

Рассмотрим правильную пирамиду $PA_1A_2\dots A_n$ (см. Рис. 12). Сначала докажем, что все боковые ребра этой пирамиды равны. Любое боковое ребро представляет собой гипотенузу прямоугольного треугольника, одним катетом которого служит высота пирамиды PO , а другим – радиус описанной около основания окружности (например, боковое ребро PA_1 – гипотенуза треугольника OPA_1 , в котором $OP = h$, $OA_1 = R$. По теореме Пифагора любое боковое ребро равно $\sqrt{h^2 + R^2}$, поэтому:

$$PA_1 = PA_2 = \dots = PA_n$$

Рис. 12

Мы доказали, что боковые ребра правильной пирамиды $PA_1A_2\dots A_n$ равны друг другу, поэтому боковые грани – равнобедренные треугольники. Основания этих треугольников также равны друг другу, так как $A_1A_2\dots A_n$ – правильный многоугольник. Следовательно, боковые грани равны по третьему признаку равенства треугольников, что и требовалось доказать.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой. На рисунке 12 отрезок PE – одна из апофем. Ясно, что все апофемы правильной пирамиды равны друг другу.

Докажем теорему о площади боковой поверхности правильной пирамиды.

Теорема

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

Доказательство

Боковые грани правильной пирамиды равные равнобедренные треугольники, основания которых — стороны основания пирамиды, а высоты равны апофеме. Площадь боковой поверхности пирамиды S равна сумме произведений сторон основания на половину апофемы d . Вынося множитель $1/2d$ за скобки, получим в скобках сумму сторон основания пирамиды, т. е. его периметр.

Теорема доказана.

Усеченная пирамида

Возьмем произвольную пирамиду $PA_1A_2\dots A_n$ и проведем секущую плоскость β , параллельную плоскости α основания пирамиды и пересекающую боковые ребра в точках B_1, B_2, \dots, B_n (рис. 13). Плоскость β разбивает пирамиду на два многогранника. Многогранник, гранями которого являются n -угольники и $A_1A_2\dots A_n, B_1B_2\dots B_n$ (нижнее и верхнее основания), расположенные в параллельных плоскостях, и четырехугольники $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, \dots, A_nA_1B_1B_n$ (боковые грани), называется усеченной пирамидой.

Отрезки $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$ называются боковыми ребрами усеченной пирамиды.

Усеченную пирамиду с основаниями $A_1A_2\dots A_n$ и $B_1B_2\dots B_n$ обозначают так: $A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_n$.

Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой усеченной пирамиды. На рисунке 13 отрезок CH является высотой усеченной пирамиды.

