Логарифмические уравнения

их типы и методы решения

Концентрация внимания:

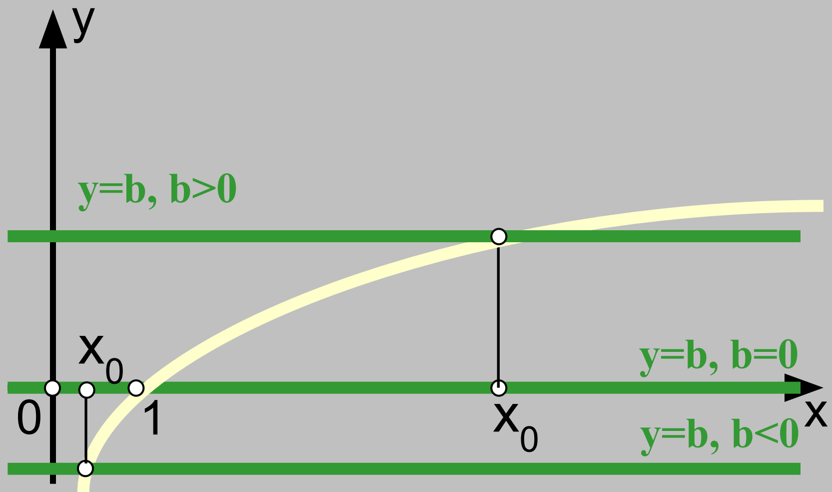
кросс – опрос

Вопрос	Ответ
Сформулируйте определение логарифма	$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$
Чему равен логарифм произведения?	$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$
Чему равен логарифм частного?	$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, a > 0, a \neq 1, x > 0, y > 0$
Чему равен логарифм степени числа?	$\log_a x^p = p\log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0, p \in R$
Чему равен логарифм степени основания?	$\log_{a^q} x = \frac{1}{q}\log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0, q \neq 0, q \in R$
Чему равен логарифм степени числа и основания?	$\log_{a^q} x^p = \frac{p}{q}\log_a x, a > 0, a \neq 1, x > 0, q \neq 0, q; p \in R$
Запишите формулу перехода к логарифму другого основания	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} a > 0, a \neq 1, c > 0, c \neq 1, b > 0$
Запишите частный случай формулы перехода к логарифму другого основания	$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$

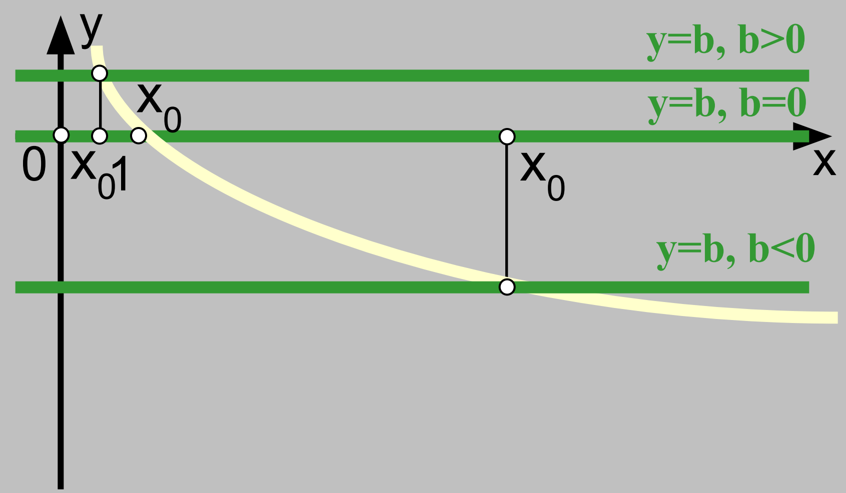
Концентрация внимания равна N.
N = (число верных ответов) x 0,125 x 100%.

Рассмотрим взаимное расположение графика функции $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ и прямой $y=b$.

