ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 8

2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

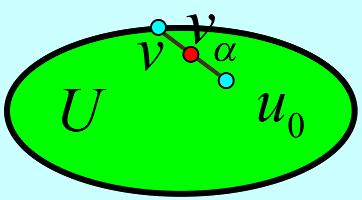
2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

- **2.6. Замыкание и внутренность выпуклых множеств(продолжение).**
- **2.7. Внутренность и относительная внутренность выпуклых множеств.**

2.6. Замыкание и внутренность выпуклых множеств(продолжение). Следующее утверждение усиливает **теорему 14.**

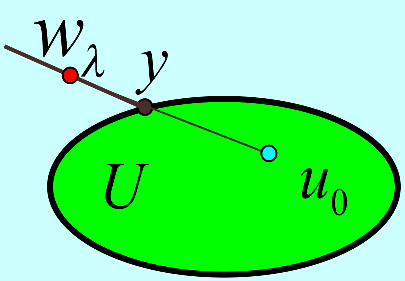
Теорема 15. ***Пусть*** $U \subset R^n$ ***выпуклое множество и*** $\operatorname{int} U \neq \varnothing$. ***Тогда***

1) Для всех $u_0 \in \operatorname{int} U, v \in \bar{U}, \alpha \in (0,1]$ ***справедливо включение***



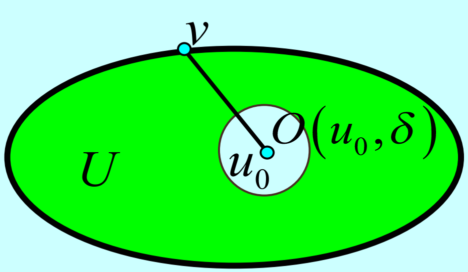
$$v_\alpha = \alpha u_0 + (1-\alpha) v = v + \alpha (u_0 - v) \in \operatorname{int} U. \qquad (3)$$

2) Для всех $u_0 \in \operatorname{int} U, y \notin \operatorname{int} U, \lambda > 1$ ***имеет место***



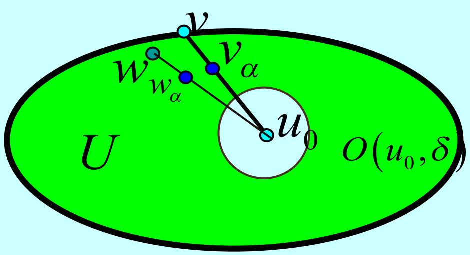
$$w_\lambda = u_0 + \lambda (y - u_0) \notin \bar{U}. \qquad (4)$$

Доказательство. *1)* Из включения $u_0 \in \operatorname{int} U$ следует существование окрестности



$$O(u_0, \delta) = \left\{ u \in R^n \,\middle|\, \|u - u_0\| < \delta \right\} \subset U.$$

Пусть $\alpha \in (0,1]$. Полагаем $v_\alpha = \alpha u_0 + (1-\alpha)v$. Из включения $v \in \overline{U}$



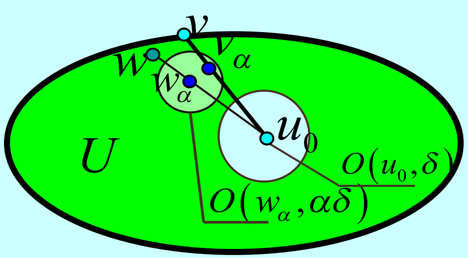
следует существование точки $w \in U$, ($v-$ предельная точка множества U) для которой будет выполняться неравенство

$$\|v-w\| < \frac{\alpha\delta}{1-\alpha}. \qquad (5)$$

Полагаем $w_\alpha = \alpha u_0 + (1-\alpha)w$ и оценим по норме разность между точками v_α и w_α :

$$\Big\|\overbrace{v_\alpha}^{\alpha u_0+(1-\alpha)v} - \overbrace{w_\alpha}^{\alpha u_0+(1-\alpha)w}\Big\| = \|\alpha u_0 + (1-\alpha)v - \alpha u_0 - (1-\alpha)w\| =$$

$$= \Big\|\overbrace{(1-\alpha)}^{\geq 0}v - \overbrace{(1-\alpha)}^{\geq 0}w\Big\| = (1-\alpha)\overbrace{\|v-w\|}^{<\frac{\alpha\delta}{1-\alpha}} <$$



