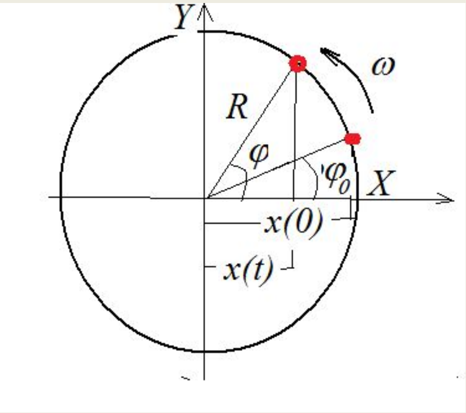
Тема 5 # Колебания **Часть1**

Основные понятия и классификация колебаний

Колебаниями называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени.

Физическая природа колебаний может быть разной, поэтому различают колебания **механические**, **электромагнитные** и **электромеханические**.

Пример колебательного процесса: движение м.т. по окружности с постоянной скоростью.



$$x(0) = R\cos\varphi_0$$

$$x(t) = R\cos\varphi$$

$$\varphi = \omega t + \varphi_o$$

$$x(t) = R\cos(\omega t + \varphi_o)$$

$$y(t) = R\sin(\omega t + \varphi_o)$$

Такое движение – суперпозиция колебательных движений во взаимно перпендикулярных направлениях.

Любой повторяющийся процесс, исключая случайный, можно представить в виде конечной суммы колебаний.

Колебания называются **свободными** (или **собственными**), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему (систему, совершающую колебания).

Вынужденными называют такие колебания, которые происходят в системе под периодическим внешним воздейст–вием

5.1 Гармонические колебания

Гармонические колебания описываются уравнением

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Или, т.к. $\cos\alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$,

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$, где x

- смещение колеблющейся величины из положения равновесия

A – амплитуда колебаний

ω_0 – круговая (циклическая) частота

φ – начальная фаза колебаний

$(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза колебаний

Минимальный промежуток времени, по истечении которого колебательный процесс повторяется, называется периодом колебаний T

$$\omega_0(t+T)+\varphi=\omega_0 t+\varphi+2\pi$$ Откуда $$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

Величина, обратная периоду,, называется частотой колебаний

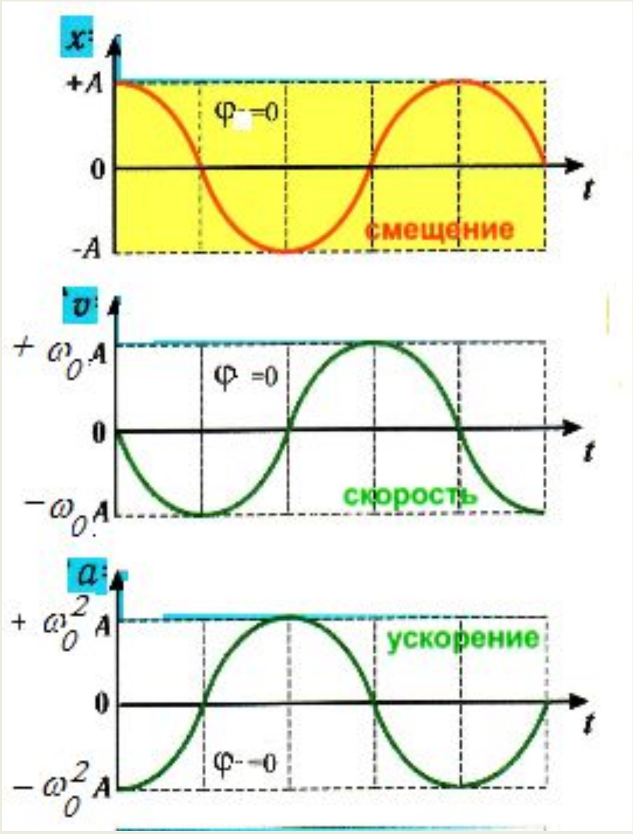
$$\nu=\frac{1}{T}$$

Циклическая частота $\omega_0=2\pi\nu$

Гармонические колебания – колебания, при которых колеблю–щаяся величина изменяется со временем по закону синуса (косинуса); при этом параметры $A, \omega_0, \varphi = const$.

Колебательная система, в которой могут происходить гармони–ческие колебания, называется **гармоническим осциллятором**

Рассмотрим гармонические колебания материальной точки вдоль оси *OX*. В момент времени *t:*



1) Ее смещение

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

*2)С*корость

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

3) Ускорение

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x$$

4) Сила, действующая на м.т.

$$F = ma = -m\omega^2 x$$

Она пропорциональна смещению и направлена в противоположную смещению сторону – это квазиупругая сила.

