

ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

ЛЕКЦИЯ 4

2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА



2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

2.1. Определение выпуклого множества.

Примеры.



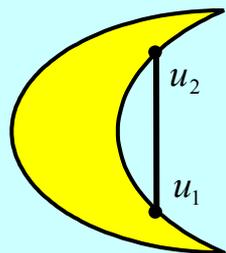
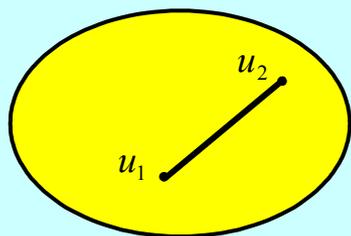
2. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА

2.1. Определение выпуклого множества.

Геометрический смысл

Примеры.

выпуклости множества состоит в том, что выпуклое множество вместе с любыми двумя точками содержит и отрезок, их соединяющий. Например, левое множество на



рисунке выпукло, а правое нет. Дадим формальное определение выпуклого множества.

Определение Множество $U \subset R^n$
1.

называется выпуклым, если для всех $u_1, u_2 \in U, \alpha \in [0,1]$ справедливо включение

$\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2 \in U$. Пустое и одноточечное множества принимаются

выпуклыми по определению.

Приведем примеры выпуклых множеств.

Пример Замкнутая (открытая) окрестность точки $u_0 \in R^n$ радиуса R множество
1.

$$\bar{O}(u_0, R) = \left\{ u \in R^n \mid \|u - u_0\| \leq R \right\}, u_0 \in R^n, R \geq 0$$

$$\left(O(u_0, R) = \left\{ u \in R^n \mid \|u - u_0\| < R \right\}, u_0 \in R^n, R \geq 0 \right)$$

является выпуклым множеством. Действительно для всех $\alpha \in [0,1]$ и

$u_1, u_2 \in \bar{O}(u_0, R)$ справедливо

$$\begin{aligned} & \left\| \alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2 - \alpha u_0 + (1 - \alpha) u_0 \right\| = \\ & = \left\| \alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2 - \alpha u_0 - (1 - \alpha) u_0 \right\| = \\ & = \left\| \alpha (u_1 - u_0) + (1 - \alpha) (u_2 - u_0) \right\| \leq \\ & \leq \alpha \|u_1 - u_0\| + (1 - \alpha) \|u_2 - u_0\| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \alpha \|u_1 - u_0\| + (1 - \alpha) \|u_2 - u_0\| \leq$$

$$\leq \alpha R + (1 - \alpha) R = R \Rightarrow \alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2 \in \bar{O}(u_0, R).$$

Доказательство для открытой окрестности аналогично.

Пример

Множество точек

$$\Gamma(c, \gamma) = \{ u \in R^n \mid \langle c, u \rangle = \gamma \}$$

$$, c \in R^n, c \neq 0, \gamma \in R^1,$$

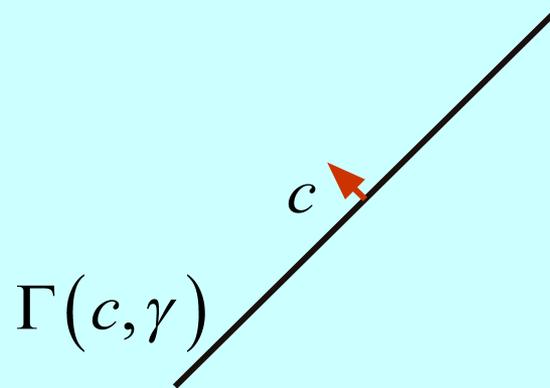
называемое гиперплоскостью в R^n , выпукло.

Действительно, для всех $\alpha \in [0, 1]$

и $u_1, u_2 \in \Gamma(c, \gamma)$ справедливо

$$\langle c, \alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2 \rangle = \alpha \langle c, u_1 \rangle + (1 - \alpha) \langle c, u_2 \rangle =$$