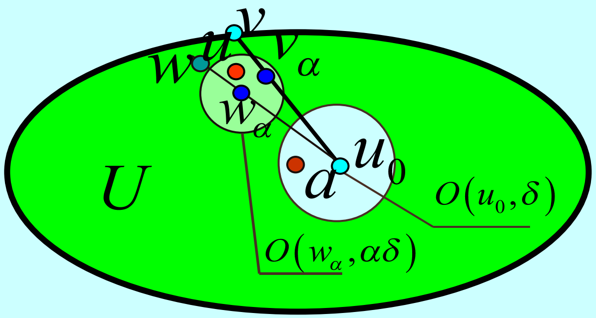
$$< \frac{(1-\alpha)\alpha\delta}{1-\alpha} = \alpha\delta.$$

Таким образом, $v_\alpha \in O(w_\alpha, \alpha\delta)$, при чем $\beta = \alpha\delta - \|v_\alpha - w_\alpha\| > 0$,

т. е. точка v_α лежит строго внутри окрестности $O(w_\alpha, \alpha\delta)$.

Покажем, что справедливо вложение

$$O(w_\alpha, \alpha\delta) \subset U. \qquad (6)$$



С этой целью для всех $u \in O(w_\alpha, \alpha\delta)$ положим

$$a = u_0 + \frac{u - w_\alpha}{\alpha}$$

и установим, что $a \in O(u_0, \delta) \subset U$. Действительно,

$$\|a - u_0\| = \frac{\overbrace{\|u - w_\alpha\|}^{u \in O(w_\alpha,\alpha\delta) \Rightarrow <\alpha\delta}}{\alpha} < \frac{\alpha\delta}{\alpha} = \delta \Rightarrow a \in O(u_0, \delta) \subset U$$

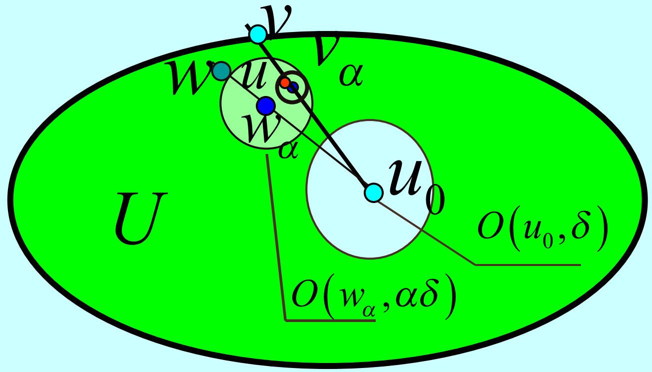
С другой стороны из

$$a = u_0 + \frac{u - w_\alpha}{\alpha} \Rightarrow u = \alpha(a - u_0) + \overbrace{\underbrace{w_\alpha}_{\in U}}^{w+\alpha(u_0-w)} = \alpha(\underbrace{a}_{\in U} - u_0) +$$

$$+ w + \alpha(u_0 - w) = \alpha a + w - \alpha w = \alpha a + (1 - \alpha) w \in U.$$

Вложение (6) доказано. Для завершения доказательства первого пункта теоремы требуется

установить, что точка v_α входит в множество $O(w_\alpha, \alpha\delta) \subset U$ вместе со своей окрестностью $O(v_\alpha, \beta)$, где $\beta = \alpha\delta - \|v_\alpha - w_\alpha\| > 0$. В самом деле, если $u \in O(v_\alpha, \beta)$, то



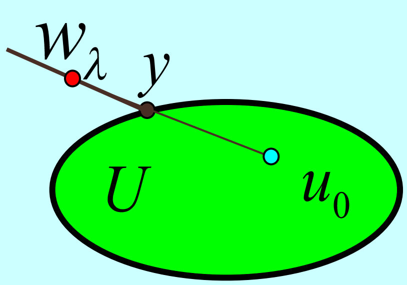
$$\|u - w_\alpha\| = \|u - w_\alpha + v_\alpha - v_\alpha\| \le$$

$$\le \underbrace{\|u - v_\alpha\|}_{u \in O(v_\alpha,\beta) \Rightarrow \le \beta} + \|v_\alpha - w_\alpha\| \le \overset{\alpha\delta - \|v_\alpha - w_\alpha\|}{\beta} + \|v_\alpha - w_\alpha\| =$$

$$= \alpha\delta - \|v_\alpha - w_\alpha\| + \|v_\alpha - w_\alpha\| \underset{(6)}{=} \alpha\delta \Rightarrow u \in O(w_\alpha, \alpha\delta).$$

Таким образом, $u \in O(w_\alpha, \alpha\delta) \subset U$, v_α входит в U вместе с окрестностью $O(v_\alpha, \beta)$ и пункт 1) теоремы доказан.