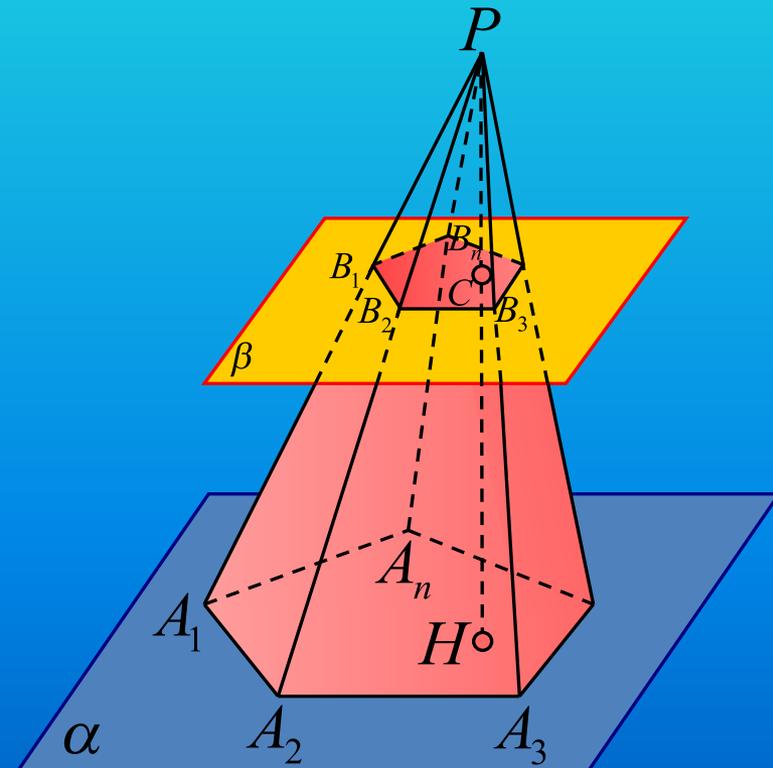


Рис. 13

Докажем, что боковые грани усеченной пирамиды – трапеции. Рассмотрим, например, боковую грань $A_1A_2B_2B_1$ (см. рис. 13). Стороны A_1A_2 и B_1B_2 параллельны, поскольку принадлежат прямым, по которым плоскость PA_1A_2 пересекается с параллельными плоскостями α и β . Две другие стороны и этой грани не параллельны – их продолжения пересекаются в точке P . Поэтому данная грань – трапеция. Аналогично можно доказать, что и остальные боковые грани – трапеции.

Усеченная пирамида называется правильной, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Основания правильной усеченной пирамиды – правильные многоугольники, а боковые грани – равнобедренные трапеции. Высоты этих трапеций называются апофемами. Площадью боковой поверхности усеченной пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.

Объём пирамиды

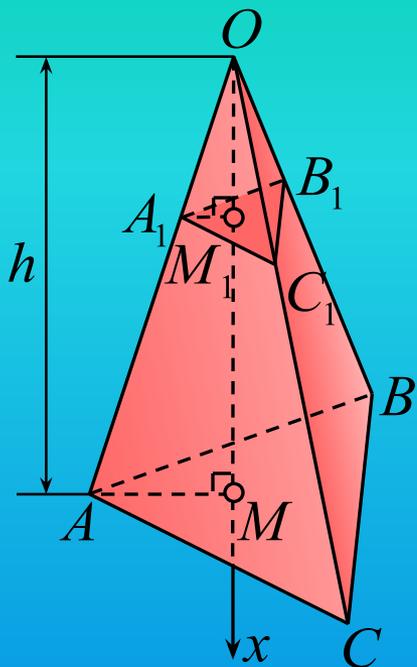


Рис. 14.1

Теорема

Объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Доказательство

Сначала докажем теорему для треугольной пирамиды, а затем – для произвольной пирамиды.

1. Рассмотрим треугольную пирамиду $OABC$ с объёмом V , площадью основания S и высотой h . Проведем ось Ox (Рис. 14.1 где OM – высота пирамиды) и рассмотрим сечение $A_1B_1C_1$ пирамиды плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и, значит, параллельной плоскости основания.

Обозначим через x абсциссу точки пересечения этой плоскости с осью Ox , а через $S(x)$ – площадь сечения. Выразим $S(x)$ через S , h и x . Заметим, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. В самом деле, $A_1B_1 \parallel AB$, поэтому $\triangle OA_1B_1$ подобен $\triangle OAB$. Следовательно, $A_1B_1/AB = OA_1/OA$.

Прямоугольные треугольники OA_1M_1 и OAM также подобны (они имеют общий острый угол с вершиной O).

Поэтому $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OM_1}{OM} = \frac{x}{h}$.

Таким образом, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{x}{h}$. Аналогично доказывается, что

и $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{x}{h}$, $\frac{C_1A_1}{CA} = \frac{x}{h}$. Итак, треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC

подобны с коэффициентом подобия $\frac{x}{h}$.

Следовательно, $\frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2$, или $S(x) = \frac{S}{h^2} x^2$.

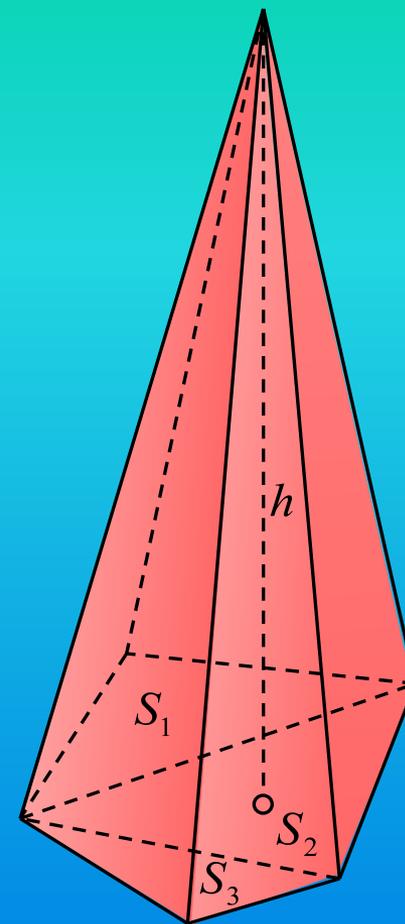
Применяя теперь основную формулу для вычисления объемов тел при $a = 0$, $b = 0$, получаем

$$V = \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \frac{S}{h^2} x^2 dx = \frac{S}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} S \cdot h$$

2. Докажем теперь теорему для произвольной пирамиды с высотой h и площадью основания S . Такую пирамиду можно разбить на треугольные пирамиды с общей высотой h (на рисунке 14.2 показано разбиение для пятиугольной пирамиды).