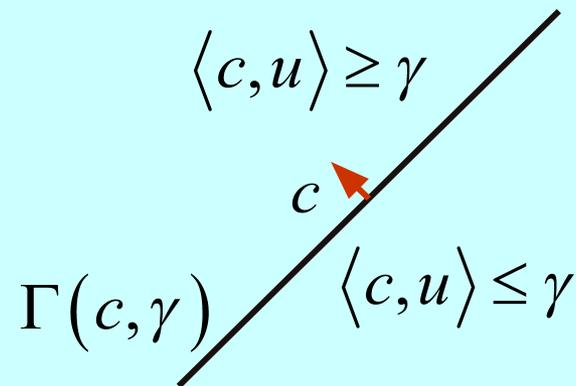
$$= \alpha \gamma + (1 - \alpha) \gamma = \gamma \Rightarrow \alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2 \in \Gamma(c, \gamma).$$



Гиперплоскости $\Gamma(c, \gamma)$ поставим в соответствие множества

$$\bar{\Gamma}^+(c, \gamma) = \{ u \in R^n \mid \langle c, u \rangle \geq \gamma \},$$

$$\bar{\Gamma}^-(c, \gamma) = \{ u \in R^n \mid \langle c, u \rangle \leq \gamma \}$$



которые называются замкнутыми
полупространствами, и множества

$$\Gamma^+(c, \gamma) = \{ u \in R^n \mid \langle c, u \rangle > \gamma \}, \quad \Gamma^-(c, \gamma) = \{ u \in R^n \mid \langle c, u \rangle < \gamma \}$$

которые называются открытыми полупространствами.

Пример 3. Множества $\bar{\Gamma}^+(c, \gamma), \bar{\Gamma}^-(c, \gamma), \Gamma^+(c, \gamma), \Gamma^-(c, \gamma)$ выпуклы.

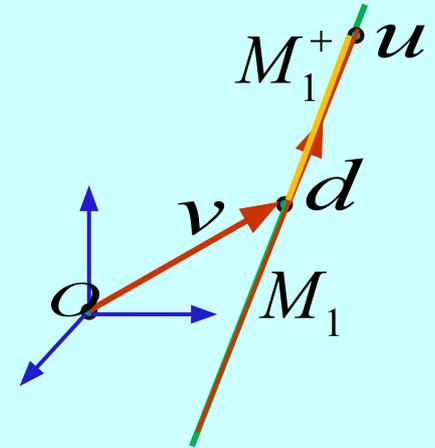
Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству

выпуклости множества $\Gamma(c, \gamma)$ в предыдущем примере.

Векторам $v, d \in R^n, d \neq 0$ поставим в соответствие множества

$$M_1 = \{ u = v + td \mid t \in (-\infty, +\infty) \},$$

$$M_1^+ = \{ u = v + td \mid t \in [0, +\infty) \}$$



которые будем называть, соответственно, прямой и лучом

проходящими через точку v в направлении вектора d .

Пример 4. Множества M_1, M_1^+ выпуклы. Действительно, для всех

$$\alpha \in [0,1] \text{ и } u_1 = v + t_1 d, u_2 = v + t_2 d, \quad t_1, t_2 \in R^1 \quad (t_1, t_2 \geq 0)$$

справедливо

$$w_\alpha = \alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2 = \alpha (v + t_1 d) + (1 - \alpha) (v + t_2 d) =$$

$$\alpha v + (1 - \alpha) v + [\alpha t_1 + (1 - \alpha) t_2] d$$

$$= \alpha v + (1 - \alpha) v + [\alpha t_1 + (1 - \alpha) t_2] d = v + t_\alpha d.$$

В силу $t_\alpha \in R^1$ ($t_\alpha = \alpha t_1 + (1-\alpha)t_2 \geq 0$) отсюда следует требуемое

включение

$$w_\alpha \in M_1 \quad (w_\alpha \in M_1^+).$$

Теорема 1. *Пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством.*

Доказательство. Пусть $U_\beta, \beta \in B$, выпуклые в R^n множества, где B — множество произвольной мощности. Покажем, что множество $U = \bigcap_{\beta \in B} U_\beta$ является выпуклым.

Пусть $v_1, v_2 \in U$. Тогда $v_1, v_2 \in U_\beta$ для всех $\beta \in B$. В силу того, что каждое из множеств $U_\beta, \beta \in B$ является выпуклым, имеет место включение

$$v_\lambda = \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 \in U_\beta, \quad \forall \lambda \in [0,1], \beta \in B.$$

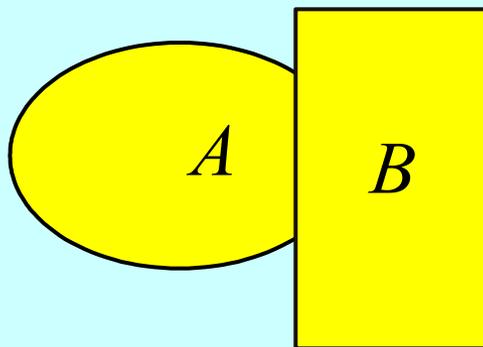
Отсюда $v_\lambda \in \bigcap_{\beta \in B} U_\beta = U$ и множество U является выпуклым.