2) Пусть теперь $w_\lambda = u_0 + \lambda(y - u_0)$, $\lambda > 1, u_0 \in \operatorname{int} U$, $y \notin \operatorname{int} U$.



От противного примем, что $w_\lambda \in \overline{U}$ при каком-либо $\lambda > 1$. Из представления для $w_\lambda = u_0 + \lambda(y - u_0)$ находим $y = u_0 + \dfrac{w_\lambda - u_0}{\lambda}$. Полагаем $\alpha = \dfrac{1}{\underset{>1}{\lambda}} \in (0,\ 1)$.

Тогда

$$y = u_0 + \overbrace{\frac{1}{\lambda}}^{=\alpha}\left(w_\lambda - u_0\right) = u_0 + \overbrace{\alpha}^{\in(0,1)}\left(\overbrace{w_\lambda}^{\in\bar{U}} - \overbrace{u_0}^{\in\operatorname{int}U}\right),$$

где $\alpha \in (0,1)$, $w_\lambda \in \bar{U}$, $u_0 \in \operatorname{int} U$. По доказанному первому пункту теоремы тогда должно выполняться $y \in \operatorname{int} U$, что противоречит условию $y \notin \operatorname{int} U$.

Следовательно, $w_\lambda \notin \bar{U}$ при всех $\lambda > 1$. Теорема доказана полностью.

Очевидно, что из доказанной теоремы сразу следует справедливость **теоремы 14.**

Упражнение 1. Из утверждения **теоремы 15**

Пусть $U \subset R^n$ ***выпуклое множество***, $\operatorname{int} U \neq \varnothing$, $u_0 \in \operatorname{int} U$, $v \in \bar{U}$. ***Тогда для всех*** $\alpha \in (0,1]$ ***справедливо***

$$v_\alpha = \alpha u_0 + (1-\alpha) v \in \operatorname{int} U. \quad (3)$$

вывести утверждение **теоремы 14:** ***внутренность выпуклых множеств выпукла.***

Решение. Пусть $u_1, u_2 \in \operatorname{int} U$, $\alpha \in (0,1)$. В силу $\operatorname{int} U \subset \bar{U}$ из (3) следует

$$u_\alpha = \overbrace{\alpha}^{\in(0,1)}\ \overbrace{u_1}^{\in\operatorname{int}U} + \left(1 - \overbrace{\alpha}^{\in(0,1)}\right)\overbrace{u_2}^{\in\operatorname{int}U\subset\bar{U}} \in \operatorname{int} U.$$

2.7. Внутренность и относительная внутренность выпуклых множеств. Выпуклое множество может иметь и не иметь внутренних точек. Например, круг в R^2 внутренние точки имеет, а отрезок прямой – нет. Выясним условия не пустоты внутренности выпуклого множества.

Лемма 1. ***Пусть*** $S(u_0, u_1, \dots, u_n) \subset R^n$ - ***симплекс, натянутый на точки*** $u_0, u_1, \dots, u_n$ $S(u_0, u_1, \dots, u_m) = \left\{ u = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i u_i \,\middle|\, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1 \right\}$,

u_1 -из $u_0, \dots, u_m - u_0$ – / . ***Тогда*** $\operatorname{int} S(u_0, u_1, \dots, u_n) \neq \varnothing$.

Доказательство. Для доказательства достаточно построить хотя бы одну точку $\bar{u}$ из множества $\operatorname{int} S(u_0, u_1, \dots, u_n)$. Полагаем

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^{n} \bar{\lambda}_i u_i, \quad \sum_{i=0}^{n} \bar{\lambda}_i = 1, \; \bar{\lambda}_i > 0, \; i = 0, 1, \dots, n. \qquad (1)$$

Покажем, что $\bar{u} \in \operatorname{int} S(u_0, u_1, \dots, u_n) \neq \varnothing$. Действительно, в силу линейной независимости векторов $u_1 - u_0, \dots, u_n - u_0$ для всех $u \in R^n$ система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(u_i - u_0 \right) = u - u_0 \Rightarrow \qquad (2)$$

$$\lambda_1 \left(u_1^1 - u_0^1 \right) + \lambda_2 \left(u_2^1 - u_0^1 \right) + \cdots + \lambda_n \left(u_n^1 - u_0^1 \right) = u^1 - u_0^1,$$

$$\lambda_1 \left(u_1^2 - u_0^2 \right) + \lambda_2 \left(u_2^2 - u_0^2 \right) + \cdots + \lambda_n \left(u_n^2 - u_0^2 \right) = u^2 - u_0^2,$$

$$\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$

$$\lambda_1 \left(u_1^n - u_0^n \right) + \lambda_2 \left(u_2^n - u_0^n \right) + \cdots + \lambda_n \left(u_n^n - u_0^n \right) = u^n - u_0^n$$

