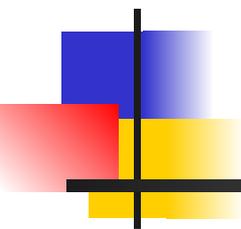


# Стохастическая линия в школьном курсе математики.



---

работа учителя математики МОУ  
СОШ №15  
Губиной Галины Александровны

## Распределение часов на изучение темы (по УМК Зубаревой и А.Г. Мордковича)

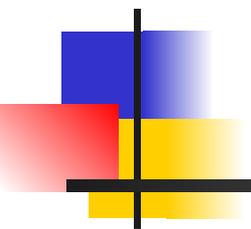
<b>Класс</b>	<b>Кол-во часов</b>	<b>Изучаемые разделы</b>
<b>5 класс</b>	<b>4 часа</b>	<b>Элементы комбинаторики</b> Достоверные, невозможные и случайные события. Перебор вариантов, дерево вариантов.
<b>6 класс</b>	<b>6 часов</b>	<b>Элементы теории вероятностей</b> Число всех возможных исходов, правило умножения. Благоприятные и неблагоприятные исходы. Подсчет вероятности события в простейших случаях.

## Распределение часов на изучение темы (по УМК А.Г. Мордковича)

<b>Класс</b>	<b>Кол-во часов</b>	<b>Изучаемые разделы</b>
<b>7 класс</b>	<b>0</b>	<b>нет</b>
<b>8 класс</b>	<b>0</b>	<b>нет</b>
<b>9 класс</b>	<b>12 часов</b>	<b>Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.</b> Комбинаторные задачи. Элементы статистики. Простейшие вероятностные задачи. Экспериментальные данные и вероятности событий.
<b>9 класс</b> (пред- профильная подготовка)	<b>18 часов</b>	<b>Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.</b> Комбинаторные задачи. Элементы статистики. Простейшие вероятностные задачи. Экспериментальные данные и вероятности событий.

# Распределение часов на изучение темы (по УМК А.Г. Мордковича)

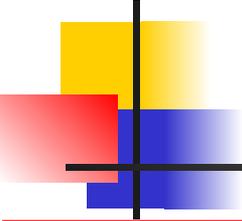
<b>Класс</b>	<b>Кол-во часов</b>	<b>Изучаемые разделы</b>
<b>10 класс базовый</b>	<b>0</b>	<b>нет</b>
<b>10 класс профильный</b>	<b>7/10/18 часов</b>	<b>Комбинаторика и вероятность.</b> Правило умножения. Комбинаторные задачи. Перестановки и факториалы. Выбор нескольких элементов. Сочетания и размещения. Бином Ньютона. Случайные события и их вероятности.
<b>11 класс базовый</b>	<b>15 часов</b>	<b>Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.</b> Статистическая обработка данных. Простейшие вероятностные задачи. Сочетания и размещения. Бином Ньютона. Случайные события и их вероятности.
<b>11 класс профильный</b>	<b>9/11/13 часов</b>	<b>Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.</b> Вероятность и геометрия. Независимые повторения испытаний с двумя исходами. Статистические методы обработки информации. Гауссова кривая. Закон больших чисел.



# Введение в вероятность

---

События.



# Определения.

---

Событие, которое в данном опыте обязательно произойдет, называют **достоверным событием**.

Событие, которое в данном опыте произойти не может, называют **невозможным событием**.

Событие, которое в данном опыте может произойти, а может не произойти, называют **случайным событием**.

# Упражнение.

В двух урнах имеется по семь шаров, в каждой – семи различных цветов: красного, оранжевого, желтого, зеленого, голубого, синего, фиолетового. Из каждой урны одновременно вынимают по одному шару.

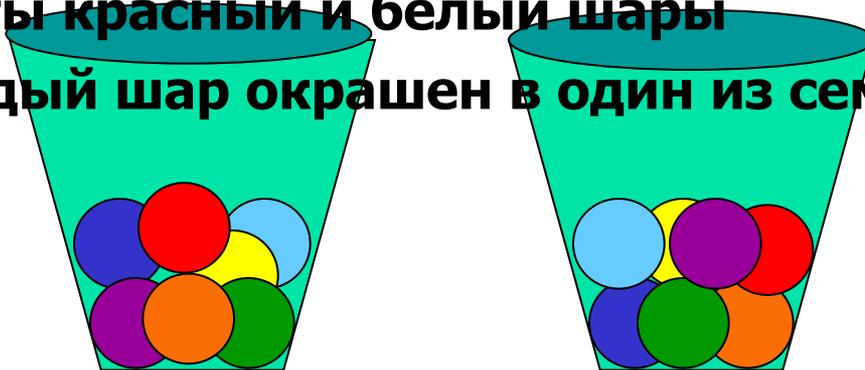
Охарактеризуйте событие, о котором идет речь, как **достоверное**, **невозможное** или **случайное**.

а) вынутые шары одного цвета

б) вынутые шары разных цветов

в) вынуты красный и белый шары

г) каждый шар окрашен в один из семи цветов радуги



# Задача

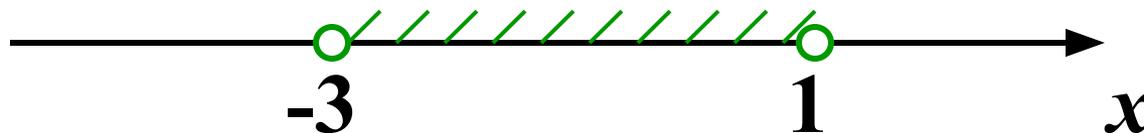
Опыт состоит в том, что из интервала  $(-3;1)$  наугад выбирают число  $x$ .

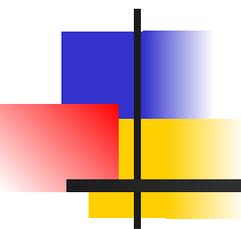
Охарактеризуйте событие, о котором идет речь, как **достоверное**, **невозможное** или **случайное**.

а)  $x$  – целое число.                      б)  $x$  – натуральное число.

в)  $x$  удовлетворяет двойному неравенству  $-3 < x < 1$ .

г)  $x$  удовлетворяет неравенству  $x > 0,99$ .





# Введение в вероятность

---

Комбинаторные задачи.

# Задача

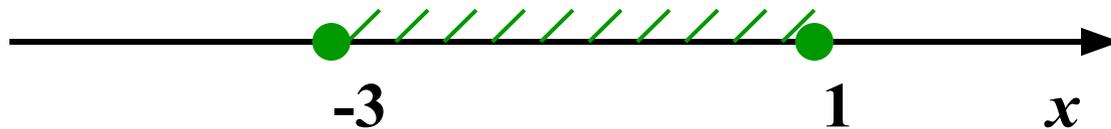
а) Из целых чисел, принадлежащих интервалу  $(-3; 1)$ , наугад выбирают одно число. Сколькими способами это можно сделать?



