

Готовимся к ЕГЭ-2015
по математике.
реальный КИМ ЕГЭ- 2014 (1
часть)
основная волна
(запад)

Учитель математики МБОУ СОШ № 143
г. Красноярска
Князькина Т. В.

▼ В летнем лагере 310 детей и 28 воспитателей. В автобус помещается не более 40 пассажиров. Какое наименьшее число автобусов требуется заказать, чтобы перевести всех детей и воспитателей из лагеря в город?

РЕШЕНИЕ

Пусть:

a - число детей;

b - количество воспитателей;

c - вместимость автобуса.

Интересует величина N -
целая часть с **избытком** числа

$$n = \frac{a + b}{c}$$

В данном случае:

$$a := 310 : b := 28 : c := 40 :$$

$$n = \frac{a + b}{c} = n = \frac{169}{20} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} n = 8.4500$$

$$N = \left\lceil \frac{a + b}{c} \right\rceil = N = 9$$

$$N = \text{ceil} \left(\frac{a + b}{c} \right) = N = 9$$

ОТВЕТ

9

В старинной книге полезных советов «Домострой» имеется рецепт десерта Шарлотка. Для приготовления Шарлотки следует взять 12 фунтов яблок. Сколько килограммов яблок надо взять хозяйке для приготовления Шарлотки? Считайте, что 1 фунт равен 400 грамм.

РЕШЕНИЕ

Пусть:

a - необходимая масса яблок в фунтах;

b - эквивалент 1 фунта в граммах ($1 \text{ г} = 0.001 \text{ кг}$).

Искомая масса яблок c в килограммах:

$$c = \frac{a \cdot b}{1000}$$

В данном случае:

$$a := 12 : b := 400 :$$

$$c = \frac{a \cdot b}{1000} = c = \frac{24}{5} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} c = 4.8000$$