Выразим объем каждой треугольной пирамиды по доказанной нами формуле и сложим эти объемы. Вынося за скобки общий множитель $1/3 h$, получим в скобках сумму площадей оснований треугольных пирамид, т. е. Площадь основания S исходной пирамиды. Таким образом, объем исходной пирамиды равен $1/3 Sh$.

Теорема доказана.



$$V = \frac{1}{3} (S_1 + S_2 + S_3) h = \frac{1}{3} Sh$$

Рис. 14.2

Следствие

Объем V усеченной пирамиды, высота которой равна h , а площади оснований равны S и S_1 , вычисляются по формуле:

$$V = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$$

Конус

Рассмотрим окружность L с центром O и прямую OP перпендикулярную к плоскости α от этой окружности. Через точку P и каждую точку окружности проведем прямую. Поверхность, образованная этими прямыми, называется конической поверхностью (рис. 15), а сами прямые – образующими конической поверхности. Точка P называется вершиной, а прямая OP – осью конической поверхности.

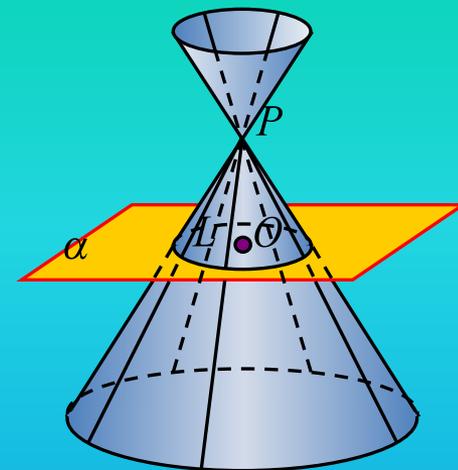


Рис. 15

Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей называется конусом (Рис. 16). Круг называется основанием конуса, вершина конической поверхности – вершиной конуса, отрезки образующих, заключенные между вершиной и основанием, – образующими конуса, а образованная ими часть конической поверхности – боковой поверхностью конуса. Ось конической поверхности называется осью конуса, а ее отрезок, заключенный между вершиной и основанием, – высотой конуса. Отметим, что все образующие конуса равны друг другу.

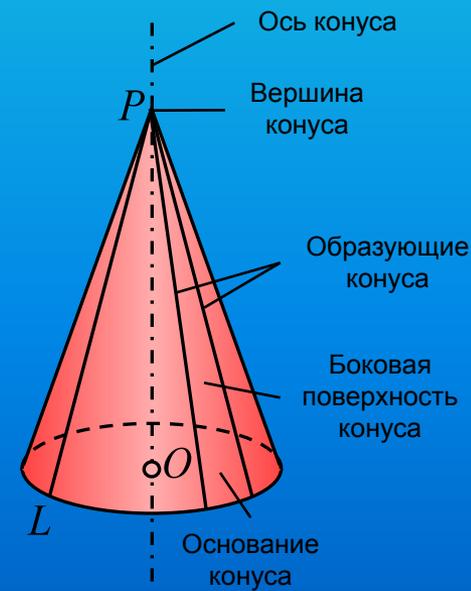


Рис. 16

Конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. На рисунке 17 изображен конус, полученный вращением прямоугольного треугольника ABC вокруг катета AB . При этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы AC , а основание – вращением катета BC .

Рассмотрим сечение конуса различными плоскостями. Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то сечение представляет собой равнобедренный треугольник, основание которого – диаметр основания конуса, а боковые стороны – образующие конуса. Это сечение называется осевым.

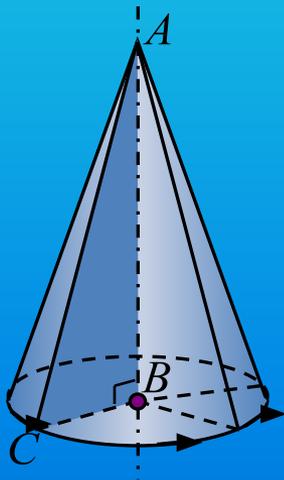


Рис. 17

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси конуса, то сечение конуса представляет собой круг с центром O_1 , расположенным на оси конуса. Радиус r этого круга равен $PO_1/PO \cdot r$, где r – радиус основания конуса, что легко усмотреть из подобия прямоугольных треугольников POM и PO_1M_1 .