*Ответ: 3 способами (либо это число -2, либо -1, либо 0).*

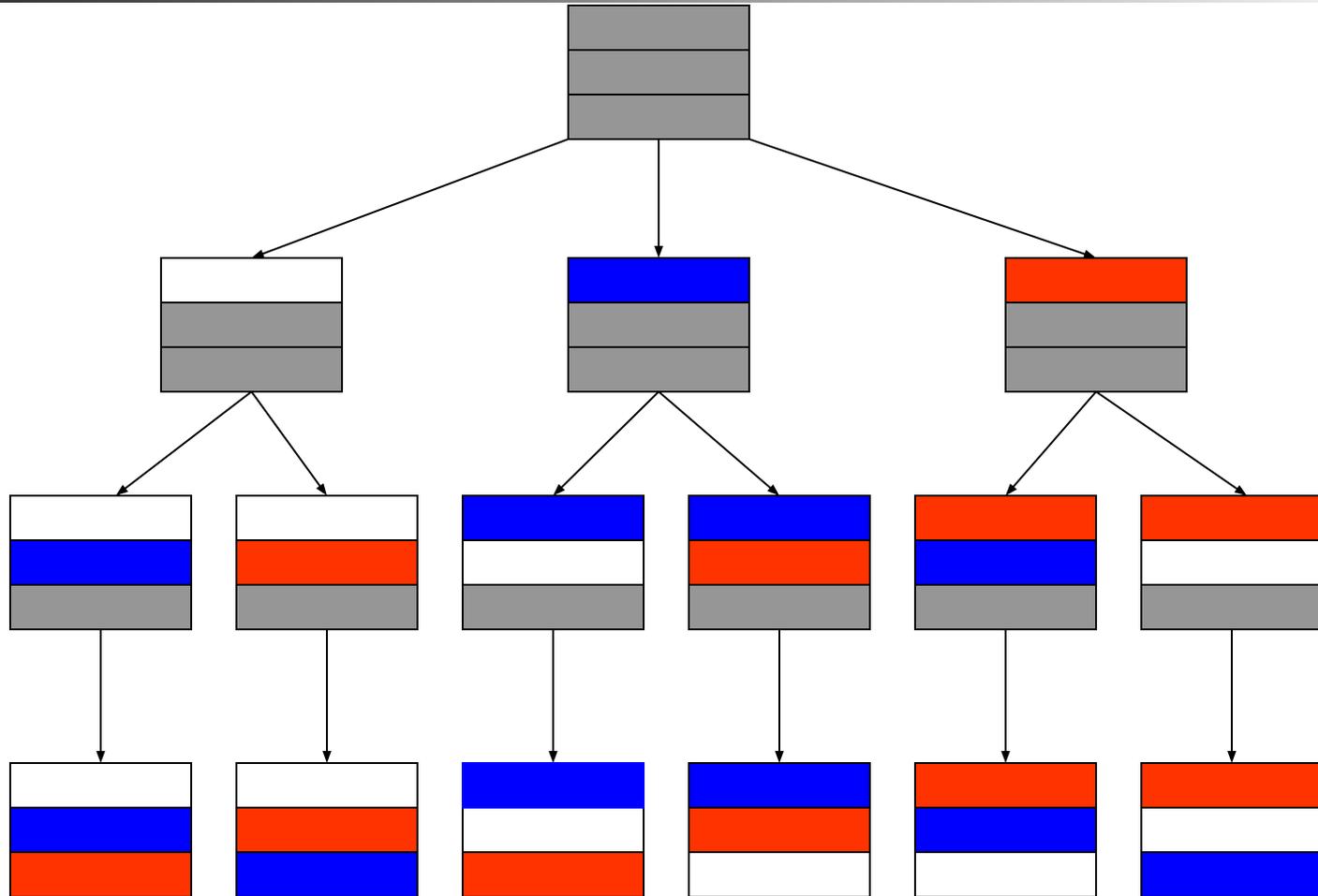
б) Из целых чисел, принадлежащих отрезку  $[-3; 1]$ , наугад выбирают одно число.

Сколькими способами это можно сделать?



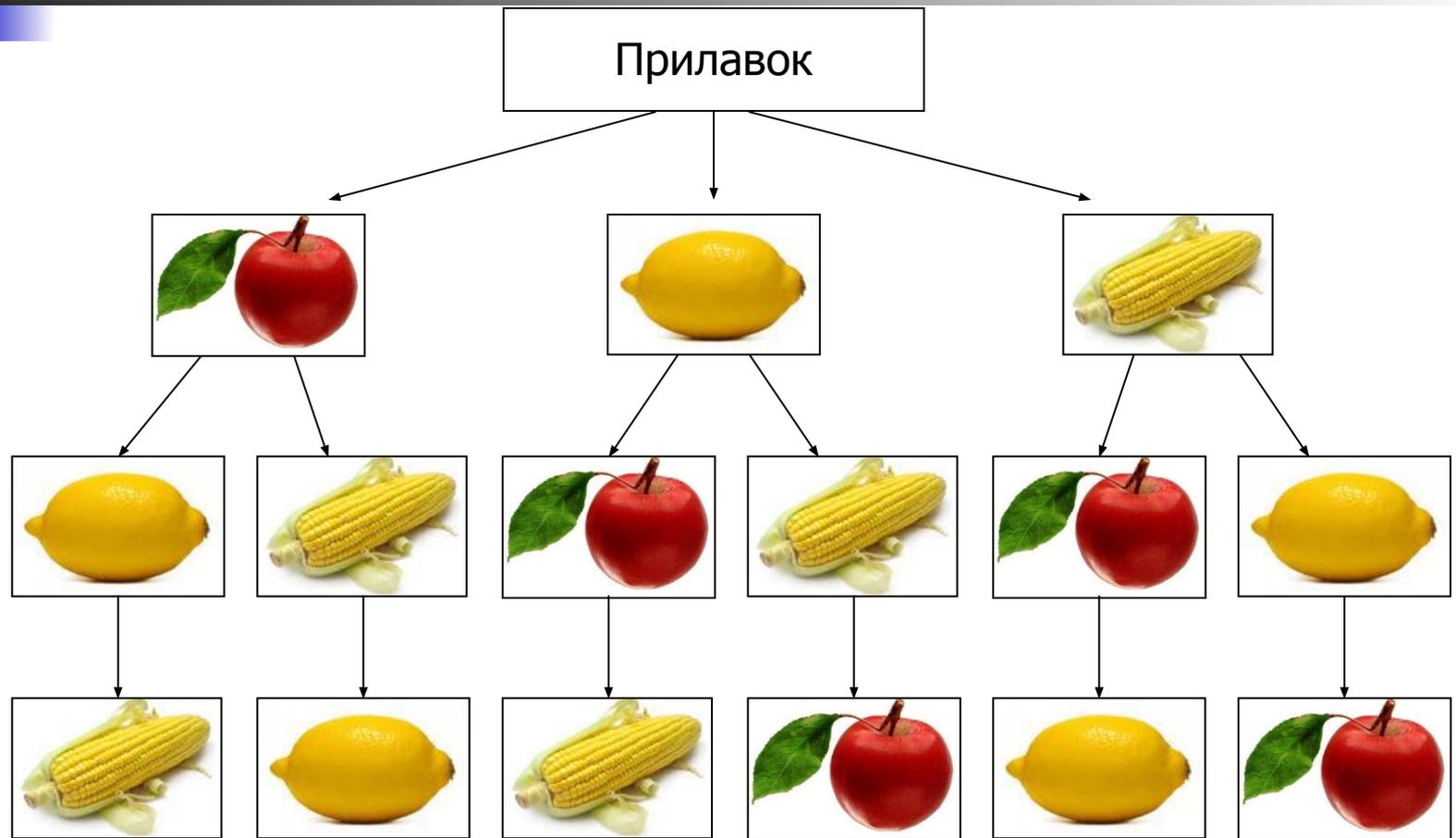
*Ответ: 5 способами (это либо число -3, либо -2, либо -1, либо 0, либо 1).*

**Задача.** Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде трех горизонтальных полос одинаковой ширины разных цветов – белого, синего, красного. Сколько стран могут использовать такую символику, при условии, что у каждой страны – свой флаг?