ОТВЕТ

4.8

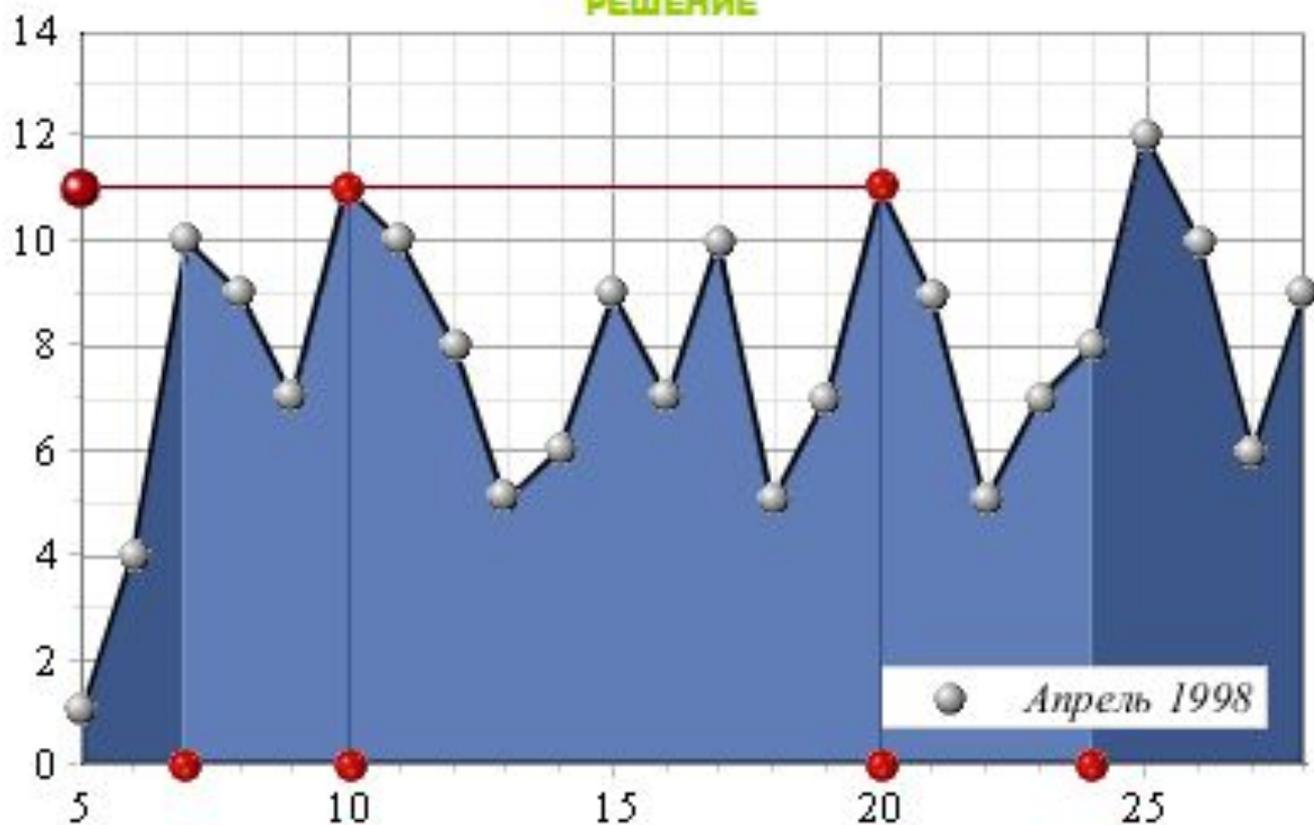


в3 На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Сочи каждый день с 5 по 28 апреля 1998 года.

На оси абсцисс отмечены дни, на оси ординат - температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией.

Определите по рисунку наибольшую среднесуточную температуру воздуха в Сочи в период с 7 по 24 апреля.

РЕШЕНИЕ



Непосредственно из диаграммы следует:

$$\text{ИСКОМОЕ} = t_{10} = t_{20} = 11$$

ОТВЕТ

11

В4 Для группы иностранных гостей требуется купить 30 путеводителей.

Нужные путеводители нашлись в трёх интернет-магазинах. Цена путеводителя и условия доставки всей покупки приведены в таблице. Во сколько рублей обойдётся наиболее дешёвый вариант покупки с доставкой?

РЕШЕНИЕ

Интернет-магазин	Цена одного путеводителя (руб.)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия
А	255	350	Нет
Б	270	300	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 8000 р.
В	245	450	Доставка бесплатно, если сумма заказа превышает 7500 р.

Пусть:

N - количество путеводителей;

A, B, C - цена одного путеводителя в каждом из магазинов (руб.);

a, b, c - соответствующие стоимости доставки (руб.);

m, n, p - акционные суммы (руб.).

Трижды вычислим возможные затраты: X, Y, Z , - и результаты сравним.

В данном случае:

$$\text{restart} : N := 30 : A := 255 : B := 270 : C := 245 : a := 350 : b := 300 : c := 450 : m := 0 : n := 8000 : p := 7500 :$$

$$X = N \cdot A + a = X = 8000$$

$$Y = N \cdot B = Y = 8100$$

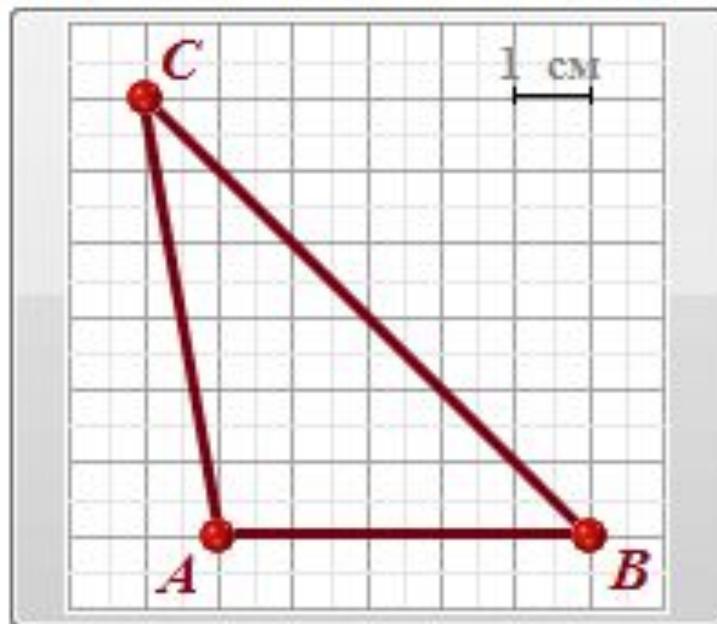
$$Z = N \cdot C + c = Z = 7800$$

(Учли, что бесплатная доставка будет только в магазине **Б**).