Теорема доказана.

Из теоремы 1, в частности, следует, что множество

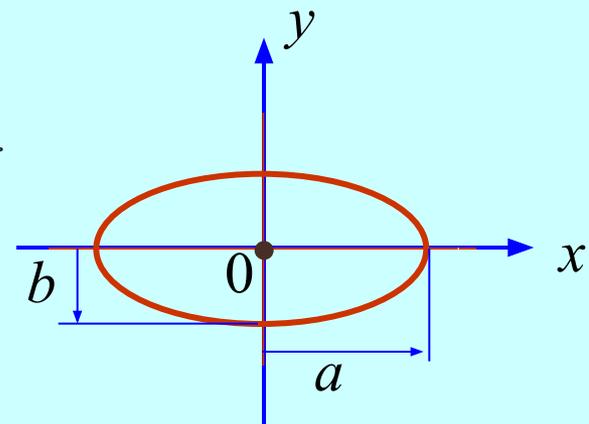
$$U = \left\{ u \in R^n \mid Au \leq b; \bar{A}u = \bar{b}; u^k \geq 0, k \in K \subset \{1, \dots, n\} \right\} \quad (1)$$

являющееся областью допустимых значений оптимизирующих параметров в общей задаче линейного программирования, выпукло. Справедливость этого утверждения вытекает из того обстоятельства, что формула (1) определяет множество U как пересечение гиперплоскостей и полупространств в R^n . Заметим, что объединение выпуклых множеств не обязательно выпукло.



Упражнение 1. Доказать выпуклость эллипса

$$U = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} = \left\{ (x, y) \mid a_1^2 x^2 + b_1^2 y^2 \leq 1 \right\}$$



Решение.

Пусть $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in U$, $\alpha \in [0, 1]$. Надо доказать, что

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + (1 - \alpha) \begin{pmatrix} \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 \\ \alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2 \end{pmatrix} \in U,$$

т. е., что

$$a_1^2 [\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2]^2 + b_1^2 [\alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2]^2 \leq 1.$$

Справедливо неравенство

$$[\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2]^2 = \alpha^2 x_1^2 + \alpha(1 - \alpha) \overset{\cancel{x_1^2} + x_2^2}{2x_1 x_2} + (1 - \alpha)^2 x_2^2 \leq$$

$$\begin{aligned}
& \alpha^2 x_1^2 + \alpha(1-\alpha)2x_1x_2 + (1-\alpha)^2 x_2^2 \leq \alpha^2 x_1^2 + (1-\alpha) \left[\alpha(x_1^2 + x_2^2) + (1-\alpha)x_2^2 \right] = \\
& = \alpha^2 x_1^2 + (1-\alpha)(\alpha x_1^2 + \alpha x_2^2 + x_2^2 - \alpha x_2^2) = \alpha^2 x_1^2 + (1-\alpha)(\alpha x_1^2 + x_2^2) = \\
& = \alpha^2 x_1^2 + \alpha x_1^2 + x_2^2 - \alpha^2 x_1^2 - \alpha x_2^2 = \alpha x_1^2 - \alpha x_2^2 + x_2^2 = \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 \Rightarrow \\
& \left[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \right]^2 \leq \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\left[\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \right]^2 \leq \alpha y_1^2 + (1-\alpha)y_2^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 \leq \alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 \quad \alpha y_1^2 + (1-\alpha)y_2^2 \leq \alpha y_1^2 + (1-\alpha)y_2^2 \\
& a_1^2 \left[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \right]^2 + b_1^2 \left[\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 \right]^2 \leq \\
& \leq a_1^2 \left[\alpha x_1^2 + (1-\alpha)x_2^2 \right] + b_1^2 \left[\alpha y_1^2 + (1-\alpha)y_2^2 \right] = \\
& \leq \alpha \left(a_1^2 x_1^2 + b_1^2 y_1^2 \right) + (1-\alpha) \left(a_1^2 x_2^2 + b_1^2 y_2^2 \right) \leq \alpha + (1-\alpha) = 1.
\end{aligned}$$