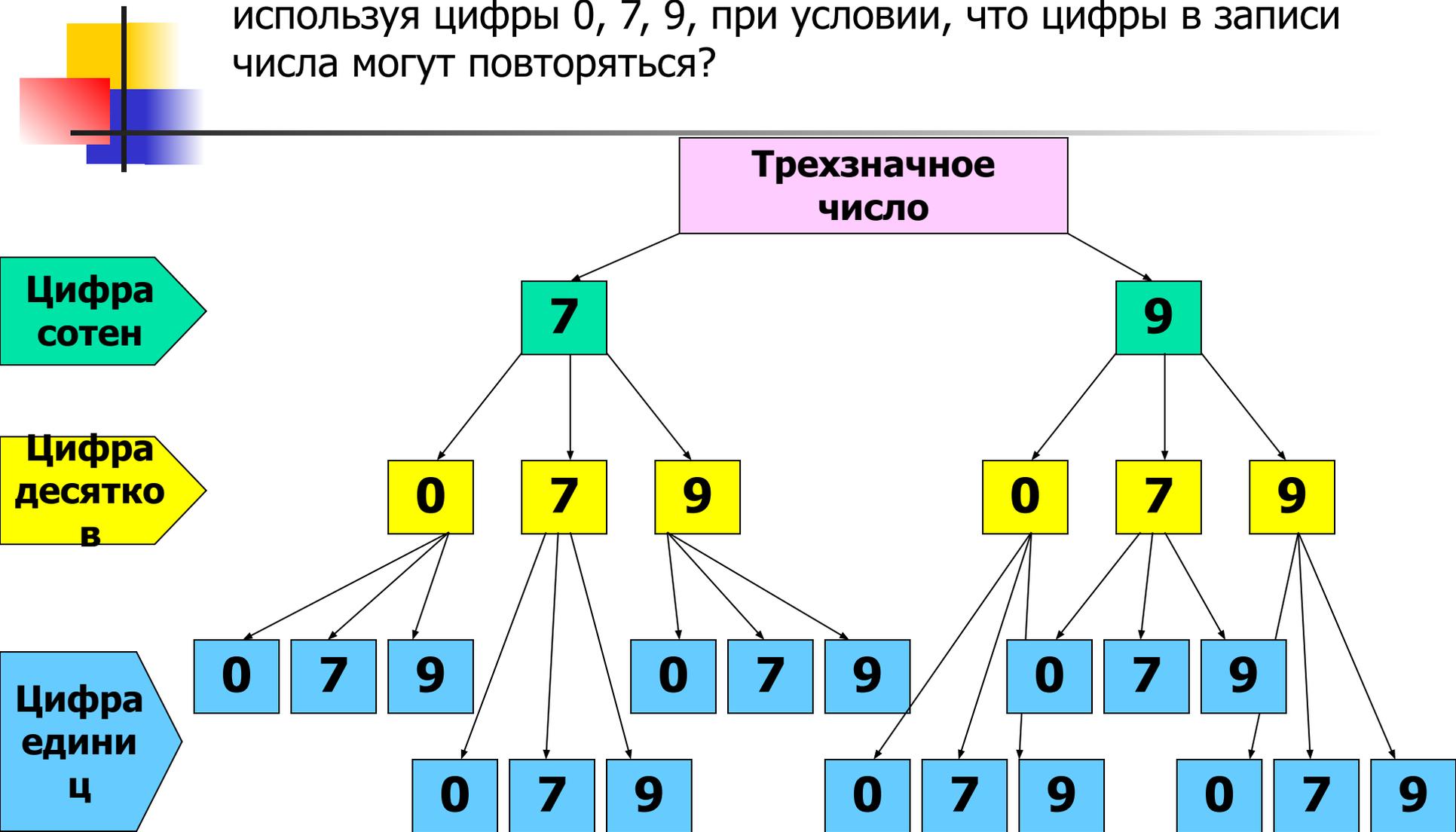
**Всего  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  вариантов.**

**Задание** Запишите варианты, которыми можно разложить в один ряд на прилавке продукты трех видов: яблоки, лимоны, кукурузу. Изобразите дерево этих вариантов. Сколько всего вариантов получилось?



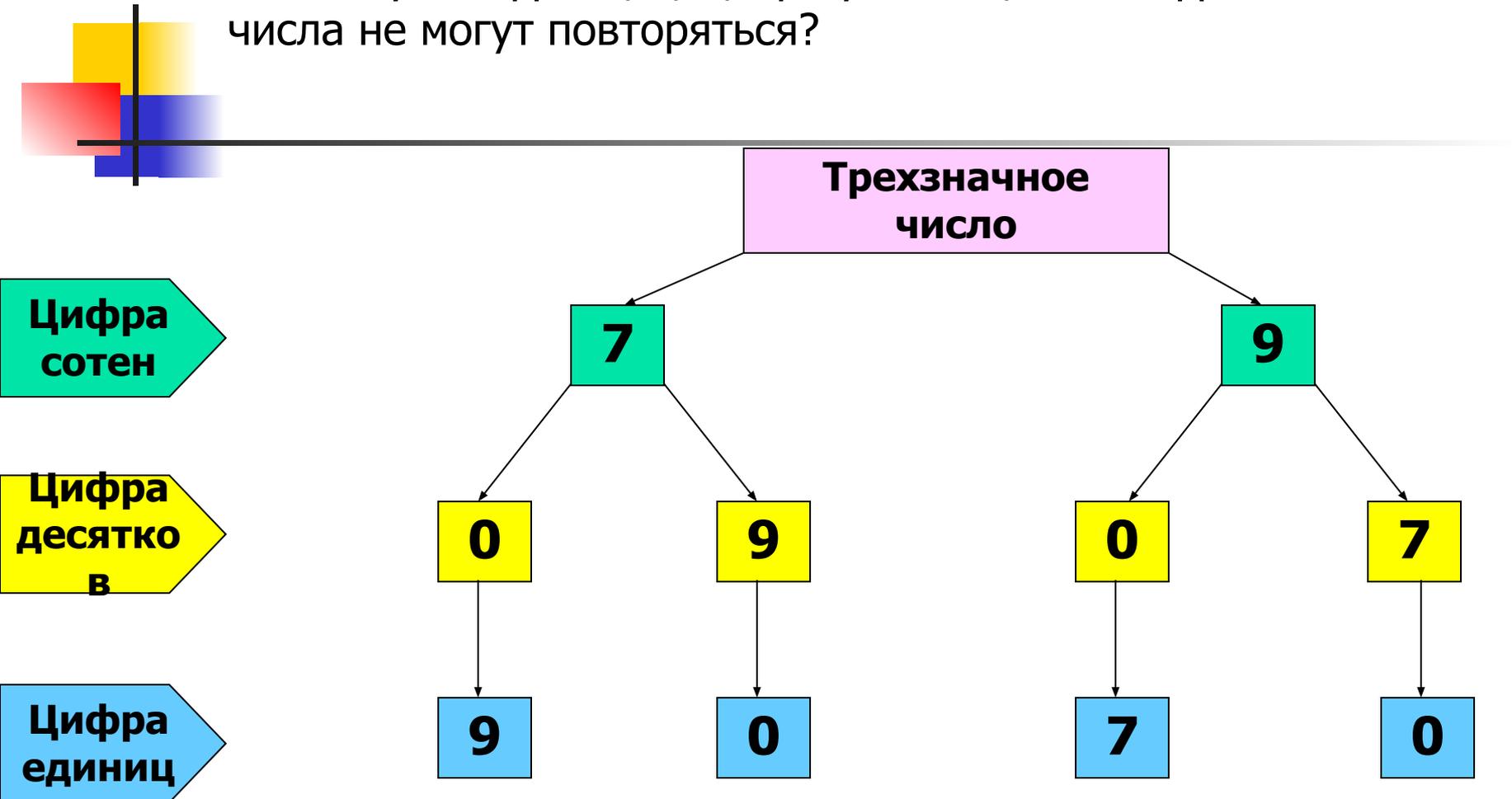
Всего  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  разных вариантов.

**Задача.** Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 0, 7, 9, при условии, что цифры в записи числа могут повторяться?



**Всего  $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$  трехзначных чисел.**

**Задача.** Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 0, 7, 9, при условии, что цифры в записи числа не могут повторяться?