ОТВЕТ

7800

- ▼ **B5** На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображен треугольник ABC . Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AB (в сантиметрах).



РЕШЕНИЕ
РИСУНОК

Пусть $AB = c$ - длина основания треугольника.
Длина средней линии MN :

$$m = \frac{c}{2}$$

В данном случае:

restart : $c := 5$:

$$m = \frac{c}{2} = m = \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} m = 2.5000$$

ОТВЕТ

2.5

В6 Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 49 шахматистов среди которых 7 участников из России, в том числе Иван Котов. Найдите вероятность того, что в первом туре Иван Котов будет играть с каким-либо шахматистом из России.

РЕШЕНИЕ



Задача на классическое определение вероятности.

Пусть $n = 49$ - общее количество шахматистов, $m = 7$ - число соотечественников.

Интересует событие «спортсмен будет играть с каким-либо шахматистом-соотечественником».

Ему благоприятствуют из всех возможных $n - 1$ исходов только $m - 1$.

Искомая вероятность: $p = (m - 1) / (n - 1)$.

$$p = \frac{m - 1}{n - 1} = p = \frac{1}{8} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} p = 0.12500$$

ОТВЕТ

0.125

▼ **B7** Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+2} = 5^{x+5}$.

РЕШЕНИЕ

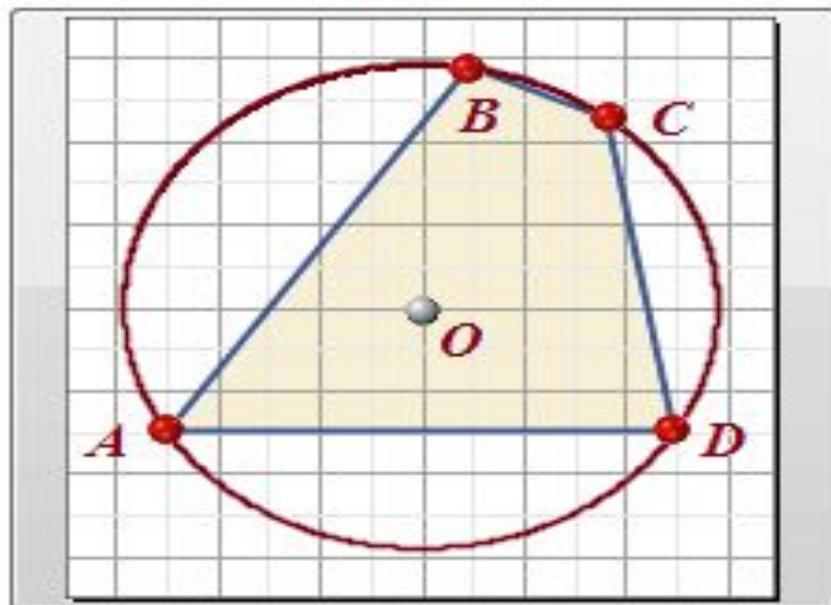
Перейдём от показательного уравнения к линейному, не забывая о равносильности:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{25}\right)^{x+2} = 5^{x+5} &\Leftrightarrow (5^{-2})^{x+2} = 5^{x+5} \Leftrightarrow \\ 5^{-2x-4} = 5^{x+5} &\Leftrightarrow -2x - 4 = x + 5 \Leftrightarrow \\ 3x &= -9 \Leftrightarrow x = -3\end{aligned}$$

ОТВЕТ

-3

▼ **вв** Два угла вписанного в окружность четырехугольника равны 65° и 41° .
Найдите больший из оставшихся углов этого четырехугольника. Ответ дайте в градусах.



РЕШЕНИЕ
РИСУНОК

Пусть $\angle BAD = \alpha$, $\angle ADC = \beta$, $\angle BCD = x$, $\angle ABC = y$.

