Математика.
Лекция 3.

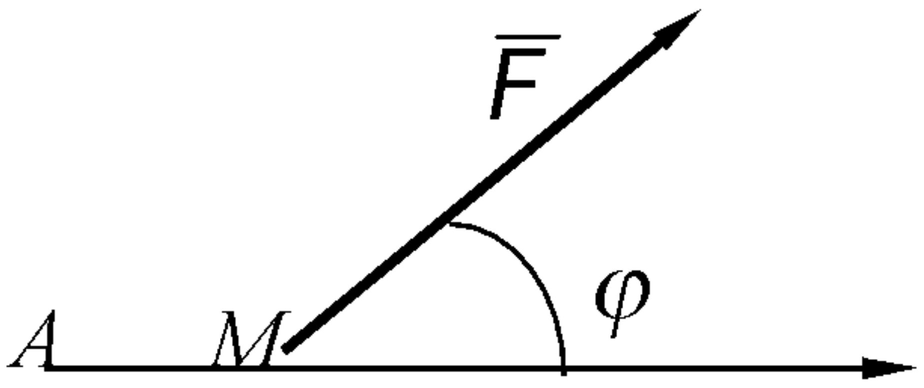
Скалярное и векторное произведения векторов.

- В отличие от умножения двух чисел операция умножения вектора на вектор может быть определена двумя различными способами, каждый из которых имеет своё математическое и прикладное значение.

Скалярным произведением векторов называют число, равное произведению модулей перемножаемых векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Часто для обозначения скалярного произведения употребляют и запись: $(\bar{a}, \bar{b})$



Рассмотрим пример из механики, приводящий к понятию скалярного произведения. Пусть материальная точка $\boldsymbol{M}$ движется по прямой из положения $\boldsymbol{A}$ в положение B, проходя при этом расстояние $\boldsymbol{s}$, а на точку действует постоянная сила $\overline{F}$. Работа, совершаемая при этом перемещении силой $\overline{F}$, будет равна:

$A = \left|\overline{F}\right| \cdot s \cdot \cos\varphi$. Если ввести вектор перемещения $\overline{AB}$, то получим: $A = \overline{F} \cdot \overline{AB}$

Свойства скалярного произведения.

- Скалярное произведение двух векторов обладает переместительным свойством :

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \cos\varphi = \left|\overline{b}\right| \cdot \left|\overline{a}\right| \cdot \cos\varphi = \overline{b} \cdot \overline{a}.$$

Свойства скалярного произведения.

- Скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного из векторов и проекции другого вектора на направление первого:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \text{Пр}_{\overline{a}} \overline{b} = \left|\overline{b}\right| \cdot \text{Пр}_{\overline{b}} \overline{a}.$$

Свойства скалярного произведения.

- Проекция вектора на некоторое направление равна скалярному произведению единичного вектора рассматриваемого направления и данного вектора.

$$Пр_{\overline{a}^o}\overline{b} = \overline{a}^o \cdot \overline{b}$$

Свойства скалярного произведения.

- Скалярное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя.

$$\lambda \cdot \left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \left(\lambda \cdot \overline{a}, \overline{b}\right) = \left(\overline{a}, \lambda \cdot \overline{b}\right).$$

- Скалярное произведение обладает распределительным свойством

$$\left(\overline{a} + \overline{b}\right) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c} + \overline{b} \cdot \overline{c}.$$

Свойства скалярного произведения.

- Скалярное произведение равно нулю, если равен нулю один из перемножаемых векторов или косинус угла между ними (т.е. векторы ортогональны).
- Это утверждение непосредственно следует из определения.
- Верно и обратное : если векторы ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю.
- **Для того, чтобы два ненулевых вектора были ортогональны, необходимо и достаточно равенство нулю их скалярного произведения.**

Свойства скалярного произведения.

- Скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его модуля.
- Модуль вектора равен корню квадратному из скалярного квадрата этого вектора.

$$\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}^2 = \left|\overline{a}\right|^2 \Rightarrow \quad \left|\overline{a}\right| = \sqrt{\overline{a}^2} \ .$$

Скалярное произведение в координатной форме

- Пусть векторы заданы в координатной форме

$$\overline{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right) \quad \overline{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$$

- Выразим скалярное произведение векторов через их координаты, для чего воспользуемся разложением векторов по координатным осям и полученными свойствами скалярного произведения

Скалярное произведение в координатной форме

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(a_x\cdot\bar{i}+a_y\cdot\bar{j}+a_z\cdot\bar{k}\right)\cdot\left(b_x\cdot\bar{i}+b_y\cdot\bar{j}+b_z\cdot\bar{k}\right)=a_x\cdot b_x\cdot\bar{i}^2+$$

$$+a_x\cdot b_y\cdot\bar{i}\cdot\bar{j}+a_x\cdot b_z\cdot\bar{i}\cdot\bar{k}+a_y\cdot b_x\cdot\bar{j}\cdot\bar{i}+a_y\cdot b_y\cdot\bar{j}^2+a_y\cdot b_z\cdot\bar{j}\cdot\bar{k}+$$

$$+a_z\cdot b_x\cdot\bar{k}\cdot\bar{i}+a_z\cdot b_y\cdot\bar{k}\cdot\bar{j}+a_z\cdot b_z\cdot\bar{k}^2.$$

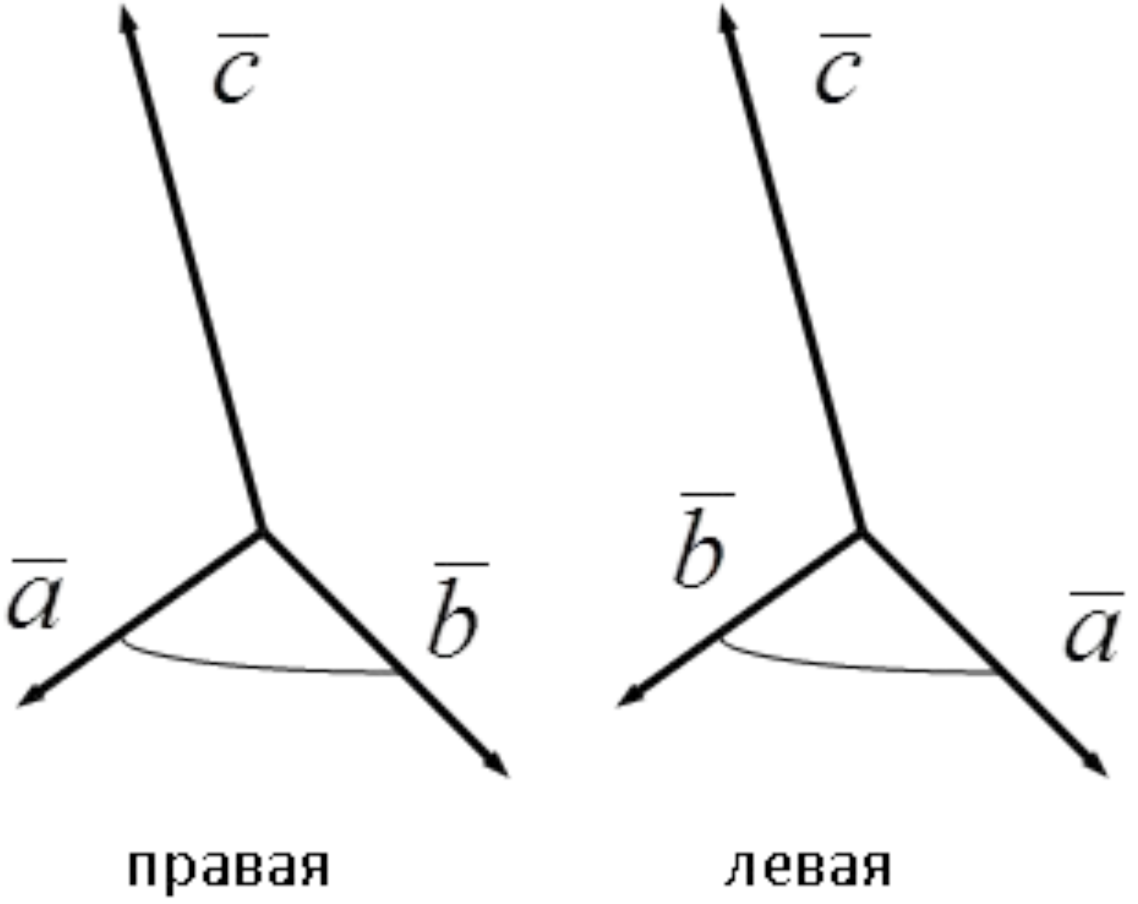
Учитывая, что в силу ортогональности ортов осей их скалярные произведения равны нулю, а их скалярные произведения на себя равны единице, получаем:

Скалярное произведение в координатной форме

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z \, .$$

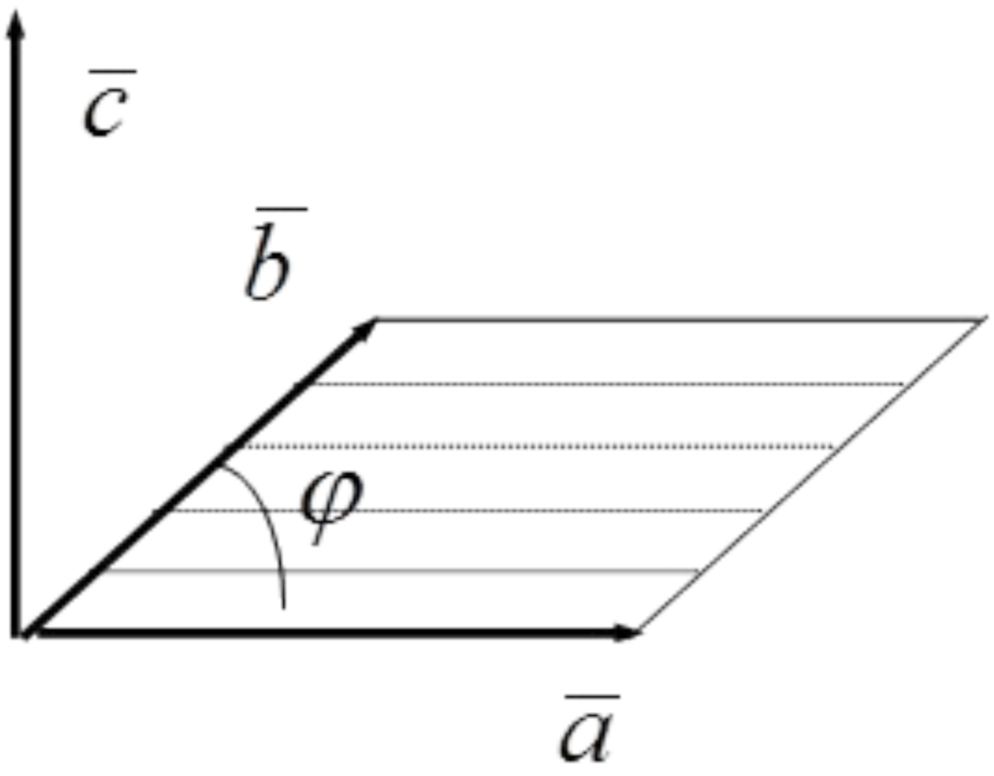
скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат.

Правые и левые тройки векторов.



- Назовём тройку векторов **правой**, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму будет виден с конца третьего вектора происходящим против хода часовой стрелки.

Векторное произведение двух векторов.



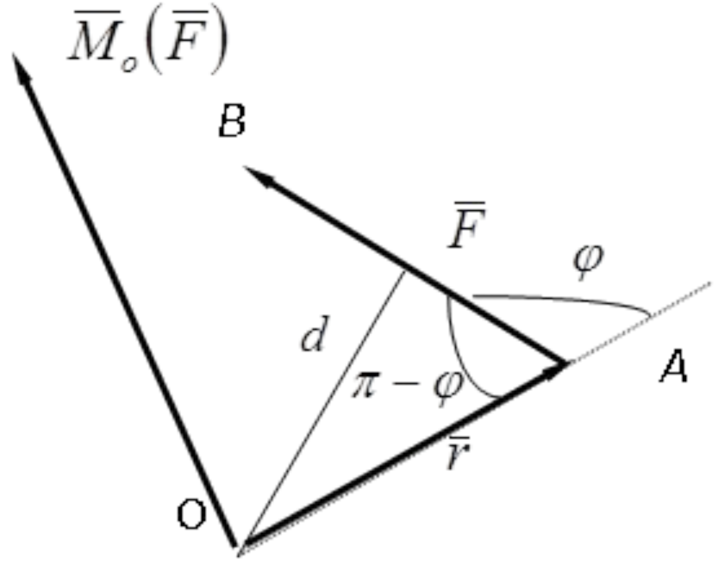
- Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ назовём вектор $\bar{c}$, направленный перпендикулярно к обоим векторам, образующим с этими векторами в порядке $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ правую тройку и по модулю равный площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах.