относительно неизвестных $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, n$ имеет единственное решение $\lambda_i(u)$, $i = 1, \ldots, n,$ непрерывно зависящее от $u \in R^n$. Полагаем

$$\lambda_0(u) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(u \right), u \in R^n. \qquad (3)$$

Очевидно, что функция $\lambda_0 : R^n \to R^1$ непрерывна. При $u = \bar{u} = \sum_{i=0}^{n} \bar{\lambda}_i u_i$, система (2)

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(u_i - u_0 \right) = \overset{\bar{u}}{u} - u_0 \quad (2)$ принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(u_i - u_0 \right) = \bar{u} - u_0.$$

Для $\lambda_i = \bar{\lambda}_i,\ i = 1,\ldots,n$ соотношение $\sum_{i=1}^{n} \overset{\bar{\lambda}_i}{\lambda_i}\left(u_i - u_0\right) = \bar{u} - u_0.$ превращается в тождество. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i \left(u_i - u_0\right) = \overset{\sum_{i=0}^{n} \bar{\lambda}_i u_i}{\bar{u}} - u_0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i u_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i\right) u_0 = \overset{\bar{\lambda}_0 u_0 + \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i u_i}{\sum_{i=0}^{n} \bar{\lambda}_i u_i} - u_0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i u_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i\right) u_0 = \bar{\lambda}_0 u_0 + \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i u_i - u_0 \Rightarrow -\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i\right) u_0 = \bar{\lambda}_0 u_0 - u_0 \Rightarrow$$

$$-\overset{\overset{(1)}{\Rightarrow} 1}{\left(\sum_{i=0}^{n} \bar{\lambda}_i\right)} u_0 = -u_0 \Rightarrow \quad 0 \equiv 0.$$

Таким образом, набор чисел $\lambda_i = \bar{\lambda}_i,\ i = 1,\ldots,n$ является решением системы (2)

$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(u_i-u_0\right)=u-u_0 \quad (2).$ Тогда $\lambda_i\left(\bar{u}\right)\overset{(1)}{=}\bar{\lambda}_i>0,\ i=1,\ldots,n.$ Из (3)

$\lambda_0(u)=1-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(u\right),\ u\in R^n \quad (3)$ находим

$$\lambda_0(\bar{u})=1-\sum_{i=1}^{n}\overset{\boxed{\bar{\lambda}_i}}{\lambda_i\left(\bar{u}\right)}= \quad 1-\sum_{i=1}^{n}\bar{\lambda}_i\overset{(1)\Longrightarrow}{=}\bar{\lambda}_0>0. \quad (4)$$

В силу непрерывности функций $\lambda_i : R^n \to R^1,\ i=0,1,\ldots,n$ из неравенств

$\lambda_0(\bar{u})>0,\ \lambda_i\left(\bar{u}\right)>0,\ i=1,\ldots,n, \quad (4)$ вытекают неравенства

$$\lambda_0(u)>0,\ \lambda_i\left(u\right)>0,\ i=1,\ldots,n,$$

для всех точек $u\in O\left(\bar{u},\varepsilon\right),$ где величина $\varepsilon>0$ достаточно мала. Для этих точек

из (2) $\left.\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(u_i-u_0\right)\right|_{\lambda_i=\lambda_i(u)}=u-u_0 \quad (2)$ при $\lambda_i=\lambda_i\left(u\right),\ i=1,\ldots,n,$ находим

$$u=u_0+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(u\right)\left(u_i-u_0\right)= \quad u_0+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(u\right)u_i-\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\left(u\right)\right)u_0=$$

$$= u_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(u) u_i - \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(u)\right) u_0 = \overbrace{\left(1-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(u)\right)}^{(3)\Rightarrow = \lambda_0(u)} u_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(u) u_i =$$

$$= \lambda_0(u)u_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(u) u_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(u) u_i \in \overbrace{S(u_0, u_1, \dots, u_n)}^{\left\{u=\sum_{i=0}^{m} \lambda_i u_i \,\middle|\, \lambda_i \ge 0,\ \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1\right\}}.$$

Последнее включение означает, что $\bar{u} \in \operatorname{int} S(u_0, u_1, \dots, u_n)$. Лемма доказана.