По свойству вписанных углов:

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ, \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\alpha + x = 180^\circ, \beta + y = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$x = 180^\circ - \alpha, y = 180^\circ - \beta.$$

Искомая величина:

$$\varphi = \max\{180^\circ - \alpha, 180^\circ - \beta\}$$

В данном случае:

$$\text{restart} : \alpha := 41 : \beta := 65 :$$

$$\varphi = \max(180 - \alpha, 180 - \beta) = \varphi = 139$$

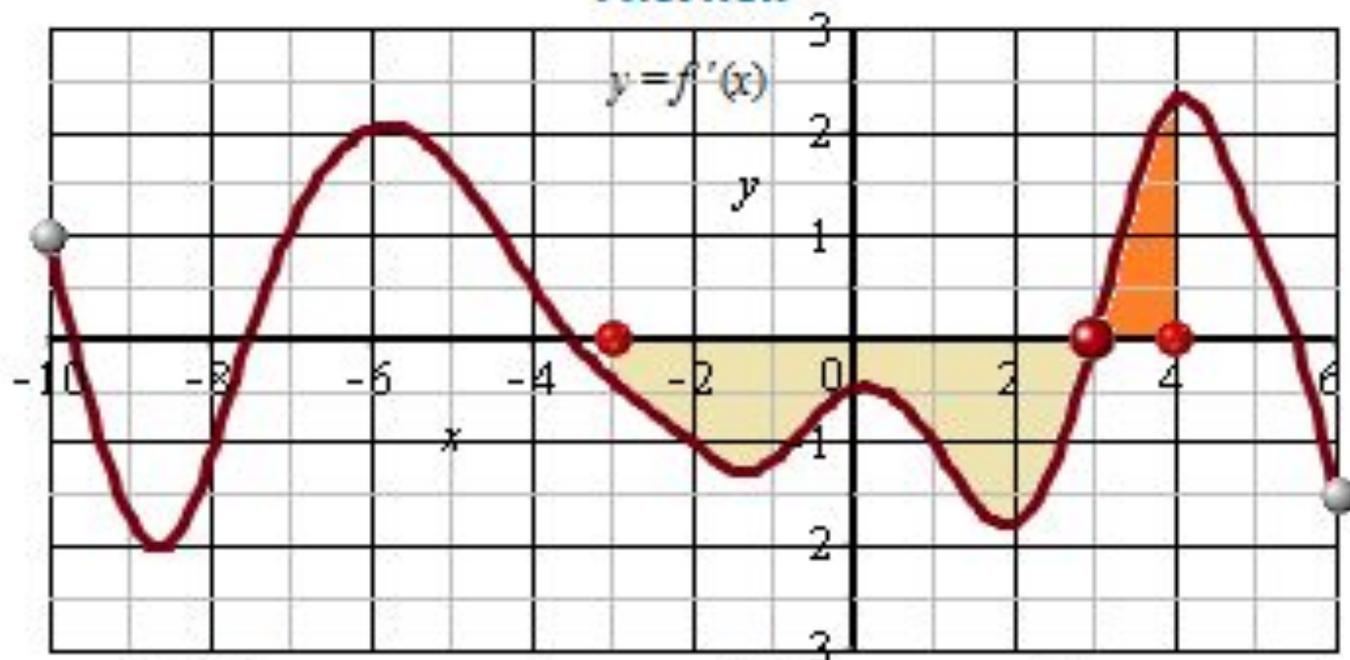
ОТВЕТ

139

▼ **В9** На рисунке изображен график $y = f'(x)$ - производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 6)$.
В какой точке отрезка $[-3; 4]$ функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение?

РЕШЕНИЕ

РИСУНОК



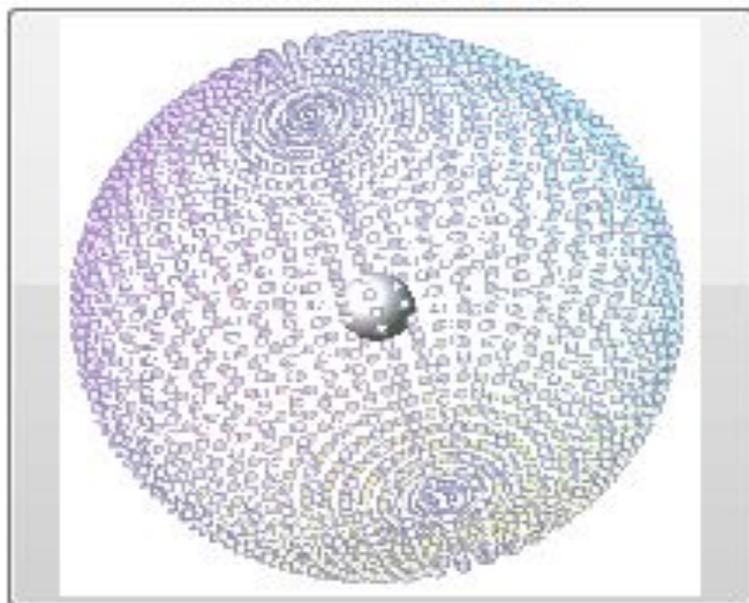
На отрезке $[-3; 4]$ производная функции $f'(x)$ в точке $x = 3$ меняет свой знак с «-» на «+» (при переходе слева направо).