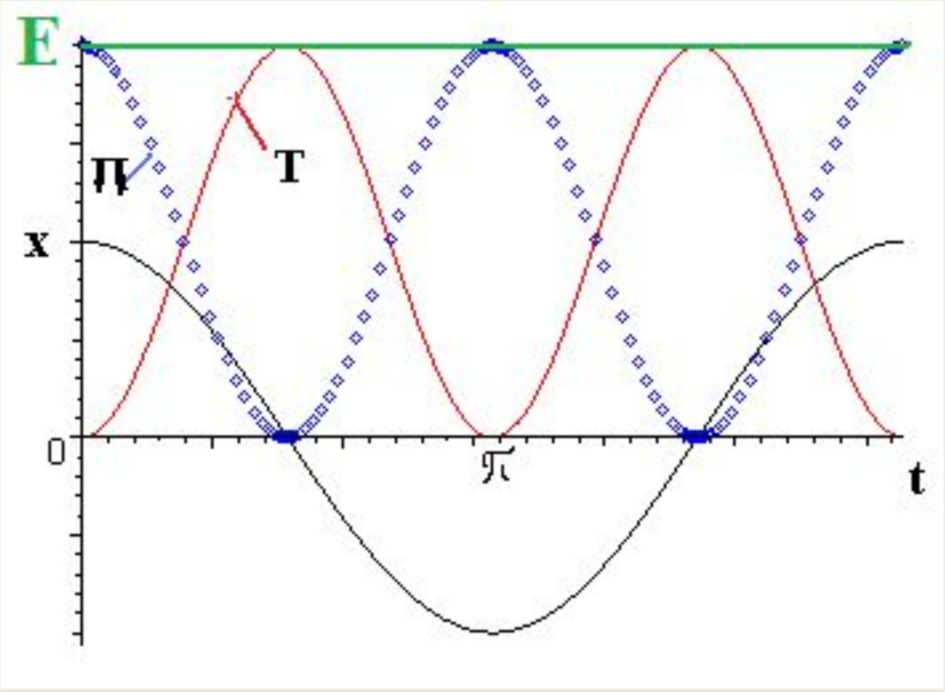
5) Кинетическая энергия м.т. $T = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

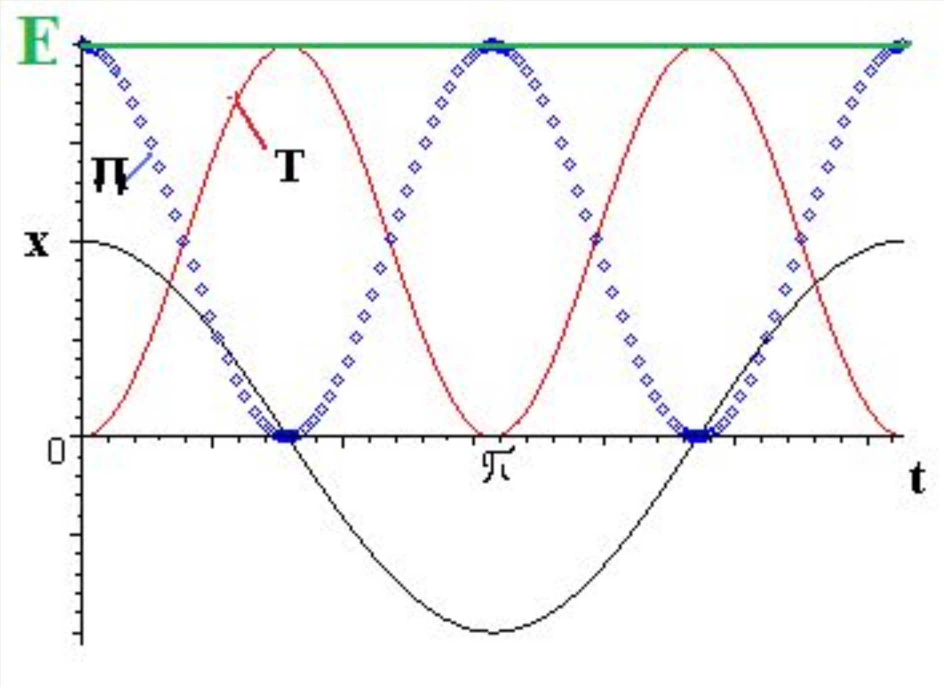
6) Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием квазиупругой силы ***F***:

$$\Pi = -\int_0^x F dx = \int_0^x m\omega_0^2 x dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

7) Полная энергия

$$E = T + \Pi = \frac{1}{2} mA^2\omega_0^2$$





Колебания потенциальной и кинетической энергий происходят с периодом, в два раза меньшим, чем период колебаний смещения *x(t)*.