Упражнение 2. Рассмотрим задачу математического программирования

$$I(u) \rightarrow \min, \quad u \in U \subset R^n,$$

$$g_1(u) \leq 0, \dots, g_m(u) \leq 0, \quad U - \text{выпуклое множество.}$$

$$g_{m+1}(u) = 0, \dots, g_s(u) = 0,$$

Пусть u_* — ее решение. Полагаем $B_* = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid g_i(u_*) = 0\}$.

Доказать выпуклость множества

$$A = \left\{ \left(\begin{array}{c} a^0 \\ \{a^i, i \in B_*\} \\ a^{m+1} \\ \vdots \\ a^s \end{array} \right) \in R^{1+k+s-m} \mid \begin{array}{l} \exists u \in U : \\ a^0 = \langle I'(u_*), u - u_* \rangle; \\ a^i = \langle g_i'(u_*), u - u_* \rangle, \\ i \in B_* \cup \{m+1, \dots, s\} \end{array} \right\},$$

где $k \leq m$ — число элементов в множестве B_* .

Рассмотреть случай $m = 2, s = 3$.

Тогда

$$I(u) \rightarrow \min, \quad u \in U \subset R^n,$$
$$g_1(u) \leq 0, g_2(u) \leq 0, g_3(u) = 0,$$

$U \subset R^n$ – выпуклое множество.

Пусть u_* – ее решение и $g_1(u_*) = 0, g_2(u_*) < 0, g_3(u_*) = 0$.

Тогда $B_* = \{i \in \{1, 2\} \mid g_i(u_*) = 0\} = \{1\}, \quad \{m+1, \dots, s\} = \{3\}$

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^3 \end{pmatrix} \in R^3 \left| \begin{array}{l} \exists u \in U : \\ a^0 = \langle I'(u_*), u - u_* \rangle; \\ a^1 = \langle g_1'(u_*), u - u_* \rangle, \\ a^3 = \langle g_3'(u_*), u - u_* \rangle \end{array} \right. \right\},$$

Решение.

Пусть $a_j = \begin{pmatrix} a_j^0 \\ a_j^1 \\ a_j^3 \end{pmatrix} \in A$, $j = 1, 2$ и $\alpha \in [0, 1]$. Требуется показать, что точка

$$a_\alpha = \begin{pmatrix} a_\alpha^0 \\ a_\alpha^1 \\ a_\alpha^3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_1^0 \\ a_1^1 \\ a_1^3 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} a_2^0 \\ a_2^1 \\ a_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1^0 + (1-\alpha) a_2^0 \\ \alpha a_1^1 + (1-\alpha) a_2^1 \\ \alpha a_1^3 + (1-\alpha) a_2^3 \end{pmatrix} \in A.$$

В силу определения множества A

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^3 \end{pmatrix} \in R^3 \left| \begin{array}{l} \exists u \in U : \\ a^0 = \langle I'(u_*), u - u_* \rangle; \\ a^1 = \langle g_1'(u_*), u - u_* \rangle, \\ a^3 = \langle g_3'(u_*), u - u_* \rangle \end{array} \right. \right\},$$

для этого требуется подобрать такое $u_\alpha \in U$, чтобы выполнялись равенства

$$a_\alpha^0 = \alpha a_1^0 + (1-\alpha) a_2^0 = \langle I'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle, \quad (1)$$

$$a_\alpha^1 = \alpha a_1^1 + (1-\alpha) a_2^1 = \langle g_1'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle, \quad (2)$$

$$a_\alpha^3 = \alpha a_3^1 + (1-\alpha) a_3^1 = \langle g_3'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle, \quad (3)$$

Из включений $a_1 = \begin{pmatrix} a_1^0 \\ a_1^1 \\ a_1^3 \end{pmatrix} \in A, a_2 = \begin{pmatrix} a_2^0 \\ a_2^1 \\ a_2^3 \end{pmatrix} \in A$ следует существование точек