Поэтому $x = 3$ - точка минимума и, заодно, - точка наименьшего значения функции $f(x)$ на отрезке.

ОТВЕТ

3

- ▼ **В10** Даны два шара. Диаметр первого шара в 8 раз больше диаметра второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



РЕШЕНИЕ
РИСУНОК

Пусть D и d - диаметры сфер, $D/d = k$.
Соответствующие площади поверхностей:

$$S = \pi D^2, s = \pi d^2$$

Искомое отношение:

$$n = \frac{S}{s} = \frac{\pi D^2}{\pi d^2} = \left(\frac{D}{d}\right)^2 = k^2$$

В данном случае:

$$\text{restart : } k := 8 :$$

$$n = k^2 = n = 64$$

ОТВЕТ

64

В11 Найдите значение выражения

$$\sqrt{72} - \sqrt{288} \sin^2 \frac{21\pi}{8}$$

РЕШЕНИЕ

Упростим иррациональность и применим тригонометрическую формулу понижения степени:

$$Z = \sqrt{72} - \sqrt{288} \sin^2 \frac{21\pi}{8}$$

$$Z = \sqrt{2 \cdot 6^2} - \sqrt{2 \cdot 12^2} \cdot \frac{1 - \cos \frac{21\pi}{4}}{2}$$

$$Z = 6 \cdot \sqrt{2} - 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(1 - \cos \left(5\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

Воспользуемся периодичностью косинуса:

$$Z = 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(1 - \left(1 - \cos \left(\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right)$$

Воспользуемся формулой приведения:

$$Z = 6 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(1 - 1 - \cos \frac{\pi}{4} \right)$$

$$Z = -6 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4}$$

$$Z = -6 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -6$$

$$\sqrt{72} - \sqrt{288} \sin^2 \left(\frac{21\pi}{8} \right) = 6\sqrt{2} - 12\sqrt{2} \sin^2 \left(\frac{3}{8}\pi \right) \stackrel{\text{simplify trig}}{=} -6$$

ОТВЕТ
-6

- ▼ **B12** Гоночный автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a км/ч². Скорость v в конце пути вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l - пройденный автомобилем путь. Определите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль чтобы, проехав 250 метров, приобрести скорость 60 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

РЕШЕНИЕ

Выразим ускорение из предложенной формулы скорости:

$$v = \sqrt{2la} \xrightarrow{\text{solve for } a} a = \frac{1}{2} \frac{v^2}{l}$$

Не забудем метры перевести в километры.

В данном случае:

$$\text{restart : } l := \frac{250}{1000} : v := 60 :$$

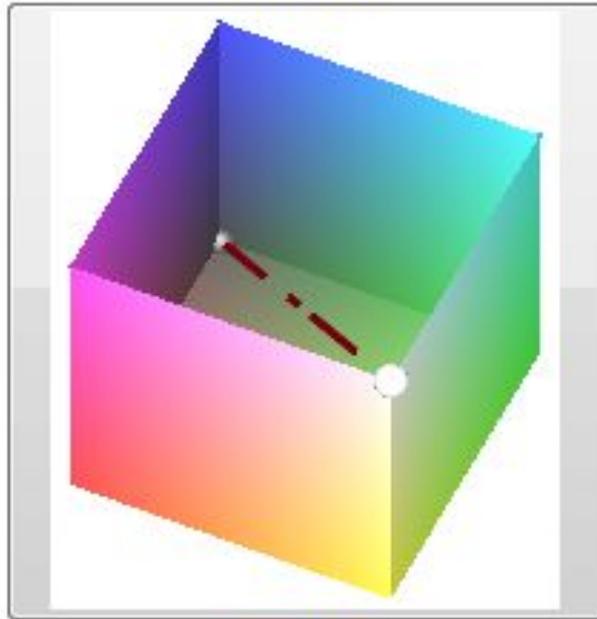
$$a = \frac{1}{2} \frac{v^2}{l} = a = 7200$$

ОТВЕТ

7200

▼ **В13** Диагональ куба равна $\sqrt{48}$. Найдите объем куба.