Упражнение 1. Даны: $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

1. Доказать, что множество

$$S(u_0, u_1, u_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_0 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \middle| \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \right\}$$

является двух мерным симплексом, натянутым на векторы u_0, u_1, u_2.

2. Доказать, что $v = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in Int\, S(u_0, u_1, u_2)$.

1. Очевидно, что

$$S(u_0, u_1, u_2) = \left\{ \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \right\} =$$

$$= co\{u_0, u_1, u_2\}$$

Вектора

$$u_1 - u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2 - u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ линейно независимы.

Тогда $S(u_0, u_1, u_2) -$ симплекс.

2. Найдем решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 + \lambda_2 = \frac{3}{4}, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{1}{2}, \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = \frac{1}{2} > 0, \\ \lambda_1 = \frac{1}{4} > 0, \\ \lambda_2 = \frac{1}{4} > 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$v \in Int\, S(u_0, u_1, u_2).$$

Теорема 16. ***Пусть*** $U \subset R^n$ ***- непустое выпуклое множество. Для того, чтобы*** $\operatorname{int} U \neq \varnothing$ ***необходимо и достаточно, чтобы*** $\dim U \overset{=\dim(LinU)}{=} n,$ $LinU$ – *несущее подпространство* *подпространство affU* ***т.е. чтобы несущее подпространство совпадало с*** R^n.

Доказательство. Необходимость. Пусть $v \in \operatorname{int} U \neq \varnothing.$ Тогда существует окрестность $O(v, \varepsilon) \subset U,$ т. е. шар с центром в точке v, принадлежащий множеству U. Отсюда выводим

$$O(v, \varepsilon) \subset U \subset affU \Rightarrow affU = R^n \Rightarrow LinU = R^n \Rightarrow \dim U = n.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\dim U = n$. Тогда $Lin U = aff U = R^n$. Обозначим через

$$v_1 = u_1 - u_0, \ldots, v_r = u_r - u_0,$$

максимальный набор линейно независимых векторов, который можно получить, перебирая всевозможные точки $u_i \in U, i = 0, 1, \ldots, r$. На точки $u_0, u_1, \ldots, u_r$ натянем $n-$ мерный симплекс

$$S_n(u_0, u_1, \ldots, u_r) = co\{u_0, u_1, \ldots, u_r\} = \left\{ u = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i u_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Для всех $\lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{r} \lambda_i = 1$ из выпуклости множества U и включения $u_0, u_1, \ldots, u_r \in U$ следует

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i u_i \in U \Rightarrow S(u_0, u_1, \ldots, u_r) \subset U \Rightarrow \operatorname{int} S_n(u_0, u_1, \ldots, u_r) \subset \operatorname{int} U.$$

При $r = n$ по **лемме 1** должно выполняться $\operatorname{int} S_n(u_0, u_1, \ldots, u_r) \neq \varnothing$, поэтому достаточно установить, что $r = n$. Допустим противное: $r < n$. Обозначим через

$$L = \left\{ u = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \overset{u_i - u_0}{v_i} \;\middle|\; \alpha_i \in (-\infty, +\infty), i = 1, \ldots, r \right\}. \qquad (5)$$

подпространство, натянутое на вектора $\overbrace{v_1,\dots,v_r}^{л/н}$. Размерность этого подпространства равна $r < n$. Из максимальности набора линейно независимых векторов

$$v_1 = u_1 - u_0, \dots, v_r = u_r - u_0$$

для всех $u \in U$ имеет место равенство

$$u - u_0 = \overbrace{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i}^{\in L}, \lambda_i \in R^1 \Rightarrow \quad u - u_0 \in L. \qquad (6)$$

В силу (6) и произвольности $u \in U$ выполняется

$$U - \{u_0\} \subset L \Rightarrow U \subset \overbrace{L + \{u_0\}}^{\text{аффинное множество}} \Rightarrow \quad affU \subset L + \{u_0\} \Rightarrow$$

$$\overbrace{affU - \left\{ \overset{u_0 \in U \subset affU}{u_0} \right\}}^{LinU} \subset L \Rightarrow \quad LinU \subset L \Rightarrow \dim LinU \le \dim L = r. \qquad (7)$$

По условию теоремы $n = \dim U \left(= \dim LinU \right)$. Тогда из (7) выводим $n \le r$.