Площадь поверхности конуса

Боковую поверхность конуса, как и боковую поверхность цилиндра, можно развернуть на плоскость, разрезав ее по одной из образующих (Рис. 18.1 и 18.2). Разверткой боковой поверхности конуса является круговой сектор (см. Рис. 18.2), радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги сектора равна длине окружности основания конуса.

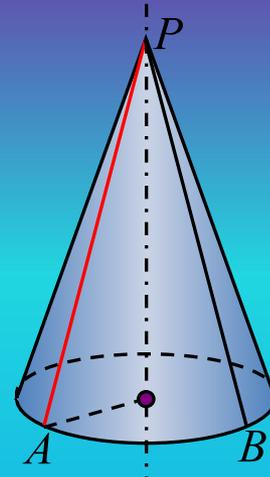


Рис. 18.1

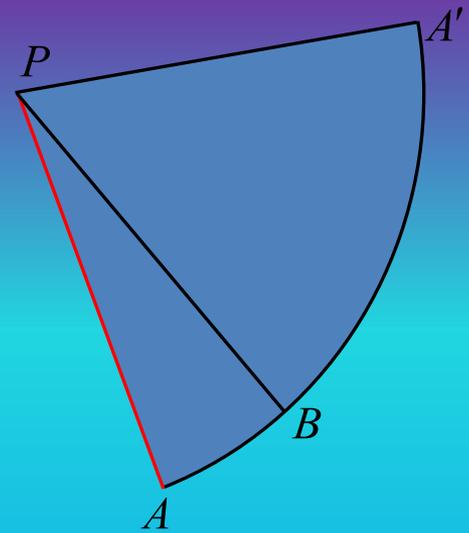


Рис. 18.2

За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь ее развертки. Выразим площадь $S_{\text{бок.}}$ боковой поверхности конуса через его образующую l и радиус основания r . Площадь кругового сектора – развертки боковой поверхности конуса (см. Рис. 18.2) – равна $\pi l^2 / 360^\circ \cdot \alpha$, где α – градусная мера дуги ABA' , поэтому $S_{\text{бок.}} = \pi l^2 / 360^\circ \cdot \alpha$. (1)

Выразим α через l и r . Так как длина дуги ABA' равна $2\pi r$ (длине окружности основания конуса), то $2\pi r = \pi l / 180^\circ \cdot \alpha$, откуда $\alpha = 360 r / l$. Подставив это выражение в формулу (1), получим $S_{\text{бок.}} = \pi r l$. (2)

Таким образом, площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей боковой поверхности и основания. Для вычисления площади $S_{\text{кон.}}$ полной поверхности конуса получается формула $S_{\text{кон.}} = \pi r (l + r)$.

Объём конуса

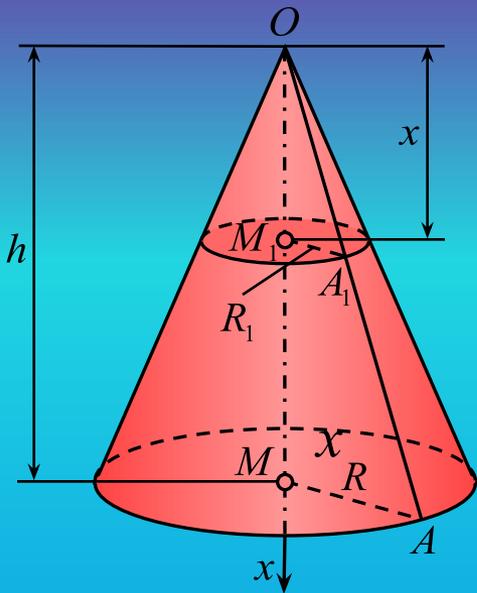


Рис. 19

Теорема

Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

Доказательство

Рассмотрим конус с объемом V , радиусом основания R высотой h и вершиной в точке O . Введем ось O_x так, как показано на рисунке 19 (x – ось конуса). Произвольное сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к оси O_x является кругом с центром в точке M_1 пересечения этой плоскости с осью O_x .

