

Математика.

Лекция 3.

Скалярное и векторное
произведения векторов.

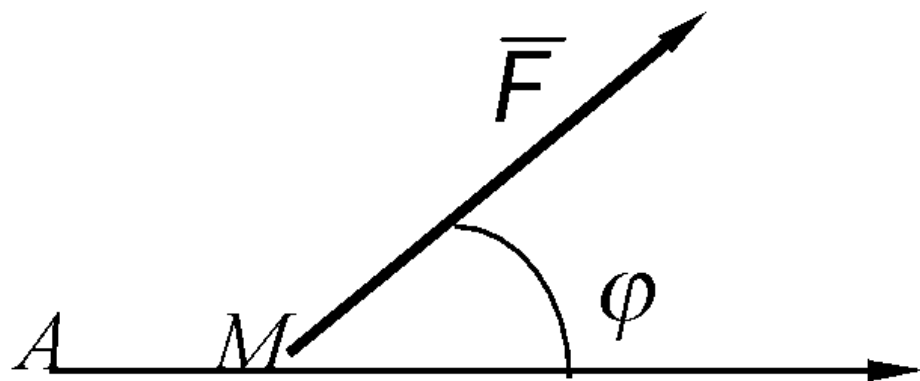
- В отличие от умножения двух чисел операция умножения вектора на вектор может быть определена двумя различными способами, каждый из которых имеет своё математическое и прикладное значение.

Скалярным произведением векторов называют число, равное произведению модулей перемножаемых векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Часто для обозначения скалярного произведения употребляют и запись:

$$(\bar{a}, \bar{b})$$



Рассмотрим пример из механики, приводящий к понятию скалярного произведения. Пусть материальная точка M движется по прямой из положения A в положение B , проходя при этом расстояние s , а на точку действует постоянная сила \vec{F} . Работа, совершаемая при этом перемещении силой \vec{F} , будет равна:

$$A = |\vec{F}| \cdot s \cdot \cos\varphi .$$
 Если ввести вектор

перемещения \vec{AB} , то получим:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{AB}$$

Свойства скалярного произведения.

- Скалярное произведение двух векторов обладает переместительным свойством :

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$$

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi = |\bar{b}| \cdot |\bar{a}| \cdot \cos \varphi = \bar{b} \cdot \bar{a}.$$

Свойства скалярного произведения.

- Скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного из векторов и проекции другого вектора на направление первого:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot \text{Pr}_{\bar{a}} \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{Pr}_{\bar{b}} \bar{a}.$$

Свойства скалярного произведения.

- Проекция вектора на некоторое направление равна скалярному произведению единичного вектора рассматриваемого направления и данного вектора.

$$\text{Pr}_{\bar{a}^0} \bar{b} = \bar{a}^0 \cdot \bar{b}$$

Свойства скалярного произведения.

- Скалярное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя.

$$\lambda \cdot (\bar{a}, \bar{b}) = (\lambda \cdot \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \lambda \cdot \bar{b}).$$

- Скалярное произведение обладает распределительным свойством

$$(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}.$$

Свойства скалярного произведения.

- Скалярное произведение равно нулю, если равен нулю один из перемножаемых векторов или косинус угла между ними (т.е. векторы ортогональны).
- Это утверждение непосредственно следует из определения.
- Верно и обратное : если векторы ортогональны, то их скалярное произведение равно нулю.
- **Для того, чтобы два ненулевых вектора были ортогональны, необходимо и достаточно равенство нулю их скалярного произведения.**

Свойства скалярного произведения.

- Скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его модуля.
- Модуль вектора равен корню квадратному из скалярного квадрата этого вектора.