$y=\log_a x$ $(a>1)$



$y=\log_a x$ $(0<a<1)$



ВЫВОД:

График функции $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ и прямая $y=b$ пересекаются в единственной точке, т.е. уравнение $\log_a x=b$, $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$ имеет единственное решение $x_0=a^b$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Уравнение $\log_a x=b$, $a>0$, $a\neq1$, $x>0$ называется **простейшим логарифмическим уравнением**.

Пример:

$$\log_3 x = 2;$$

$$\log_{0,5}(2x-1) = -1;$$

$$\log_{2x}(x^2-3x-4) = 2.$$

Типы и методы решения логарифмических уравнений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ:

Логарифмическими называются уравнения, содержащие неизвестную под знаком логарифма или в основании логарифма (или и то и другое одновременно).

Типы и методы решения логарифмических уравнений. ДОПОЛНЕНИЕ:

При решении логарифмических уравнений необходимо учитывать:

- область допустимых значений логарифма: под знаком логарифма могут находиться только положительные величины;
- в основании логарифмов - только положительные величины, отличные от единицы;
- свойства логарифмов;
- действие потенцирования.

1) Простейшие логарифмические уравнения.

Пример №1

$\log_2(3x-2)=3$

Решение:

$\log_2(3x-2)=3.$

Т.к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0, a\neq 1$ и $3=\log_2 8$, то

$\begin{cases} 3x-2>0, \\ 3x-2=8; \end{cases}$ $\begin{cases} x>\frac{2}{3}, \\ x=3\frac{1}{3}; \end{cases}$ $x=3\frac{1}{3}.$

Ответ: $3\frac{1}{3}.$

2) Логарифмические уравнения, сводящиеся к простейшим логарифмическим уравнениям.

Решение:

Пример №1

$$\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7$$

$$\log_{16}x+\log_4 x+\log_2 x=7,$$

$$\log_{2^4}x+\log_{2^2}x+\log_2 x=7,$$

$$\frac{1}{4}\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\log_2 x=7,$$

$$\frac{7}{4}\log_2 x=7,$$

$\log_2 x=4.$ Т.к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0,\ a\neq 1,$ то

$$\begin{cases} x>0, \\ x=2^4; \end{cases} \quad \begin{cases} x>0, \\ x=16; \end{cases} \quad x=16.$$

Ответ: $16.$

2) Логарифмические уравнения, сводящиеся к простейшим логарифмическим уравнениям.

Пример №2

$\log_{\sqrt{2}}(4-3x)+\log_{\sqrt{2}}(2-x)=0$

Решение:

$\log_{\sqrt{2}}(4-3x)+\log_{\sqrt{2}}(2-x)=0,$

Т.к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0,\ a\neq 1,$ то

$$\begin{cases}4-3x>0,\\ 2-x>0,\\ \log_{\sqrt{2}}(4-3x)+\log_{\sqrt{2}}(2-x)=0;\end{cases}\quad \begin{cases}3x<4,\\ x<2,\\ \log_{\sqrt{2}}(4-3x)(2-x)=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x<1\frac{1}{3},\\ x<2,\\ (4-3x)(2-x)=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x<1\frac{1}{3},\\ 3x^2-10x+7=0;\end{cases}\quad \begin{cases}x<1\frac{1}{3},\\ \left[\begin{array}{l}x=2\frac{1}{3},\\ x=1;\end{array}\right.\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1\frac{1}{3},\\ x=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x<1\frac{1}{3},\\ x=2\frac{1}{3};\end{cases}\end{array}\right.\quad x=1.$$

Ответ: 1.

2) Логарифмические уравнения, сводящиеся к простейшим логарифмическим уравнениям.

Пример №3

$$\log_3(x+2)-\log_3(-5x-1)=1$$

Решение:

$$\log_3(x+2)-\log_3(-5x-1)=1,$$

$$\log_3(x+2)=1+\log_3(-5x-1),$$

$$\log_3(x+2)=\log_3 3+\log_3(-5x-1),$$

$$\log_3(x+2)=\log_3 3(-5x-1).$$

Т.к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0,\ a\neq 1,$ то

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x+2=3(-5x-1); \end{cases} \quad \begin{cases} x>-2, \\ x=-0{,}3125; \end{cases} \quad x=-0{,}3125.$$

Ответ: $-0{,}3125$

2) Логарифмические уравнения, сводящиеся к простейшим логарифмическим уравнениям.