Обозначим радиус этого круга через R_1 , а площадь сечения через $S(x)$, где x – абсцисса точки M_1 . Из подобия прямоугольных треугольников OM_1A_1 и OMA следует, что $OM_1/OM = R_1/R$ или $x/h = R_1/R$, откуда $R_1 = R/x \cdot h$. Так как $S(x) = \pi R_1^2$, то $S(x) = \pi R^2/h^2 \cdot x^2$. Применяя основную формулу для вычисления объемов тел при $a = 0$, $b = h$, получаем

$$V = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

Площадь основания конуса равна πR^2 , поэтому $V = 1/3 Sh$.

Теорема доказана.

Следствие

Объем V усеченного конуса, высота которого равна h , а площади оснований равны S и S_1 , вычисляется по формуле:

$$V = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$$

Шар

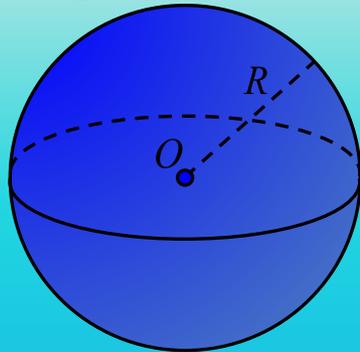


Рис. 20

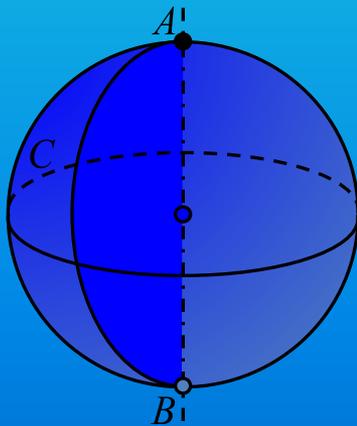


Рис. 21

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки (Рис. 20).

Данная точка называется центром сферы (точка O на рисунке 20), а данное расстояние – радиус сферы. Радиус сферы часто обозначают латинской буквой R .

Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также называется радиусом сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется диаметром сферы. Очевидно, диаметр сферы равен $2R$. Отметим, что сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг ее диаметра (Рис. 21).

Тело, ограниченное сферой, называется шаром. Центр, радиус и диаметр сферы называются также центром, радиусом и диаметром шара. Очевидно, шар радиуса R с центром O содержит все точки пространства, которые расположены от точки O на расстоянии, не превышающем R (включая и точку O), и не содержит других точек.

Объём шара

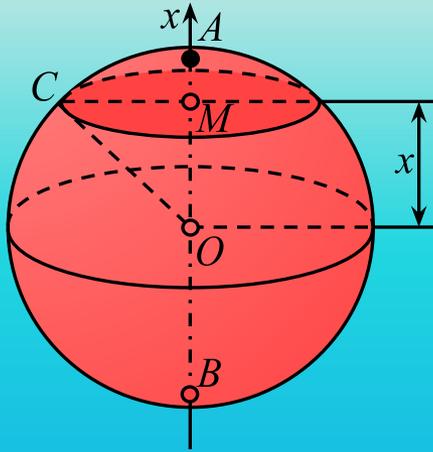


Рис. 22

Теорема

Объём шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Доказательство

Рассмотрим шар радиуса R с центром в точке O и выберем ось Ox произвольным образом (Рис. 22). Сечение шара плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и проходящей через точку M этой оси, является кругом с центром в точке M .

Обозначим радиус этого круга через r , а его площадь через $S(x)$ где x – абсцисса точки M . Выразим $S(x)$ через x и R . Из прямоугольного треугольника OMC находим $r = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2}$. Так как $S(x) = \pi r^2$, то $S(x) = \pi(R^2 - x^2)$.

Заметим, что эта формула верна для любого положения точки M на диаметре AB т. е. для всех x , удовлетворяющих условию: $-R \leq x \leq R$.

Применяя основную формулу для вычисления объемов тел при $a = -R$, $b = R$, получаем

$$V = \int_{-R}^R \pi(R^2 - x^2) dx = \pi R^2 \int_{-R}^R dx - \int_{-R}^R x^2 dx = \pi R^2 x \Big|_{-R}^R - \frac{\pi x^3}{3} \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Теорема доказана.

Список используемой литературы

- /Л.С. Анатасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. Геометрия, 10 – 11: учеб. для общеобразоват. учреждений М.: Просвещение, 2011. – 256 с.
- *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г., Юдина И. И. Геометрия. 7-9 классы: Учебник для общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2011.*