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 \Rightarrow |\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2} .$$

Скалярное произведение в координатной форме

- Пусть векторы заданы в координатной форме

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z) \quad \bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$$

- Выразим скалярное произведение векторов через их координаты, для чего воспользуемся разложением векторов по координатным осям и полученными свойствами скалярного произведения

Скалярное произведение в координатной форме

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= (a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}) \cdot (b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}) = a_x \cdot b_x \cdot \bar{i}^2 + \\ &+ a_x \cdot b_y \cdot \bar{i} \cdot \bar{j} + a_x \cdot b_z \cdot \bar{i} \cdot \bar{k} + a_y \cdot b_x \cdot \bar{j} \cdot \bar{i} + a_y \cdot b_y \cdot \bar{j}^2 + a_y \cdot b_z \cdot \bar{j} \cdot \bar{k} + \\ &+ a_z \cdot b_x \cdot \bar{k} \cdot \bar{i} + a_z \cdot b_y \cdot \bar{k} \cdot \bar{j} + a_z \cdot b_z \cdot \bar{k}^2 . \end{aligned}$$

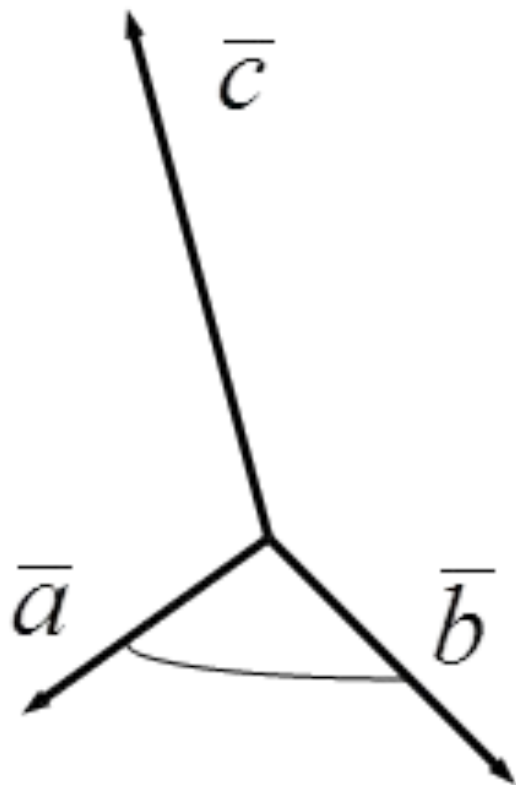
Учитывая, что в силу ортогональности ортов осей их скалярные произведения равны нулю, а их скалярные произведения на себя равны единице, получаем:

*Скалярное произведение
в координатной форме*

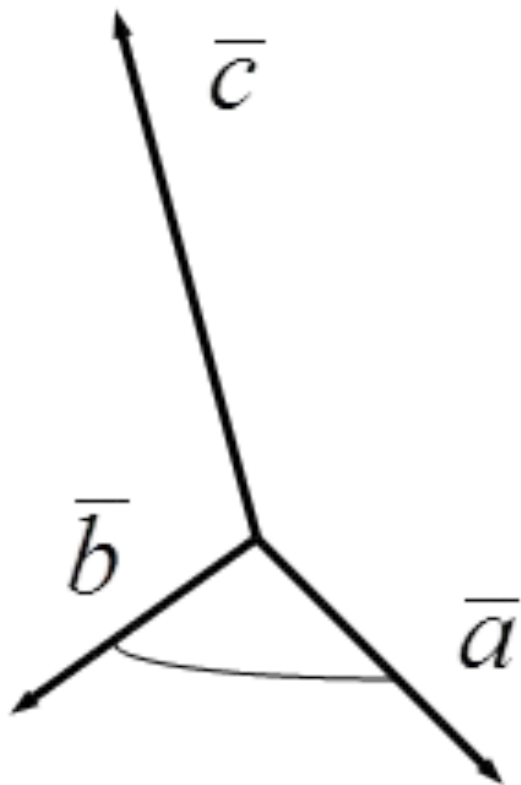
$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

**скалярное произведение двух векторов равно
сумме произведений одноименных координат.**

Правые и левые тройки векторов.