РЕШЕНИЕ



РИСУНОК

Пусть a - длина ребра куба.

Длина его диагонали:

$$d = a \cdot \sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Объем куба:

$$v = a^3 = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$$

В данном случае:

restart : $d := \sqrt{48}$:

$$v = \frac{d^3}{3\sqrt{3}} = v = 64$$

ОТВЕТ

64

В14 Имеется два раствора. Первый содержит 10% соли, второй - 30% соли. Из этих двух растворов получили третий раствор массой 200 кг, содержащий 25% соли. На сколько килограммов масса первого раствора меньше массы второго?

РЕШЕНИЕ

Пусть:

m - процентная концентрация 1-го раствора, n - 2-го, p - 3-го;

u - масса 1-го раствора, v - 2-го, w - 3-го;

$x = v - u$ - искомое.

На основании определения процентной концентрации раствора, имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u \cdot \frac{m}{100} + v \cdot \frac{n}{100}}{w} = \frac{p}{100} \\ u + v = w \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \cdot m + v \cdot n = w \cdot p \\ v = w - u \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = w \cdot \frac{p - n}{m - n} \\ v = w \cdot \frac{m - p}{m - n} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$x = w \cdot \frac{m - p}{m - n} - w \cdot \frac{p - n}{m - n}$$

$$x = \frac{w \cdot (m + n - 2p)}{m - n}$$

В данном случае:

$$\text{restart : } m := 10 : n := 30 : p := 25 : w := 200 :$$

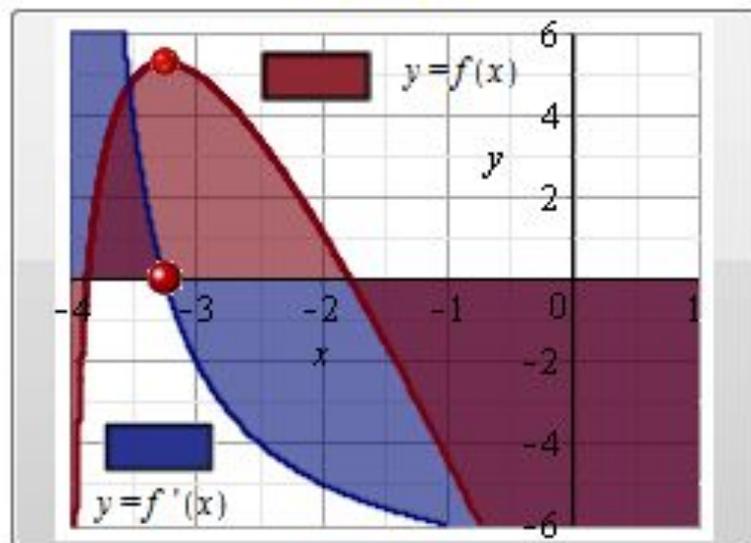
$$x = \frac{w \cdot (m + n - 2p)}{m - n} = x = 100$$

ОТВЕТ

100

В15 Найдите точку максимума функции $y = 2 \ln(x + 4)^3 - 8x - 19$.

РЕШЕНИЕ



РИСУНОК

Функция

$y = 2 \ln(x + 4)^3 - 8x - 19 = 6 \ln(x + 4) - 8x - 19$
 определена, непрерывна и дифференцируема для всех $x \in (-4; \infty)$.
 Её производная:

$$y' = 6 \cdot \frac{1}{x + 4} - 8 = 2 \cdot \frac{3 - 4x - 16}{x + 4} = -8 \cdot \frac{x + \frac{13}{4}}{x + 4}$$

Точка $x = -\frac{13}{4}$ - критическая. Поскольку при переходе через неё слева направо производная меняет знак с «+» на «-», то это искомая точка максимума.

*restart : maximize(2 * ln((x + 4)^3) - 8 * x - 19, x = -4 .. 1, location)*

$$7 + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right), \left\{ \left\{ x = -\frac{13}{4} \right\}, 7 + 6 \ln\left(\frac{3}{4}\right) \right\}$$

ОТВЕТ

-3.25