Происходит постоянная перекачка энергии из потенциальной **П** в кинетическую **T** и обратно, при этом полная энергия системы **E** остается постоянной.

8) Дифференциальное уравнение гармонических колебаний м. т.:

$$m\ddot{x} = -kx \qquad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Его решение: $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Или с учетом того, что $\cos\alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Гармонические колебания изображаются графически **методом векторных диаграмм.**

Колеблющуюся величину представляют и комплексным числом

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$\tilde{x} = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$\mathrm{Re}(\tilde{x}) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) = x$$

Обозначение Re вещественной части обычно опускается

$$x = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)}$$

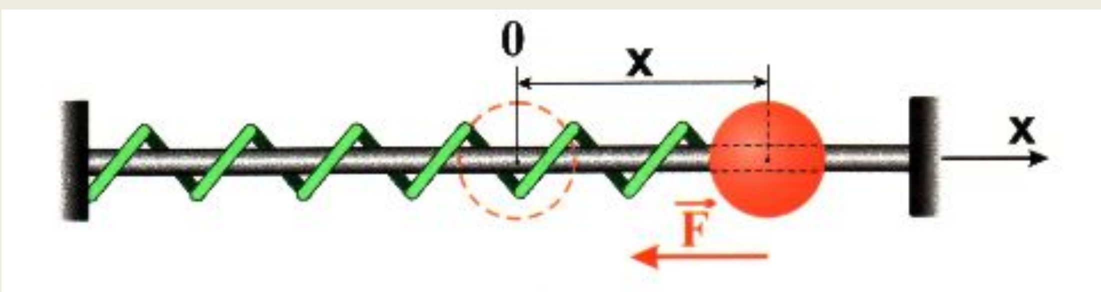
В теории колебаний принимается, что колеблющаяся величина ***x*** равна вещественной части комплексного выражения, стоящего в этом равенстве справа.

Гармонический осциллятор. Пружинный, физический и математический маятники

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Пружинный маятник.



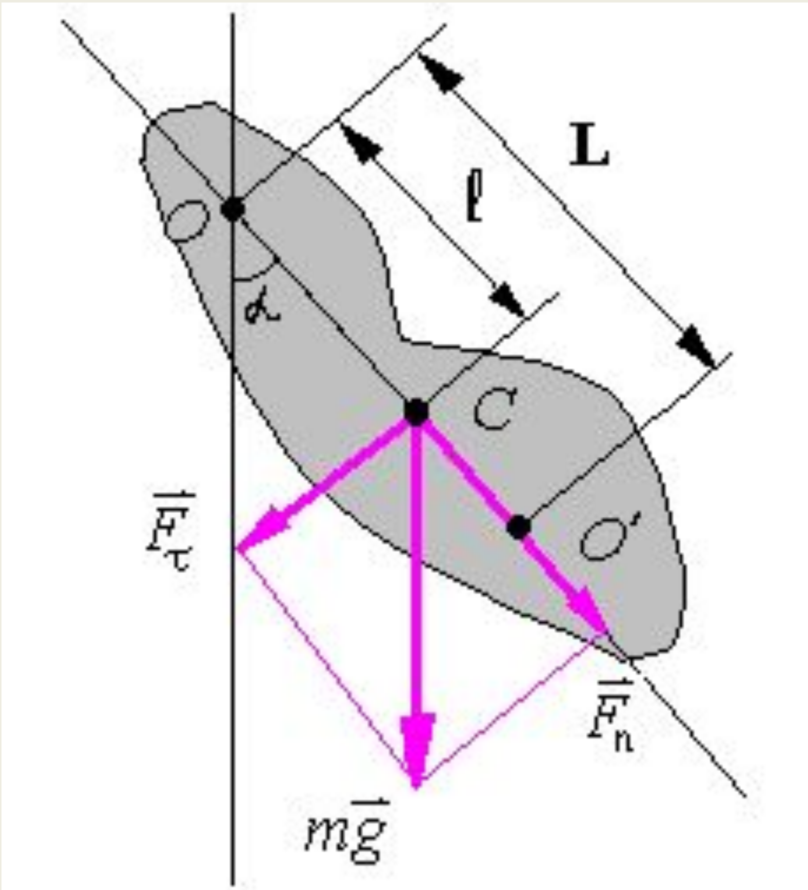
Пример одномерного гармонического осциллятора (трения нет)

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Физический маятник.