Векторное произведение двух векторов.

- Для векторного произведения будем использовать обозначения $\bar{a} \times \bar{b}$ или $[\bar{a} \times \bar{b}]$.

- С векторным произведением связаны многие физические величины: момент силы относительно центра; скорость точки при вращательном движении твёрдого тела; сила, действующая на движущийся в магнитном поле заряд.

Пусть к твёрдому телу в точке А приложена сила $\overline{F}$. В физике и теоретической механике вводится понятие момента силы относительно центра, например, точки О, как вектора $\overline{M}_o(\overline{F})$, модуль которого равен произведению модуля силы на длину плеча d силы $\overline{F}$ относительно центра О и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через точку О и линию действия силы $\overline{F}$, в ту сторону, откуда поворот тела, совершаемый силой, будет виден против хода часовой стрелки. Рассмотрим теперь векторное произведение $\overline{r} \times \overline{F}$. Этот вектор направлен перпендикулярно к векторам $\overline{r}$ и $\overline{F}$, то есть к плоскости ОАВ, в сторону, откуда кратчайший поворот от $\overline{r}$ к $\overline{F}$ виден против хода часовой стрелки, и равен по модулю



$$\left|\overline{r} \times \overline{F}\right| = \left|\overline{r}\right| \cdot \left|\overline{F}\right| \cdot \sin\varphi = \left|\overline{r}\right| \cdot \left|\overline{F}\right| \cdot \sin(\pi - \varphi) = \left|\overline{F}\right| \cdot d,$$

$$\overline{M}_o(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}.$$

Свойства векторного произведения

- При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, сохраняя модуль.

$$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$$

- Векторное произведение обладает распределительным свойством:

$$\bar{a} \times \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} \quad .$$

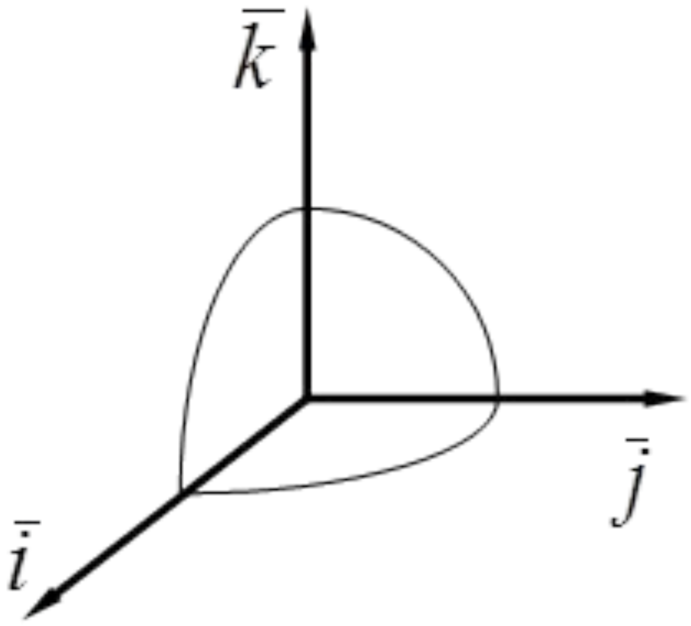
Свойства векторного произведения

- Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя.

$$\lambda \cdot [\bar{a}, \bar{b}] = [\lambda \cdot \bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \lambda \cdot \bar{b}] \quad .$$

- Если векторное произведение **равно нуль-вектору**, то либо один из сомножителей равен нуль-вектору, либо синус угла между векторами равен нулю, то есть векторы **коллинеарны**.

Векторное произведение в координатных ортов.



$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}.$$

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k} \Rightarrow \bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}.$$

$$\bar{i}\ ,\ \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}\ ,\ \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j},\ \bar{i} \times \bar{k}$$