**Всего  $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$  трехзначных числа.**



# ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ

---

**Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний А и В, следует перемножить число всех исходов испытания А и число всех исходов испытания В.**

# Задача

В двух урнах имеется по семь шаров, в каждой – семи различных цветов: красного, оранжевого, желтого, зеленого, голубого, синего, фиолетового. Из каждой урны одновременно вынимают по одному шару.

а) сколько существует комбинаций, при которых вынутые шары одного цвета?

б) сколько существует комбинаций, при которых вынутые шары разных цветов?

в) сколько всего существует различных комбинаций вынутых шаров?



# Задача

В 6 «А» классе в пятницу

6 уроков: математика, информатика, русский язык, английский язык, история, физкультура.

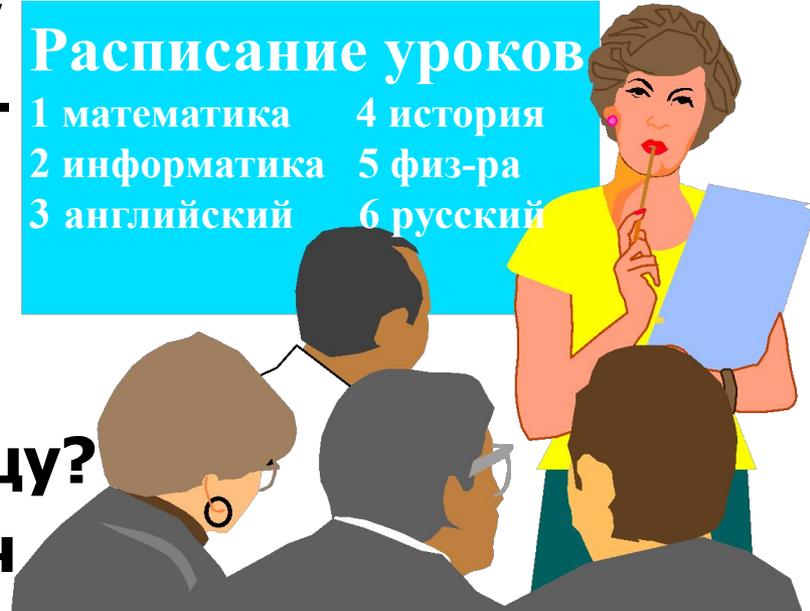
Сколько всего можно составить вариантов расписания на пятницу?

Сколько времени потратит завуч

на запись всех вариантов, если известно, что на запись одного варианта у него уходит 30 секунд?

## Расписание уроков

1 математика	4 история
2 информатика	5 физ-ра
3 английский	6 русский



**Всего  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$  вариантов**

**$720 \cdot 0,5 \text{ мин} = 360 \text{ мин} = 6 \text{ ч}$**



# Определение.

---

**Произведение первых подряд идущих  $n$  натуральных чисел обозначают  $n!$**

$$1! = 1,$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2,$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120,$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

**и т.д.**



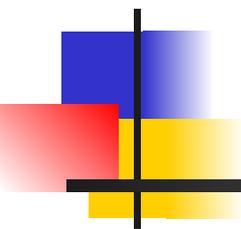
# Теорема.

---

**n** различных элементов можно расставить по одному на **n** различных мест ровно **n!** способами.

Число перестановок множества из **n** элементов, обозначают **P<sub>n</sub>**.

$$P_n = n!$$



# Элементы теории вероятностей

---

Первые представления о  
вероятности.

# Классическое

## определение вероятности

---

**Вероятностью события  $A$  при проведении некоторого испытания называют отношение числа исходов, в результате которых наступает событие  $A$ , к общему числу исходов этого испытания.**

$$P(A) = \frac{N(A)}{N}$$

# Задача

В двух урнах имеется по семь шаров, в каждой – семи различных цветов: красного, оранжевого, желтого, зеленого, голубого, синего, фиолетового. Из каждой урны одновременно вынимают по одному шару.

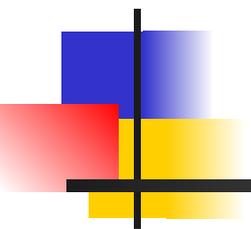
а) какова вероятность того, что вынуты шары одного цвета?

б) какова вероятность того, что вынутые шары разных цветов?

в) какова вероятность того, что один из двух вынутых шаров - белый?

г) какова вероятность того, что один из двух вынутых шаров – желтый, а другой - красный?





# Элементы статистики

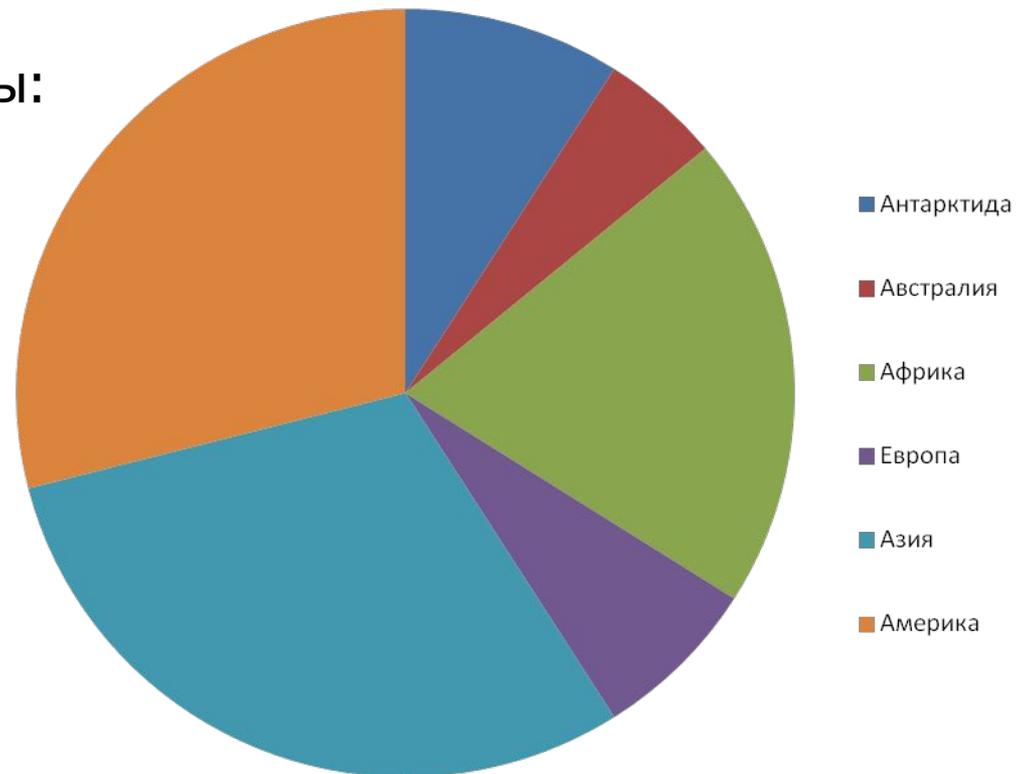
---

# Диаграммы и графики

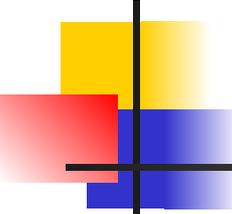
На круговой диаграмме показано распределение земной суши, составляющей около 150 млн.кв.км, между шестью частями света.

Ответьте на следующие вопросы:

- Какая часть света самая большая по площади?
- Какова приблизительно площадь Африки?
- Какова приблизительно площадь материка Евразия?