$u_j \in U, j = 1, 2$ таких, что

$$a_1^0 = \langle I'(u_*), u_1 - u_* \rangle, \quad (4)$$

$$a_1^1 = \langle g_1'(u_*), u_1 - u_* \rangle, \quad (5)$$

$$a_1^3 = \langle g_3'(u_*), u_1 - u_* \rangle, \quad (6)$$

$$a_2^0 = \langle I'(u_*), u_2 - u_* \rangle,$$

$$a_2^1 = \langle g_1'(u_*), u_2 - u_* \rangle,$$

$$a_2^3 = \langle g_3'(u_*), u_2 - u_* \rangle,$$

В силу выпуклости множества U справедливо включение

$$u_\alpha = \alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2 \in U.$$

Эта точка является именно той, существование которой требуется для установления

включения

$$a_\alpha = \alpha a_1^0 + (1 - \alpha) a_2^0 \in A.$$

Действительно, докажем равенства (1)-(3)) $a_\alpha^0 = \alpha a_1^0 + (1 - \alpha) a_2^0 = \langle I'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle$, (1)

$$a_\alpha^1 = \alpha a_1^1 + (1 - \alpha) a_2^1 = \langle g_1'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle, (2)$$

$$a_\alpha^3 = \alpha a_1^3 + (1 - \alpha) a_2^3 = \langle g_3'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle. (3)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \left\langle I'(u_*), \overset{\alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2}{u_\alpha} - u_* \right\rangle &= \left\langle I'(u_*), \alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2 - \overset{\alpha u_* + (1 - \alpha) u_*}{u_*} \right\rangle = \\ &= \left\langle I'(u_*), \alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2 - \alpha u_* - (1 - \alpha) u_* \right\rangle = \\ &= \left\langle I'(u_*), \alpha u_1 - \alpha u_* \right\rangle + \left\langle I'(u_*), (1 - \alpha) u_2 - (1 - \alpha) u_* \right\rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \langle I'(u_*), \alpha u_1 - \alpha u_* \rangle + \langle I'(u_*), (1-\alpha)u_2 - (1-\alpha)u_* \rangle = \\
&\quad \boxed{a_1^0 = \langle I'(u_*), u_1 - u_* \rangle} \quad \boxed{a_2^0 = \langle I'(u_*), u_2 - u_* \rangle} \quad (4) \\
&= \alpha \langle I'(u_*), u_1 - u_* \rangle + (1-\alpha) \langle I'(u_*), u_2 - u_* \rangle = \\
&= \alpha a_1^0 + (1-\alpha) a_2^0 = a_\alpha^0 (= \langle I'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle).
\end{aligned}$$

Равенство (1) $a_\alpha^0 = \langle I'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle$ доказано.

Установим справедливость (2) $a_\alpha^1 = \alpha a_1^1 + (1-\alpha) a_2^1 = \langle g_1'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle$, (2)

Имеем

$$\begin{aligned}
\left\langle g_1'(u_*), \begin{matrix} \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \\ u_\alpha \end{matrix} - u_* \right\rangle &= \left\langle g_1'(u_*), \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 - \begin{matrix} -\alpha u_* \\ (1-\alpha)u_* \end{matrix} - u_* \right\rangle = \\
&= \langle g_1'(u_*), \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 - \alpha u_* - (1-\alpha)u_* \rangle = \\
&\quad \boxed{a_1^1 = \langle g_1'(u_*), u_1 - u_* \rangle} \quad \boxed{a_2^1 = \langle g_1'(u_*), u_2 - u_* \rangle} \quad (5) \\
&= \alpha \langle g_1'(u_*), u_1 - u_* \rangle + (1-\alpha) \langle g_1'(u_*), u_2 - u_* \rangle =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \alpha \langle g_1'(u_*), u_1 - u_* \rangle + (1 - \alpha) \langle g_1'(u_*), u_2 - u_* \rangle \quad (5) \\
& = \alpha \langle g_1'(u_*), u_1 - u_* \rangle + (1 - \alpha) \langle g_1'(u_*), u_2 - u_* \rangle = \\
& = \alpha a_1^1 + (1 - \alpha) a_2^1 = a_\alpha^1 \left(= \langle g_1'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle \right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

Равенство (2) $a_\alpha^1 = \langle g_1'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle$ (2) доказано. Аналогично устанавливается

справедливость равенства (3). $a_\alpha^3 = \langle g_3'(u_*), u_\alpha - u_* \rangle$. (3) Таким образом,

множество A выпукло.