Векторное произведение в координатной форме

$$\bar{a}\times\bar{b}=\left(a_x\cdot\bar{i}+a_y\cdot\bar{j}+a_z\cdot\bar{k}\right)\times\left(b_x\cdot\bar{i}+b_y\cdot\bar{j}+b_z\cdot\bar{k}\right)=a_x\cdot b_x\cdot\bar{i}\times\bar{i}+a_x\cdot b_y\cdot\bar{i}\times\bar{j}+$$

$$+a_x\cdot b_z\cdot\bar{i}\times\bar{k}+a_y\cdot b_x\cdot\bar{j}\times\bar{i}+a_y\cdot b_y\cdot\bar{j}\times\bar{j}+a_y\cdot b_z\cdot\bar{j}\times\bar{k}+a_z\cdot b_x\cdot\bar{k}\times\bar{i}+a_z\cdot b_y\cdot\bar{k}\times\bar{j}+$$

$$+a_z\cdot b_z\cdot\bar{k}\times\bar{k}=a_x\cdot b_y\cdot\bar{k}+a_x\cdot b_z\cdot\left(-\bar{j}\right)+a_y\cdot b_x\cdot\left(-\bar{k}\right)+a_y\cdot b_z\cdot\bar{i}+a_z\cdot b_x\cdot\bar{j}+$$

$$+a_z\cdot b_y\cdot\left(-\bar{i}\right)=\bar{i}\cdot\left(a_y\cdot b_z-a_z\cdot b_y\right)-\bar{j}\cdot\left(a_x\cdot b_z-a_z\cdot b_x\right)+\bar{k}\cdot\left(a_x\cdot b_y-a_y\cdot b_x\right).$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\quad .$$

Смешанное произведение трех векторов

- Рассмотрим три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и первые два вектора умножим векторно, а затем полученный вектор умножим скалярно на третий вектор , в итоге получим число. Такое произведение называют смешанным произведением трёх векторов: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$

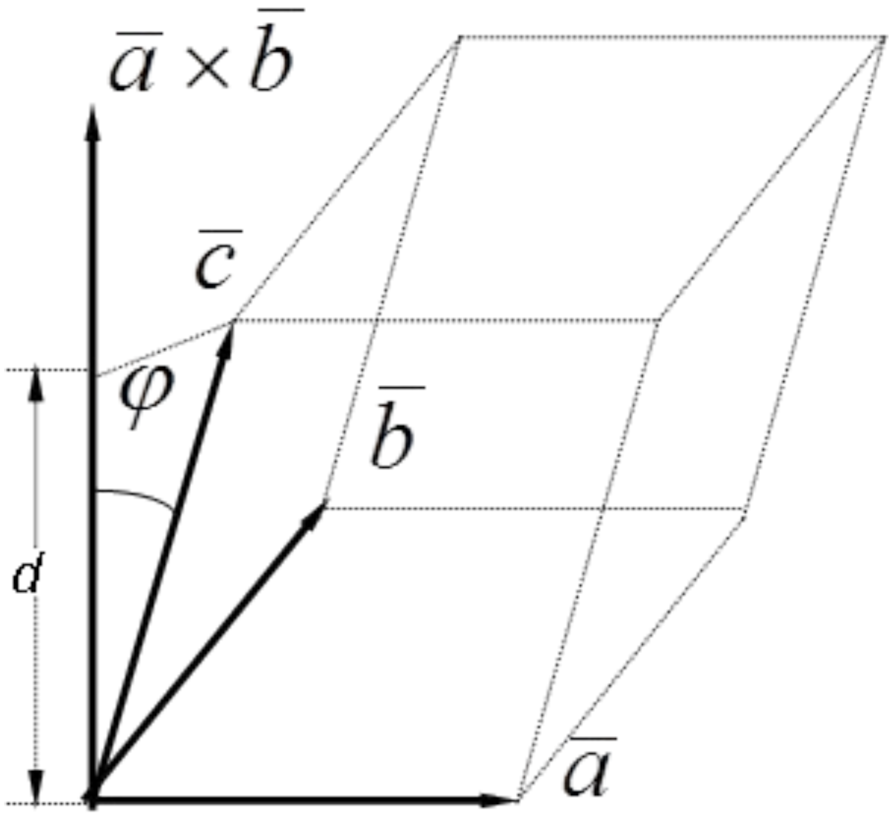
- Для записи смешанного произведения используют также еще одну форму записи: $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$

Смешанное произведение трех векторов

- Пусть векторы заданы в координатной форме. Тогда смешанное произведение через координаты сомножителей выражается как определитель 3-го порядка:

$$\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение трех векторов



- Объём параллелепипеда, построенного на трех некомпланарных векторах, как на сторонах, равен модулю их смешанного произведения.
- Для компланарности трёх векторов необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю.

Лекция окончена.

Спасибо за внимание.