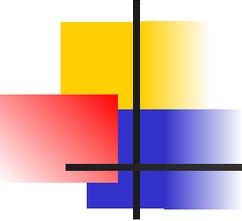
# Данные из классного журнала

---

За январь месяц текущего учебного года учащиеся класса получили следующие оценки:

4 3 3 3 5 3 4 3 4 4 3 2 4 5 3 4 4 3 4 4 4 4 5 5 2 5 3 4 3 4 2  
4 5 3 4 3 2 3 5 5 5 5 5 3 3 2 3 3 4 5 4 4 4 5 3 2 4 5 5 4 5 5  
4 5 5 4 5 5 4 4 2 2 2 2 5 4 5 4 3 4 4 4 5 3 5 5 5 3 4 5 4 3 5  
4 4 3 4 3 4 3 2 3 3 3 3 3 3 3 4 3 4 5 3 5 3 3 4 5 5 5 4 4 3 3 2  
4 3 5 4 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 5 4 3 3 3 5 3 3 5 5 4 3 4 4 3 4  
5 4 3 5 5 3 4 4 4 3 3 4 3 3 4 4 3 4 5 5 5 3 5 5 4 3 4 5 3 4 5  
5 3 4 4 5 5 4 3 3 5 5 5 5 5 3 3 4 4 2 4 3 4 4 3 5 4 3 2 4 5 3  
4 5 3 5 5 5 3 4 4 4 4 4 4 4 3 2 2 5 3 5 3 5 4 2 4 4 5 5 4 5 4  
4 4 5 3 3 3 4 3 2 3 2 2 5 5 5 3 3 4 3 3 4 4 4 4 4 4 3 3 3 3 5  
5 4 5 5 3 3 3 3 3 4 4 4 3 4 3 4 3 4 4 3 3 4 4 3 4 5 4 3 3 3 3

# Статистические методы обработки информации.

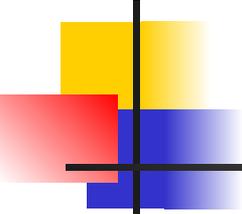


---

1. **Группировка информации** (данные измерений упорядочивают и группируют).
2. **Табличное представление информации** (составляются таблицы распределения данных).
3. **Графическое представление информации** (таблицы распределения переводят в графики распределения).
4. **Числовые характеристики данных измерения** (составляется паспорт данных измерения, в котором собраны числовые характеристики полученной информации).

# Числовые характеристики данных измерения.

1. **Размах измерения** – разность между максимальной и минимальной вариантами.
2. **Мода измерения** – та варианта, которая в измерении встретилась чаще других.
3. **Среднее значение** – среднее арифметическое данных измерения.
4. **Медиана измерения** – в случае нечетного количества данных: варианта, разделяющая упорядоченный набор данных на две части, одинаковые по численности; в случае четного количества данных: среднее арифметическое двух вариантов, разделяющих упорядоченный набор данных на две части, одинаковые по численности.
5. **Объем измерения** – сумма всех кратностей, т.е. количество всех данных измерения.
6. **Частота варианты** – отношение кратности варианты к объему измерения.

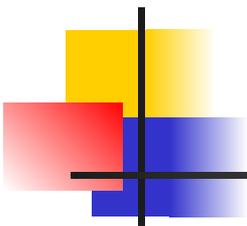


## Таблица распределения.

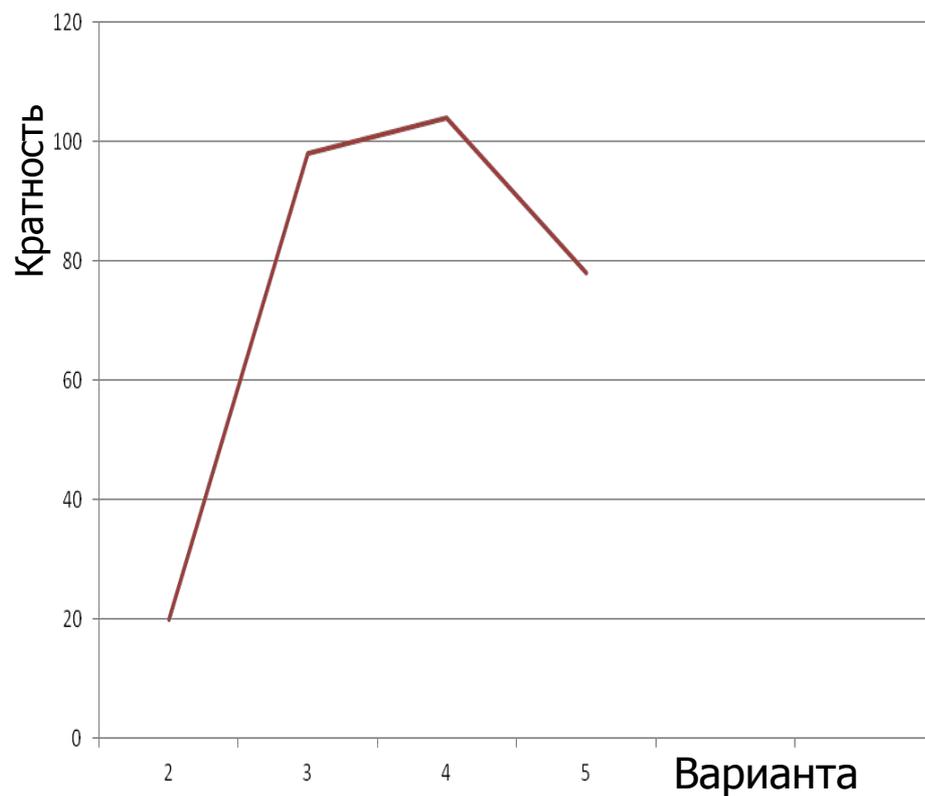
<b>Варианта (оценка)</b>	<b>Кратность</b>	<b>Частота в %</b>
2	20	6%
3	98	33%
4	104	35%
5	78	26%

Объем измерения 300

# График распределения (многоугольник кратности)

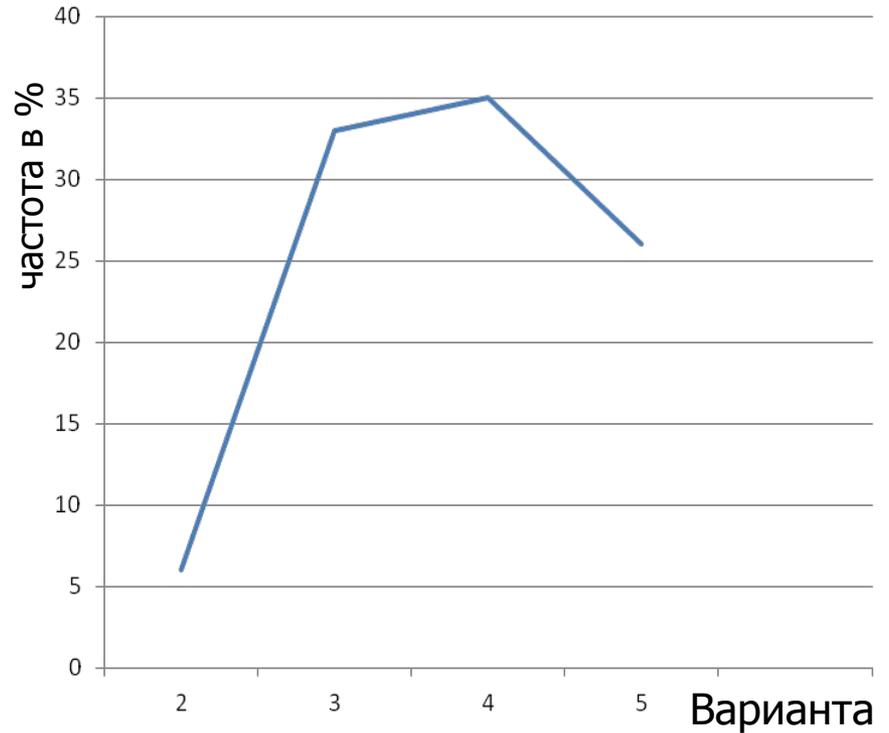


Варианта (оценка)	Кратность	Частота, %
2	20	6
3	98	33
4	104	35
5	78	26



# Полигон частот в процентах

Варианта (оценка)	Кратность	Частота, %
2	20	6
3	98	33
4	104	35
5	78	26



# Данные из классного журнала

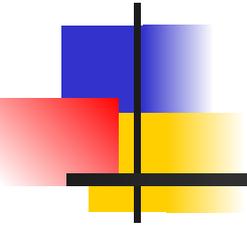
Количество отсутствующих за каждый учебный день января: 3 1 4 4 4 0 0 0 8 3 3 1 2 1 2 2 3.