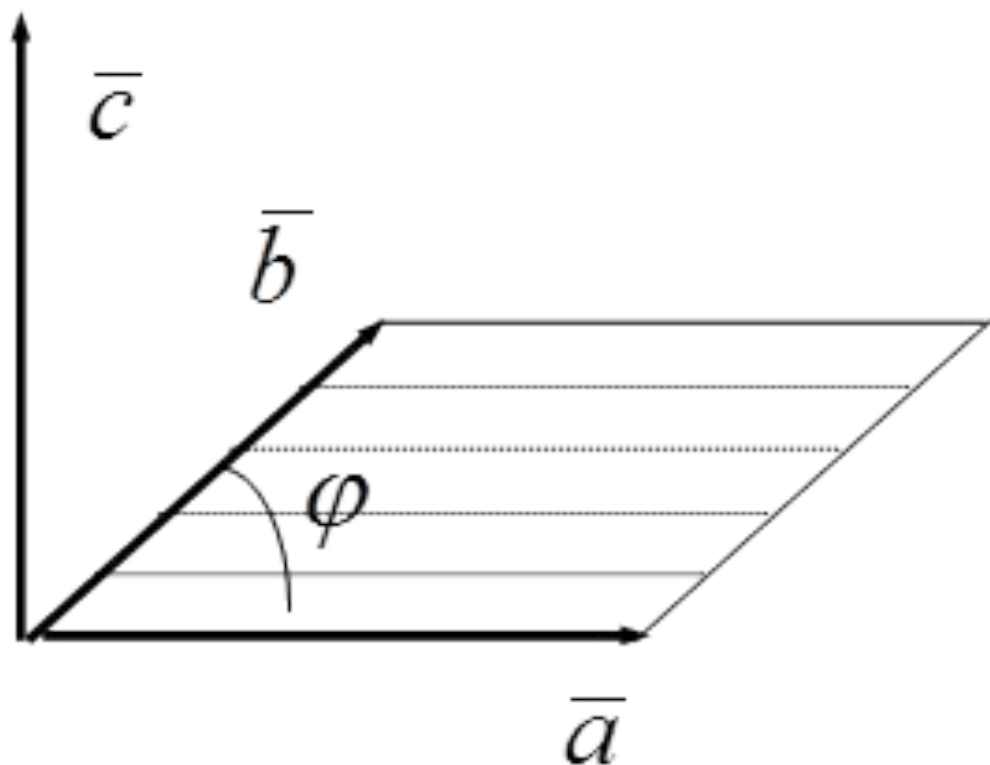
правая



левая

- Назовём тройку векторов **правой**, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму будет виден с конца третьего вектора происходящим против хода часовой стрелки.

Векторное произведение двух векторов.



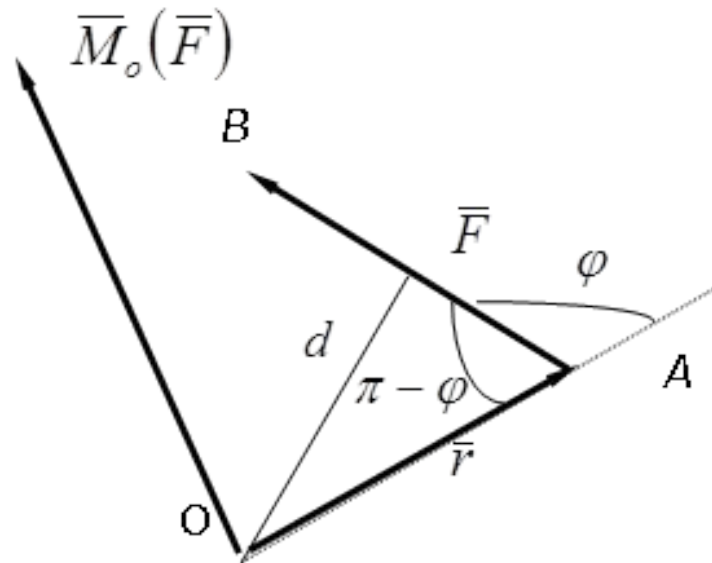
- Векторным произведением вектора \bar{a} на вектор \bar{b} назовём вектор \bar{c} , направленный перпендикулярно к обоим векторам, образующим с этими векторами в порядке $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ правую тройку и по модулю равный площади параллелограмма, построенного на векторах \bar{a} и \bar{b} как на сторонах.

