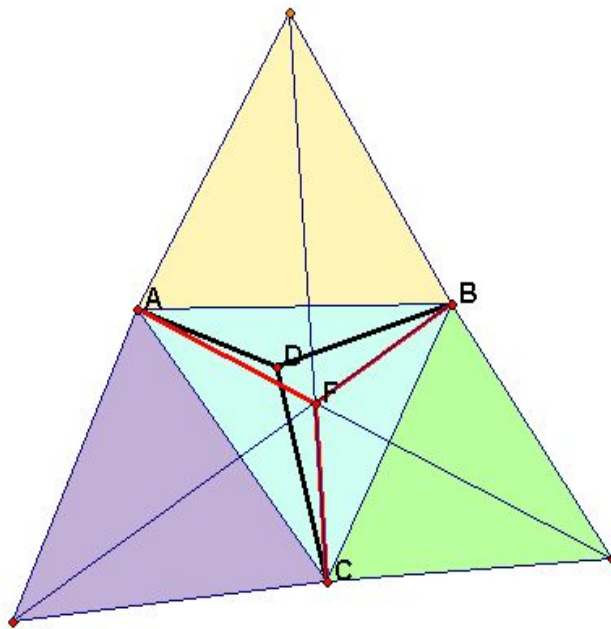


ТОЧКА ФЕРМА

Точка F - **точка Ферма**, то есть точка, сумма расстояний от которой до всех вершин треугольника ABC минимальна

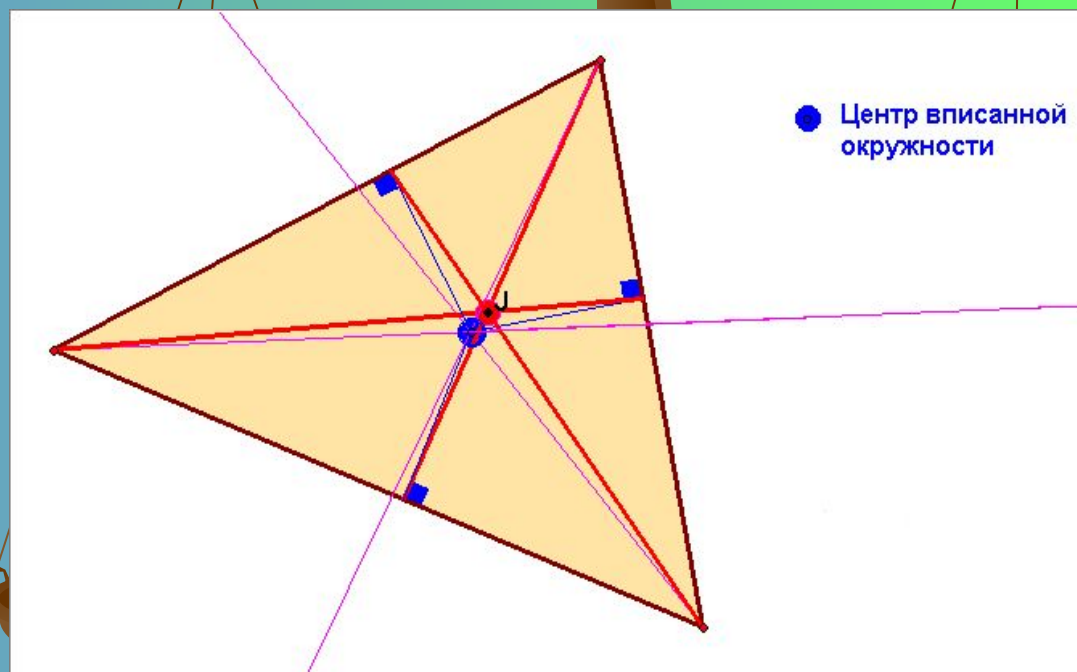
FA = 3.058 CM
FB = 2.535 CM
FC = 2.564 CM
FA+FB+FC = 8.157 CM