Получили противоречие с $r < n$. Остается признать, что $r = n$.

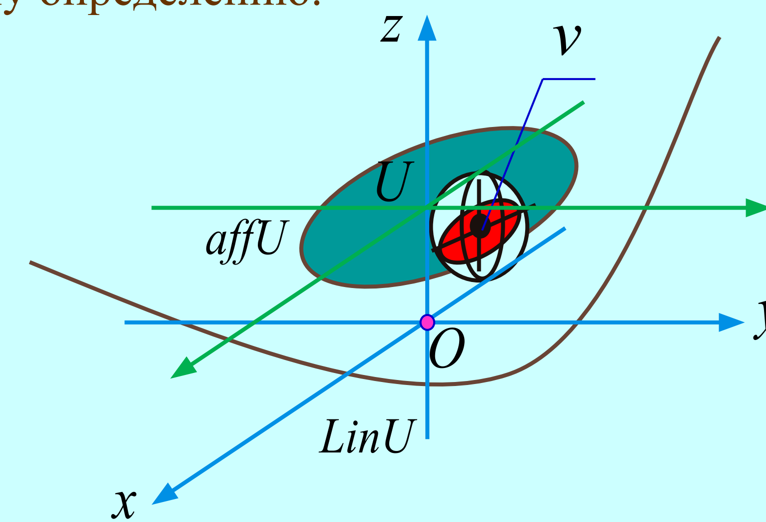
Теорема доказана.

Пример 9. Выпуклое множество $U=\left\{u=(x,y,z)\in R^3 \,\middle|\, x^2+y^2\le 1,\ z=0\right\}$,

представляющее собой единичный круг в плоскости $\pi_2=\left\{u=(x,y,z)\in R^3 \,\middle|\, z=0\right\}$,

не имеет внутренних точек. В тоже время, если рассматривать это множество как подмножество $R^2=\pi_2$, то его внутренность не пуста.

Рассмотренный пример приводит к следующему определению.



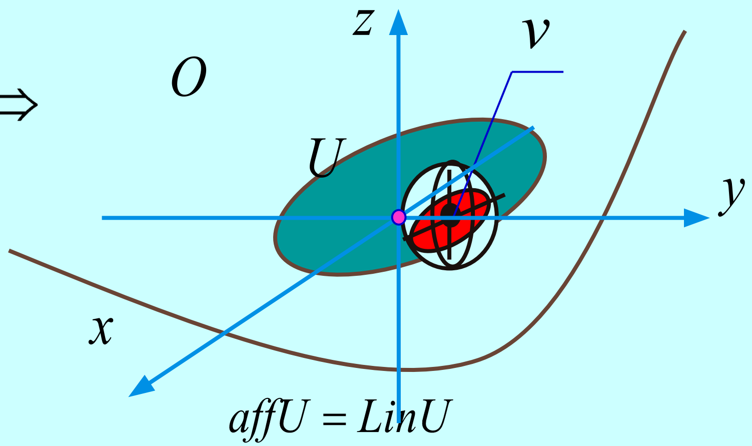
Определение 12. ***Точка*** $v\in U\subset R^n$ ***называется относительно внутренней точкой множества*** U, ***если существует открытая окрестность*** $O(v,\varepsilon)$ ***точки*** v, ***что*** $O(v,\varepsilon)\cap affU\subset U.$

Множество всех относительно внутренних точек называется относительной внутренностью множества U ***и обозначается символом*** riU.

Для единичного круга из **примера 9** справедливо

$$affU = LinU = \pi_2 = \left\{u = (x, y, z) \in R^3 \,\middle|\, z = 0\right\} \Rightarrow$$

$$riU = \left\{u = (x, y, z) \in R^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 1, z = 0\right\} \neq \varnothing.$$



Существуют множества,

для которых относительная внутренность пуста.

Например, множество, состоящее из двух различных точек.

Теорема 17. ***Для любого выпуклого множества*** $U \subset R^n$ ***его относительная внутренность не пуста.***

Доказательство. Не теряя общности, будем считать, что $0 \in U$. (В противном случае надо перейти к множеству $U - \{v\}, v \in U,$ при этом множество $affU - \{v\}$ будет являться аффинной оболочкой для множества $U - \{v\}$.) Тогда

$0 \in affU = LinU \supset U.$ Множество $LinU$ подпространство, размерность которого совпадает с размерностью множества U и доказательство теоремы сводится к доказательству предыдущей теоремы.