Векторное произведение двух векторов.

- Для векторного произведения будем использовать обозначения $\bar{a} \times \bar{b}$ или $[\bar{a} \times \bar{b}]$.
- С векторным произведением связаны многие физические величины: момент силы относительно центра; скорость точки при вращательном движении твёрдого тела; сила, действующая на движущийся в магнитном поле заряд.

Пусть к твёрдому телу в точке A приложена сила \vec{F} . В физике и теоретической механике вводится понятие момента силы относительно центра, например, точки O , как вектора $\vec{M}_O(\vec{F})$, модуль которого равен произведению модуля силы на длину плеча d силы \vec{F} относительно центра O и который направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через точку O и линию действия силы \vec{F} , в ту сторону, откуда поворот тела, совершаемый силой, будет виден против хода часовой стрелки. Рассмотрим теперь векторное произведение $\vec{r} \times \vec{F}$. Этот вектор направлен перпендикулярно к векторам \vec{r} и \vec{F} , то есть к плоскости OAB , в сторону, откуда кратчайший поворот от \vec{r} к \vec{F} виден против хода часовой стрелки, и равен по модулю

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \varphi = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin(\pi - \varphi) = |\vec{F}| \cdot d,$$



$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Свойства векторного произведения

- При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак, сохраняя модуль.

$$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$$

- Векторное произведение обладает распределительным свойством:

$$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} \quad .$$

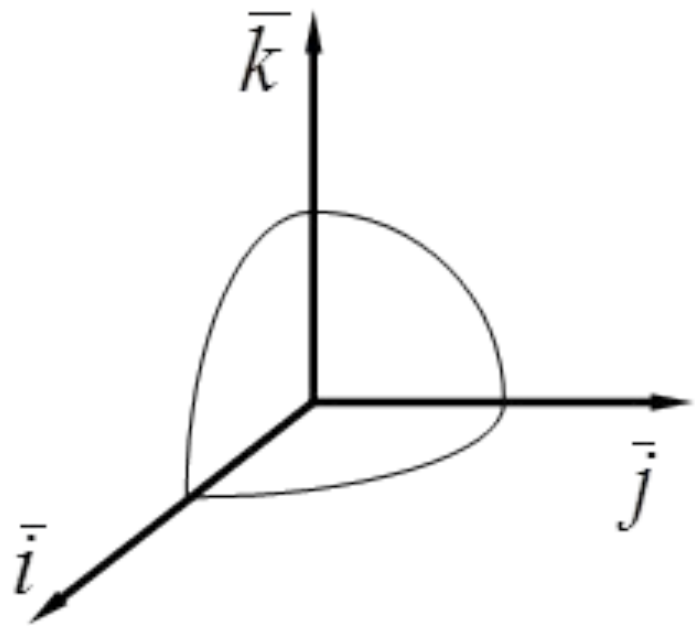
Свойства векторного произведения

- Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя.

$$\lambda \cdot [\bar{a}, \bar{b}] = [\lambda \cdot \bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \lambda \cdot \bar{b}] \quad .$$

- Если векторное произведение **равно нуль-вектору**, то либо один из сомножителей равен нуль-вектору, либо синус угла между векторами равен нулю, то есть векторы **коллинеарны**.

Векторное произведение в координатных ортов.



$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}.$$

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k} \Rightarrow \bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}.$$

$$\bar{i} , \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i} , \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j} , \bar{i} \times \bar{k}$$