DB = 2.846 CM
DA = 2.303 CM
DC = 3.171 CM
DA+DB+DC = 8.32 CM



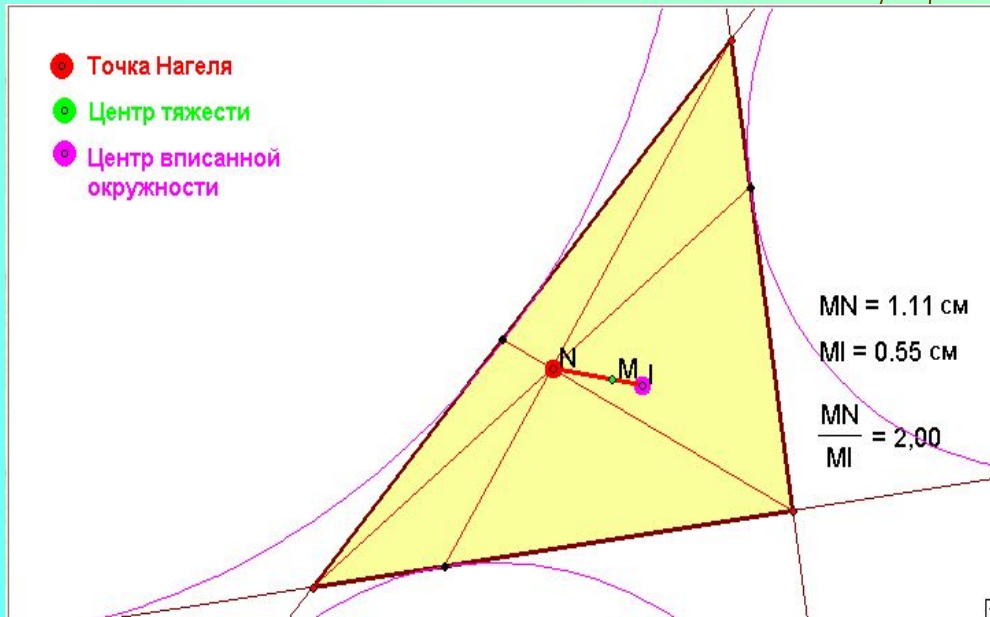
ТОЧКА ЖЕРГОННА

- Три отрезка, соединяющие вершины треугольника с точками, в которых вписанная в него окружность касается соответственно противоположных вершинам сторон, пересекаются в одной точке J . Она называется *точкой Жергонна*.



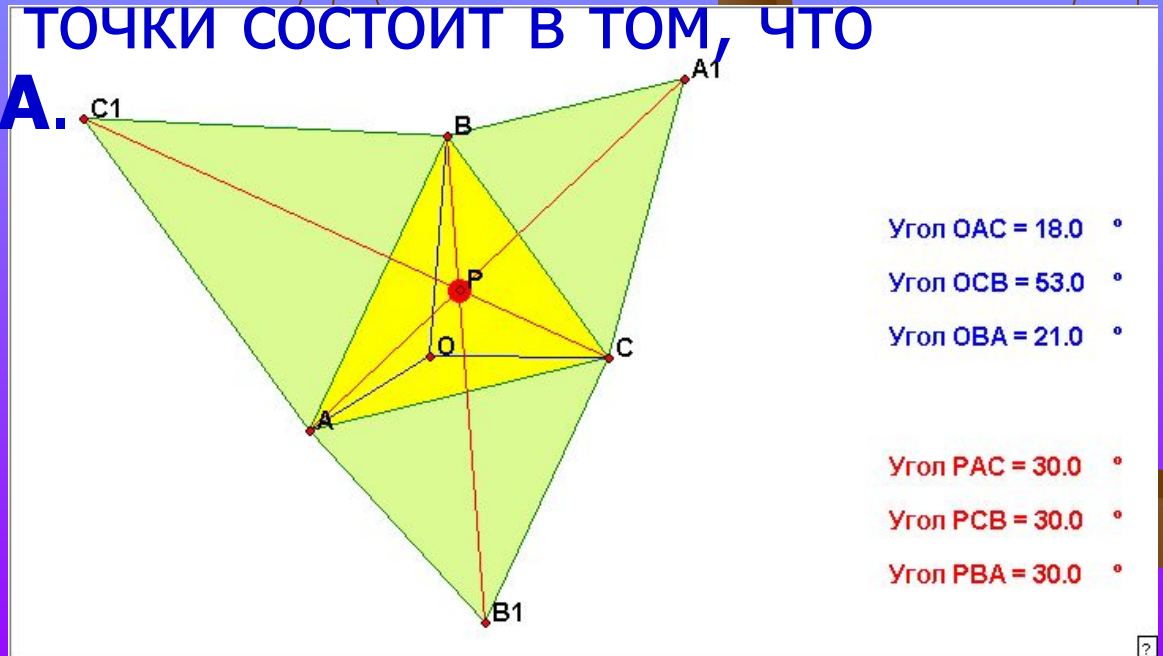
ТОЧКА НАГЕЛЯ

Отрезки, соединяющие каждую из вершин треугольника с точкой, в которой противоположная сторона касается соответствующей невписанной окружности, пересекаются в одной точке ***N*** – ***точке Нагеля***. Она интересна тем, что отрезок ***NI***, где ***I*** – ***центр вписанной окружности***, проходит через ***центр тяжести M*** (точка пересечения медиан) треугольника и делится им в отношении $NM : MI = 2 : 1$.



ТОЧКА БРОКАРА

Если на сторонах треугольника **ABC** внешним образом построить подобные ему треугольники **CA1B**, **CAB1** и **C1AB** (углы при первых вершинах всех четырех треугольников равны и т.д.), то прямые **AA1**, **BB1** и **CC1** пересекутся в точке **P**, которую называют **точкой Брокера**. Одна из особенностей этой точки состоит в том, что **PAС = PCB = PBA**.



ПРЯМАЯ СИМСОНА

■ *Основания перпендикуляров*, опущенных из точки P *описанной окружности* треугольника на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой – *Прямой Симсона*.

Верно и обратное утверждение: если *основания перпендикуляров*, опущенных из некоторой точки P на стороны треугольника или их продолжения, лежат на одной прямой, то точка P лежит на *описанной окружности* треугольника.