Пример №4

$$\lg(3x-1)\lg(6x-3)=0$$

Решение:

$$\lg(3x-1)\lg(6x-3)=0.$$

Т.к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0, a\neq 1,$ то

$$\begin{cases} 3x-1>0, \\ 6x-3>0, \\ \lg(3x-1)\lg(6x-3)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x>1, \\ 6x>3, \\ \left[\begin{array}{l} \lg(3x-1)=0, \\ \lg(6x-3)=0; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>\frac{1}{3}, \\ x>\frac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} 3x-1=1, \\ 6x-3=1; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x>\frac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3}, \\ x=\frac{2}{3}; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>\frac{1}{2}, \\ x=\frac{2}{3}; \end{cases} \quad x=\frac{2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2}{3}$

3) Логарифмические уравнения, сводящиеся к квадратным уравнениям.

Пример №1

$$2\log_2^2 x - 5\log_2 x - 3 = 0$$

Решение:

$2\log_2^2 x - 5\log_2 x - 3 = 0.$

Пусть $\log_2 x = t$, тогда $2t^2 - 5t - 3 = 0$ и $\left[\begin{array}{l} t = 3, \\ t = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Вернемся к переменной x.

Т.к. $D(\log_a) = (0;\infty), a > 0,\ a \neq 1,$ то

$$\begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 3, \\ \log_2 x = -\dfrac{1}{2}; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 8, \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ x = 8, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 8, \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 8.

3) Логарифмические уравнения, сводящиеся к квадратным уравнениям.

Решение:

Пример №2

$$\lg(10x)\lg(0{,}1x)=\lg x^3-3$$

Т.к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0, a\neq 1,$ то

$$\begin{cases}10x>0,\\0{,}1x>0,\\x^3>0;\end{cases}\quad \begin{cases}x>0,\\x>0,\\x>0;\end{cases}\quad x>0.$$

В найденной области допустимых значений переменной **x** преобразуем уравнение, используя свойства логарифмов.

$$\lg(10x)\lg(0{,}1x)=\lg x^3-3,$$

$$(\lg 10+\lg x)(\lg 0{,}1+\lg x)=\lg x^3-3,$$

$$(1+\lg x)(\lg x-1)=3\lg x-3,$$

$$(1+\lg x)(\lg x-1)=3(\lg x-1),$$

$$(1+\lg x)(\lg x-1)-3(\lg x-1)=0,$$

$$(\lg x-1)(\lg x-2)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\lg x-1=0,\\ \lg x-2=0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\lg x=1,\\ \lg x=2;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=10,\\ x=100.\end{array}\right.$$

С учётом области допустимых значений получим:

$$\begin{cases}x>0,\\ \left[\begin{array}{l}x=10,\\ x=100;\end{array}\right.\end{cases}\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\x=10,\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\x=100;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=10,\\ x=100.\end{array}\right.$$

Ответ: 10; 100

4) Логарифмические уравнения, сводящиеся к рациональным уравнениям.

Пример №1

$$\frac{1}{2\log_3 x-3}+\frac{1}{\log_3 x-1}=2$$

Решение:

$$\frac{1}{2\log_3 x-3}+\frac{1}{\log_3 x-1}=2.$$

Пусть $\log_3 x = t$, тогда

$$\frac{1}{2t-3}+\frac{1}{t-1}=2,$$

$$\frac{4t^2-13t+10}{(2t-3)(t-1)}=0,$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} t=1{,}25, \\ t=2, \end{array}\right. \\ t\neq 1{,}5;\ t\neq 1;\end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} t=1{,}25, \\ t=2. \end{array}\right.$$

Вернёмся к переменной x

Т.к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0,\ a\neq 1,$ то

$$\begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1{,}25, \\ \log_3 x = 2; \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} x>0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 3^{1{,}25}, \\ x = 3^2; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ x=\sqrt[4]{243}, \end{cases} \\ \begin{cases} x>0, \\ x=9; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=\sqrt[4]{243}, \\ x=9. \end{array}\right.$$

Ответ: $\sqrt[4]{243};\ 9.$

4) Логарифмические уравнения, сводящиеся к рациональным уравнениям.