Физический маятник – это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящий через центр масс *C* тела.

$$M = I\varepsilon = I\ddot{\alpha} = F_\tau l =$$

$$= -mgl\sin\alpha \approx -mgl\alpha$$

$$I\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I}\alpha = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}} \qquad \ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$$

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0$$

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad ;$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$L = \dfrac{I}{ml}$ – приведенная длина физического маятника

Математический маятник.

Математический маятник – это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести.

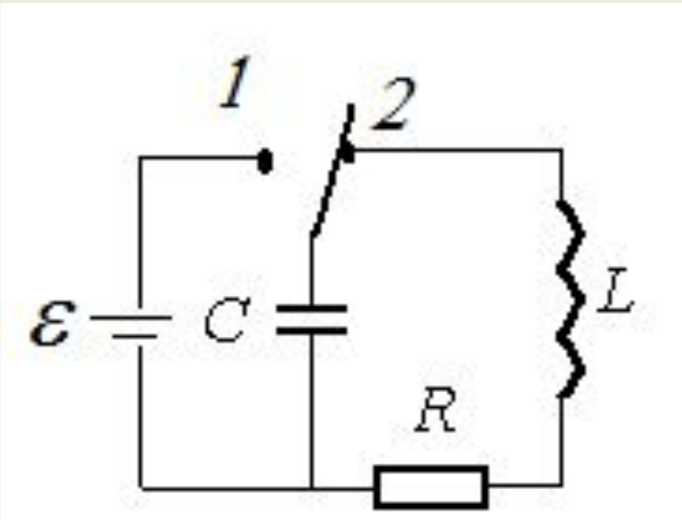
$$I = ml^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Свободные гармонические колебания в колебательном контуре.



$$IR + U_C = \mathcal{E}_S$$

$$L\frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0$$

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0 \quad (*)$$

$$R = 0: \qquad \ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0 \qquad \ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0$$

$$Q = Q_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad T = 2\pi\sqrt{LC}$$ Формула Томсона

$$I = \dot{Q} = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_0}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Отсюда видно, что колебания тока опережают по фазе колебания заряда на $\frac{\pi}{2}$.

Колебания электрической энергии , запасенной в конденсаторе

$$W_E = \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Колебания энергии магнитного поля в катушке

$$W_H = \frac{LI^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

Полная энергия, запасенная в контуре

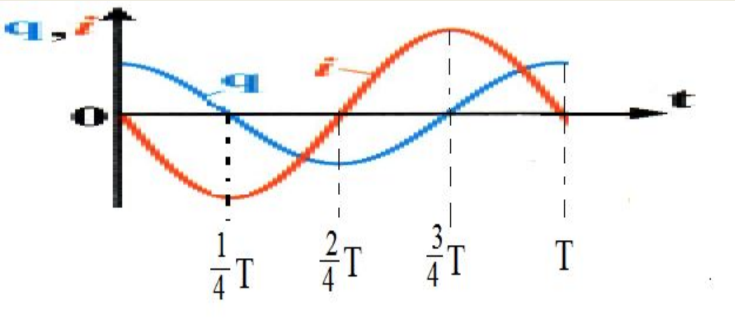
$$W = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{C}{2}\frac{Q_0^2}{C^2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{L}{2}\frac{Q_0^2}{LC}\sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{Q_0^2}{2C} = const$$

Связь амплитудных значений тока и напряжения

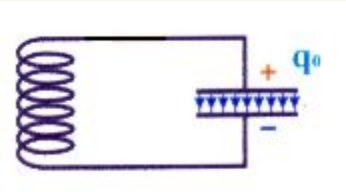
$$W = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad U_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}\, I_0$$

Превращения энергии в колебательном контуре

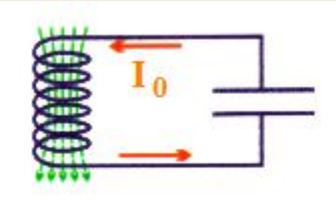
$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad I = -I_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$



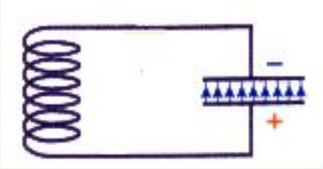
В последующие полпериода процесс повторяется в обратном направлении.



$t = 0 : q_{max} = q_0, E = \dfrac{q_0^2}{2C}$ -мгновенной разрядке С препятствует ε_s, сдерживающая процесс нарастания I в катушке.



$t = \dfrac{1}{4}T, q = 0, I_{max} = I_0, E = \dfrac{LI_0^2}{2}$ - С разряжен, ток и энергия магнитного поля максимальны. Мгновенному убыванию тока I препятствует появление ε_s .



$t = \dfrac{2}{4}T, I = 0, q = -q_0, E = \dfrac{q_0^2}{2C}$ - С зарядился индукционным током катушки.