Векторное произведение в координатной форме

$$\begin{aligned}\bar{a} \times \bar{b} &= (a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}) \times (b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_z \cdot \bar{k}) = a_x \cdot b_x \cdot \bar{i} \times \bar{i} + a_x \cdot b_y \cdot \bar{i} \times \bar{j} + \\ &+ a_x \cdot b_z \cdot \bar{i} \times \bar{k} + a_y \cdot b_x \cdot \bar{j} \times \bar{i} + a_y \cdot b_y \cdot \bar{j} \times \bar{j} + a_y \cdot b_z \cdot \bar{j} \times \bar{k} + a_z \cdot b_x \cdot \bar{k} \times \bar{i} + a_z \cdot b_y \cdot \bar{k} \times \bar{j} + \\ &+ a_z \cdot b_z \cdot \bar{k} \times \bar{k} = a_x \cdot b_y \cdot \bar{k} + a_x \cdot b_z \cdot (-\bar{j}) + a_y \cdot b_x \cdot (-\bar{k}) + a_y \cdot b_z \cdot \bar{i} + a_z \cdot b_x \cdot \bar{j} + \\ &+ a_z \cdot b_y \cdot (-\bar{i}) = \bar{i} \cdot (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) - \bar{j} \cdot (a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x) + \bar{k} \cdot (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x).\end{aligned}$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение трех векторов

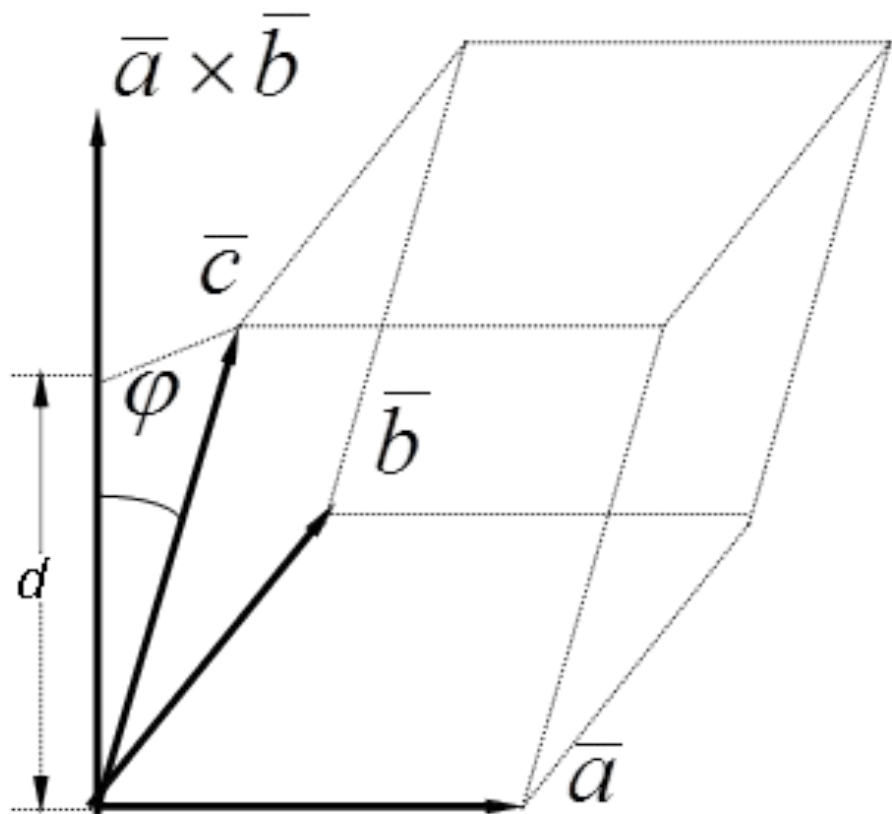
- Рассмотрим три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и первые два вектора умножим векторно, а затем полученный вектор умножим скалярно на третий вектор, в итоге получим число. Такое произведение называют смешанным произведением трёх векторов: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$
- Для записи смешанного произведения используют также еще одну форму записи: $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$

Смешанное произведение трех векторов

- Пусть векторы заданы в координатной форме. Тогда смешанное произведение через координаты сомножителей выражается как определитель 3-го порядка:

$$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) \cdot \bar{c} = \left(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение трех векторов



- Объем параллелепипеда, построенного на трех некопланарных векторах, как на сторонах, равен модулю их смешанного произведения.
- Для компланарности трёх векторов необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю.

Лекция окончена.

Спасибо за внимание.