Пример №2

$$2\log_x 27 - \log_{27} x = 1$$

Решение:

$$2\log_x 27 - \log_{27} x = 1.$$

Т.к. $D(\log_a) = (0;\infty)$, $a > 0$, $a \neq 1$, то $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$

В найденной области допустимых значений переменной **x** преобразуем данное уравнение и получим:

$$\frac{2}{\log_{27} x} - \log_{27} x = 1.$$

Пусть $\log_{27} x = t$, тогда

$$\frac{2}{t} - t = 1,$$

$$t^2 + t - 2 = 0, \quad \left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = 1. \end{array}\right.$$

Вернёмся к переменной **x**:

$$\begin{cases} x > 0, x \neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} \log_{27} x = -2, \\ \log_{27} x = 1; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, x \neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 27^{-2}, \\ x = 27; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, x \neq 1, \\ x = 27^{-2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0,\ x \neq 1, \\ x = 27; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 27^{-2}, \\ x = 27. \end{array}\right.$$

Ответ: $27^{-2}; 27.$

5) Логарифмические уравнения с переменной в основании и под знаком логарифма.

Пример №1

$$\left[\log_2\left(x^2-7x+13\right)\right]\log_{x-2}2=1$$

Решение:

$$\left[\log_2\left(x^2-7x+13\right)\right]\log_{x-2}2=1.$$

Т.к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0,\ a\neq 1,$ то

$$\begin{cases} x^2-7x+13>0,\\ x-2>0,\\ x-2\neq 1;\end{cases} \qquad \begin{cases} x\in R,\\ x>2,\\ x\neq 3;\end{cases} \qquad \begin{cases} x>2,\\ x\neq 3.\end{cases}$$

В найденной области допустимых значений переменной x преобразуем уравнение и получим:

$$\left[\log_{x-2}2\right]\log_2\left(x^2-7x+13\right)=1,$$

$$\log_{x-2}(x^2-7x+13)=1,$$

$$x^2-7x+13=x-2,$$

$$x^2-8x+15=0, \qquad \left[\begin{array}{l} x=3,\\ x=5.\end{array}\right.$$

С учётом области допустимых значений переменной x получим:

$$\begin{cases} x>2,\\ x\neq 3,\\ \left[\begin{array}{l} x=3,\\ x=5;\end{array}\right.\end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2,\\ x\neq 3,\\ x=3,\end{cases}\\ \begin{cases} x>2,\\ x\neq 3,\\ x=5;\end{cases}\end{array}\right. \qquad x=5.$$

Ответ: 5.

5) Логарифмические уравнения с переменной в основании и под знаком логарифма.

Решение:

Пример №2

$$\left[\log_5(x^2-8x+16)\right]\log_{3x-8}(7-x)=0$$

Т.к. $D(\log_a)=(0;\infty), a>0,\ a\neq 1,$ то

$$\begin{cases} x^2-8x+16>0,\\ 7-x>0,\\ 3x-8>0,\\ 3x-8\neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-4)^2>0,\\ x<7,\\ x>2\dfrac{2}{3},\\ x\neq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2\dfrac{2}{3}<x<7,\\ x\neq 3,\\ x\neq 4. \end{cases}$$

В найденной области допустимых значений переменной **x** уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \log_5(x^2-8x+16)=0,\\ \log_{3x-8}(7-x)=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} (x-4)^2=1,\\ 7-x=1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x-4=-1,\\ x-4=1,\\ 7-x=1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=3,\\ x=5,\\ x=6. \end{array}\right.$$

С учётом области допустимых значений переменной **x** получим:

$$\begin{cases} 2\dfrac{2}{3}<x<7,\\ x\neq 3,\\ x\neq 4,\\ \left[\begin{array}{l} x=3,\\ x=5,\\ x=6; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x=5,\\ x=6. \end{array}\right.$$

Ответ: 5;6.

Логарифмические уравнения

их типы и методы решения