Варианта	Кратность	Частота
0	3	0,2
1	4	0,27
2	3	0,2
3	4	0,27
8	1	0,06



Комбинаторные задачи в  
геометрии.  
Геометрическая  
вероятность.

---



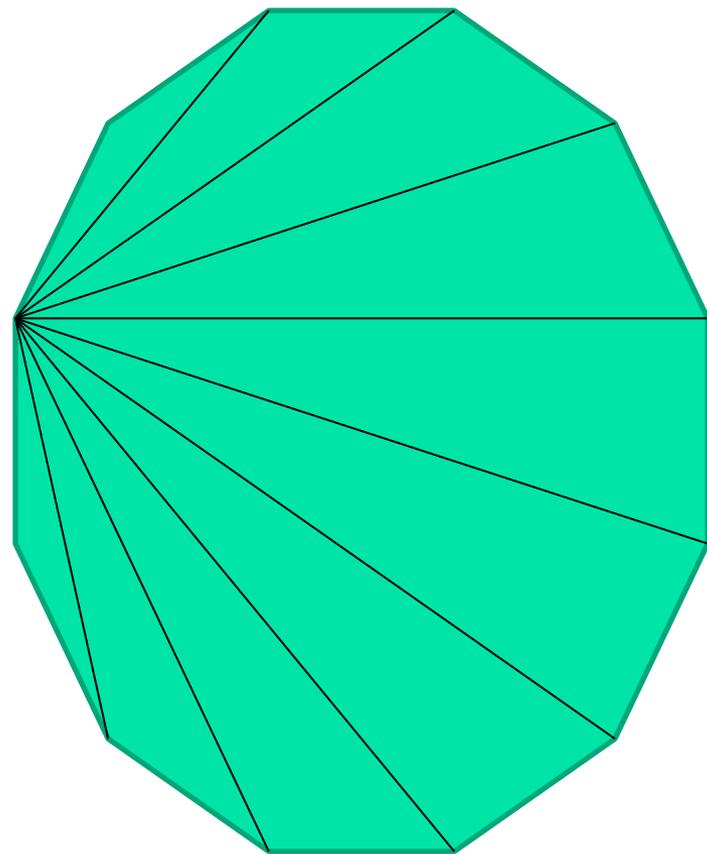
# Ответьте на вопросы:

- Сколько диагоналей из одной вершины можно провести в выпуклом  $n$ -угольнике?
- Сколько треугольников при этом образуется?
- Сколько всего диагоналей в выпуклом  $n$ -угольнике?

$$n - 3$$

$$n - 2$$

$$\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$



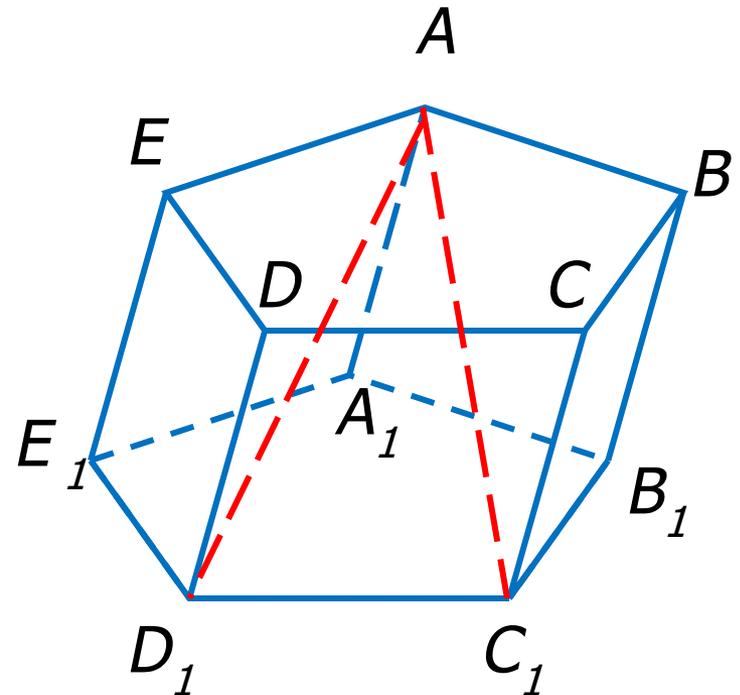
# Определение диагонали призмы.

## Диагональю призмы

называется отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани.

Сколько всего диагоналей у  $n$ -угольной призмы?

$$n \cdot (n - 3)$$



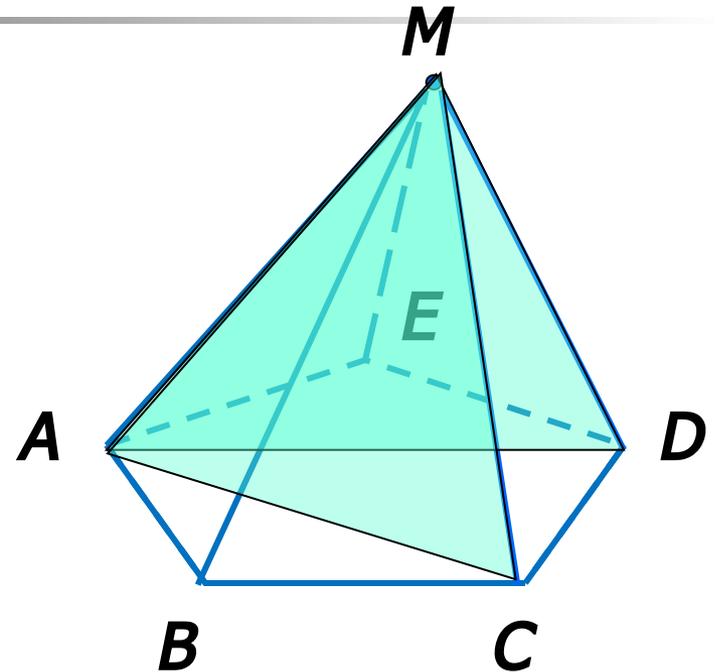
# Диагональные сечения пирамиды.

**Диагональные сечения** пирамиды – это сечения плоскостями, проходящими через два несоседних боковых ребра.

**Диагональные сечения** пирамиды – треугольники.

Сколько всего диагональных сечений у  $n$ -угольной пирамиды?

$$\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$



# Геометрическая вероятность.

Вероятность того, что наугад выбранная точка отрезка  $MN$  попадет в отрезок  $CD$ , содержащийся в отрезке  $MN$  равна отношению длины отрезка  $CD$  к длине отрезка  $MN$ .

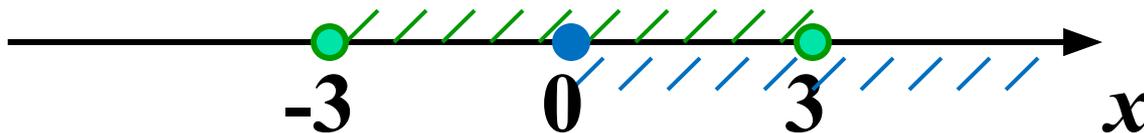
$$P(A) = \frac{CD}{MN}$$



Случайным образом выбирается одно из решений неравенства  $x^2 \leq 9$ . Найти вероятность того, что оно является решением неравенства  $x^3 + 2x \geq 0$ .

1)  $x^2 \leq 9, x \in [-3;3]$

2)  $x^3 + 2x \geq 0, x \in [0;+\infty)$



Событие  $A$  – точка из отрезка  $[-3;3]$  попадет в отрезок  $[0;3]$ .

$$p(A) = \frac{3}{6} = 0,5$$

# Геометрическая вероятность.

**Вероятность того, что наугад выбранная точка фигуры  $F$  на плоскости попадет в некоторую фигуру  $G$ , содержащейся в фигуре  $F$  равна отношению площади фигуры  $G$  к площади фигуры  $F$ .**

$$P(A) = \frac{S_G}{S_F}$$

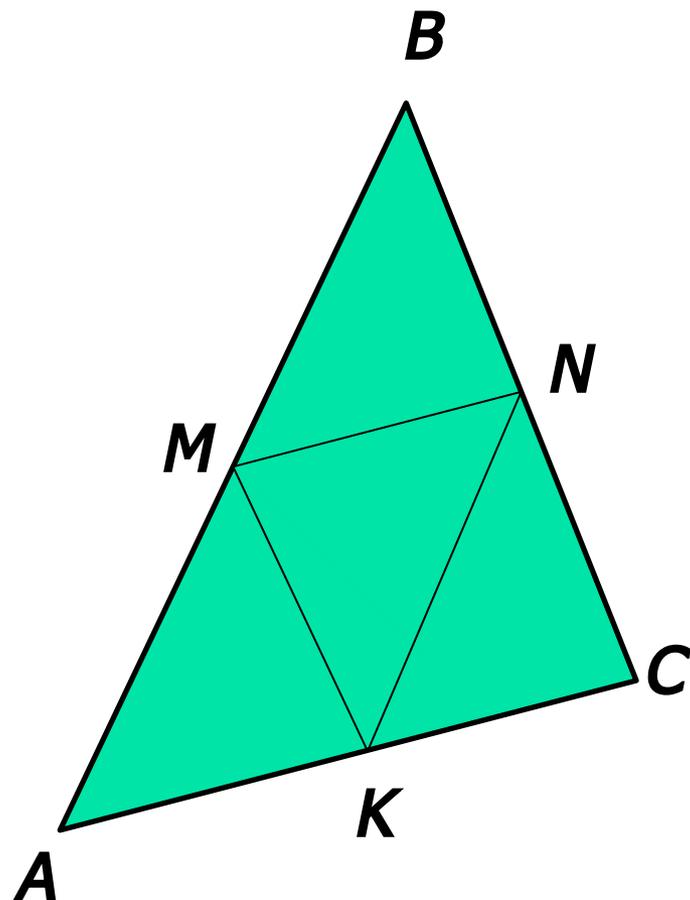


Из треугольника  $ABC$  случайным образом выбирается точка  $X$ . Найти вероятность того, что она принадлежит треугольнику, вершинами которого являются середины сторон треугольника.

Пусть  $S_{MNK} = Q$ ,

тогда  $S_{ABC} = 4Q$

$$P = \frac{S_{MNK}}{S_{ABC}} = \frac{Q}{4Q} = 0,25$$

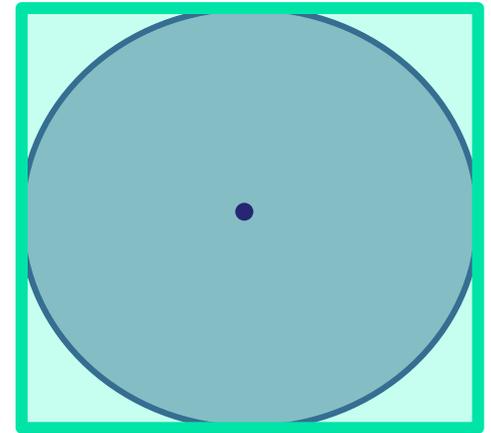


Внутри квадрата случайным образом выбирается точка. Найти вероятность того, что эта точка принадлежит вписанному в квадрат кругу.

$$S_{\text{круга}} = \pi r^2$$

$$S_{\text{квадрата}} = a^2 = (2r)^2 = 4r^2$$

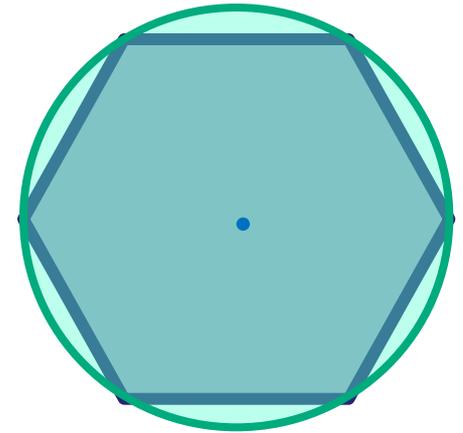
$$P = \frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{квадрата}}} = \frac{\pi}{4} \approx 0,785$$



Внутри круга случайным образом выбирается точка. Найти вероятность того, что эта точка принадлежит вписанному в круг правильному шестиугольнику.

$$S_6 = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\text{круга}} = \pi R^2 = \pi a^2$$



$$P = \frac{S_6}{S_{\text{круга}}} = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2\pi a^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,81$$

# Геометрическая вероятность.

---

**Вероятность того, что наугад выбранная точка фигуры  $F$  в пространстве попадет в некоторую фигуру  $G$ , содержащейся в фигуре  $F$ , равна отношению объема фигуры  $G$  к объему фигуры  $F$ .**

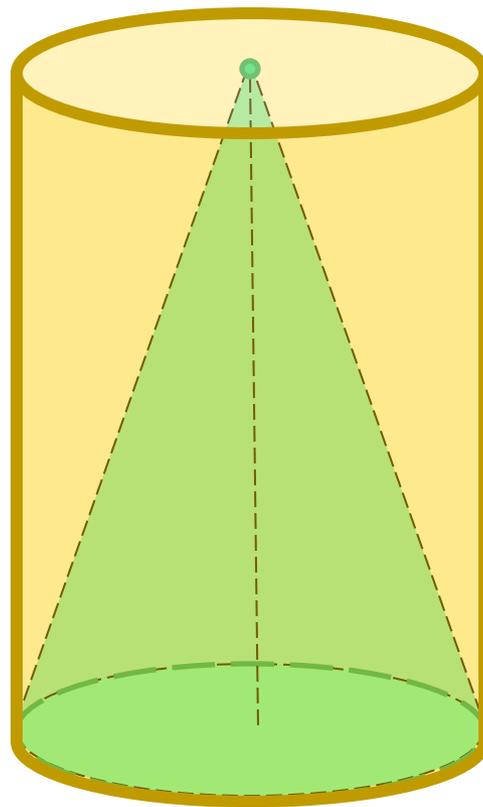
$$P(A) = \frac{V_G}{V_F}$$

Основание конуса совпадает с основанием цилиндра, а вершина находится в центре другого основания цилиндра. Какова вероятность того, что выбранная наугад внутри цилиндра точка принадлежит конусу?

$$V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$P = \frac{V_{\text{кон}}}{V_{\text{цил}}} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$



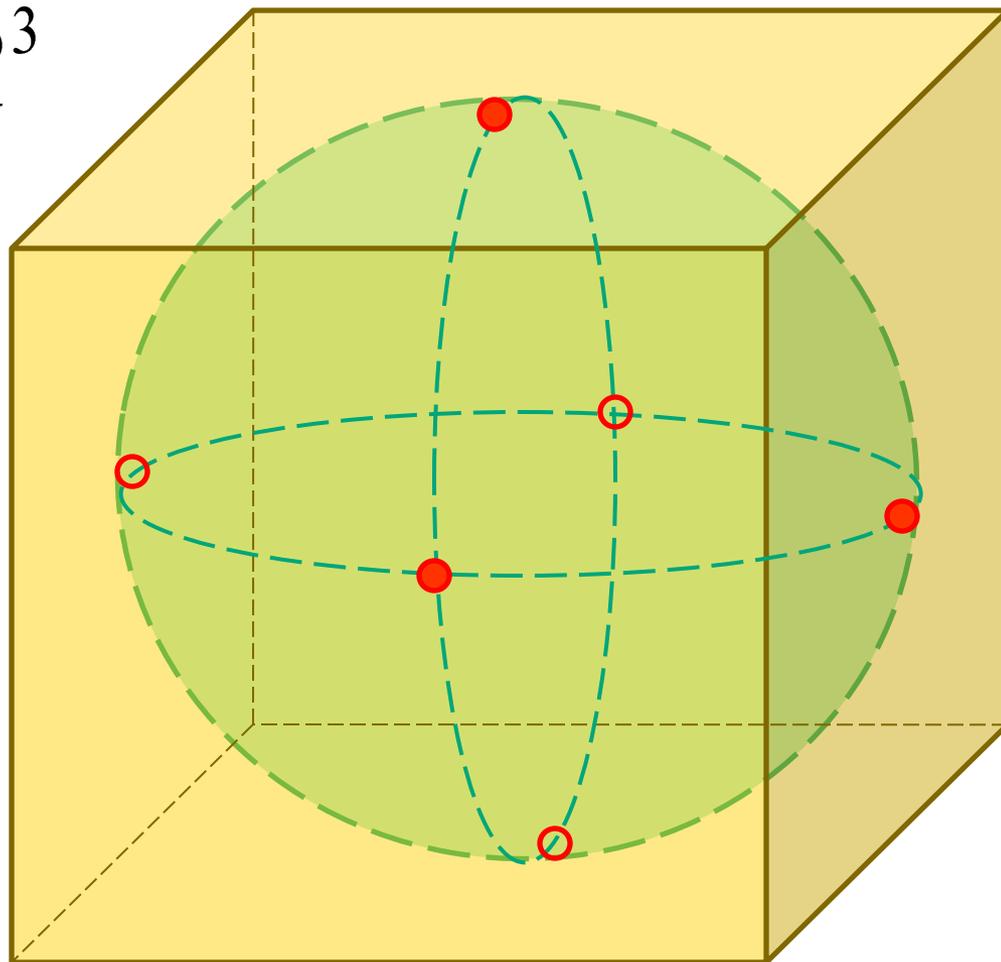
В куб вписан шар.

Какова вероятность того, что выбранная наугад внутри куба точка принадлежит шару?

$$V_{\kappa} = a^3 = (2R)^3 = 8R^3$$

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$P = \frac{V_{\text{ш}}}{V_{\kappa}} = \frac{\pi}{6} \approx 0,52$$



В шар радиуса  $R = 5$  вписан цилиндр, радиус основания которого  $r = 3$ .

Какова вероятность того, что выбранная наугад внутри шара точка принадлежит цилиндру?

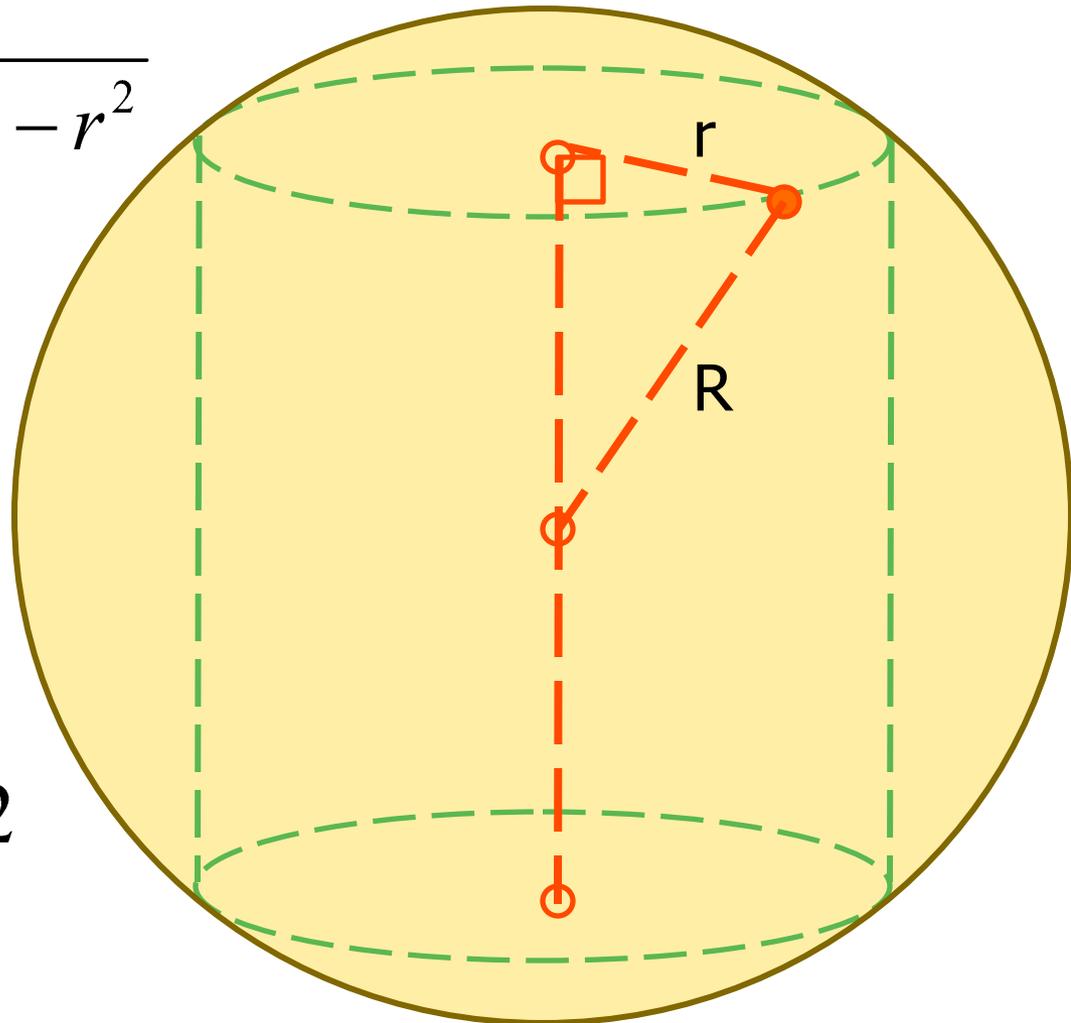
$$V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi r^2 \cdot 2\sqrt{R^2 - r^2}$$

$$V_{\text{цил}} = 72\pi$$

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_{\text{ш}} = \frac{500\pi}{3}$$

$$P = \frac{V_{\text{цил}}}{V_{\text{ш}}} = \frac{216}{500} = 0,432$$



# Литература

1. Программы. Математика 5-6 классы. Алгебра 7-9 классы. Алгебра и начала анализа 10-11 классы./ авт.-сост. И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 2009.
2. Теория вероятностей и статистика/ Ю. Н. Тюрин, А. А. Макаров, И. Р. Высоцкий, И. В. Яценко. – М. МНЦМО: АО «Московские учебники», 2004.
3. Математика 5 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений./ И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 2004.
4. Математика 6 класс: Учебник для общеобразовательных учреждений./ И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 2005.
5. Алгебра 9 класс : Учебник для общеобразовательных учреждений. / А. Г. Мордкович. - М.: Мнемозина, 2009.
6. Алгебра и начала математического анализа 10 класс : Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П.В. Семенов - М.: Мнемозина, 2010.
7. Алгебра и начала математического анализа 11 класс : Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П.В. Семенов - М.: Мнемозина, 2010.
8. Лекции «Вероятность и статистика в курсе математики общеобразовательной школы»./ Бунимович Е.А., Булычев В.А. - М. «Первое сентября», 2005.
9. Бунимович Е.А., Суворова С.Б. методические указания к теме «Статистические исследования», журнал «Математика в школе» №3, 2003 г.