



*Российский государственный университет
нефти и газа
им. И.М. Губкина*

Кафедра «Информатики»

Лекция

Численное интегрирование

Постановка задачи:

ВЫЧИСЛИТЬ ИНТЕГРАЛ ВИДА

$$I = \int_a^b f(x) dx,$$

где **a** и **b** – пределы интегрирования;

f(x) – непрерывная функция на отрезке [**a**,**b**]

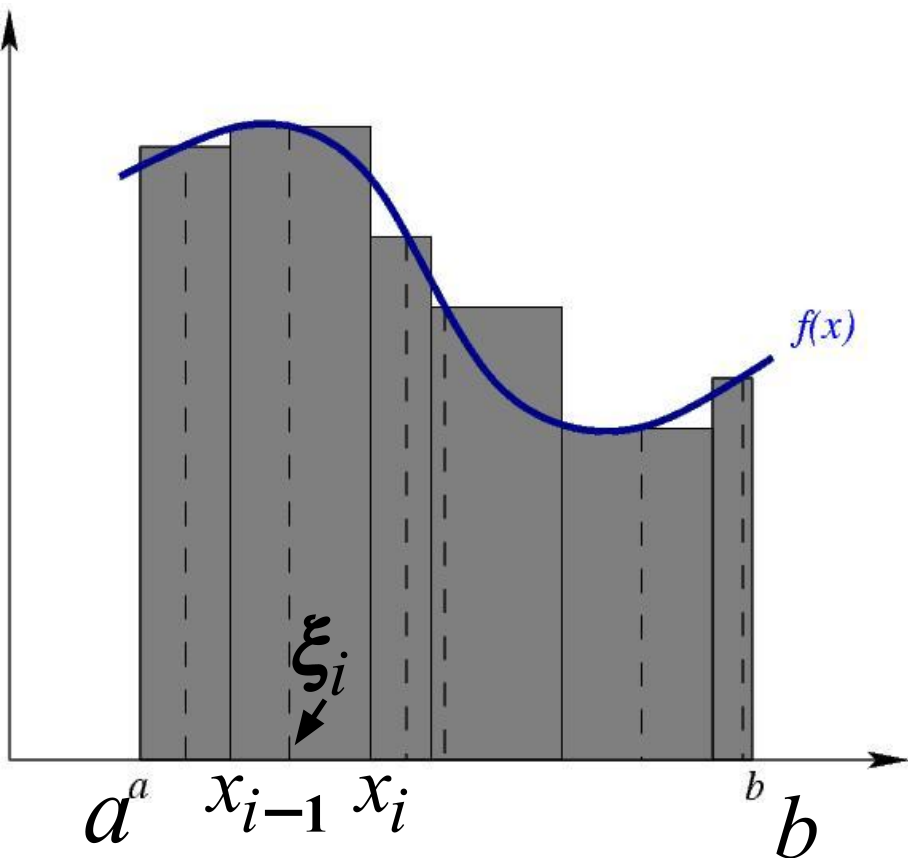
Определенный интеграл Римана

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} = b$$

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

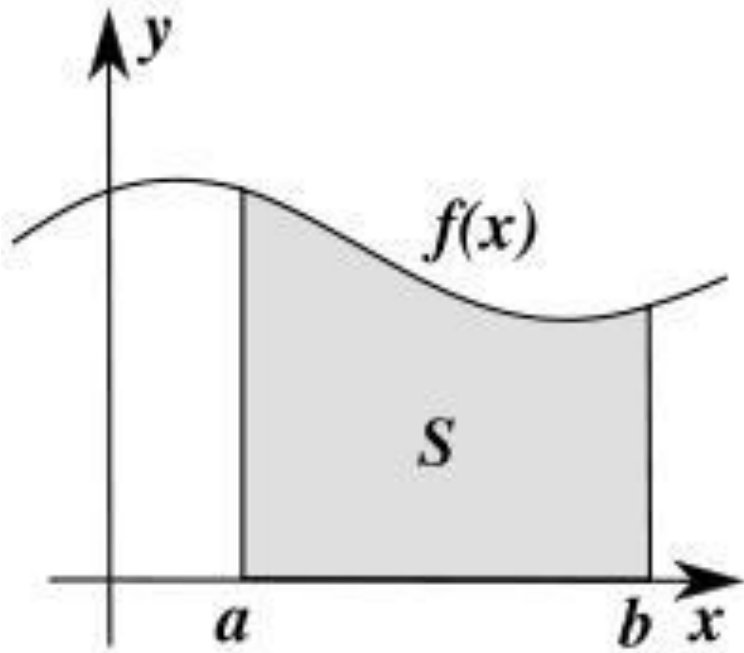
Интегральная сумма:

$$S_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} S_i$$

Вычисление определенных интегралов



$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Значение определенного интеграла можно трактовать как площадь криволинейной трапеции

методы численного интегрирования применяют

Если:

- 1) вид функции $f(x)$ не допускает непосредственного интегрирования;
- 2) значения функции $f(x)$ заданы в виде таблицы

Основная идея - замена подынтегральной функции на более простую, интеграл от которой легко вычисляется аналитически.

Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

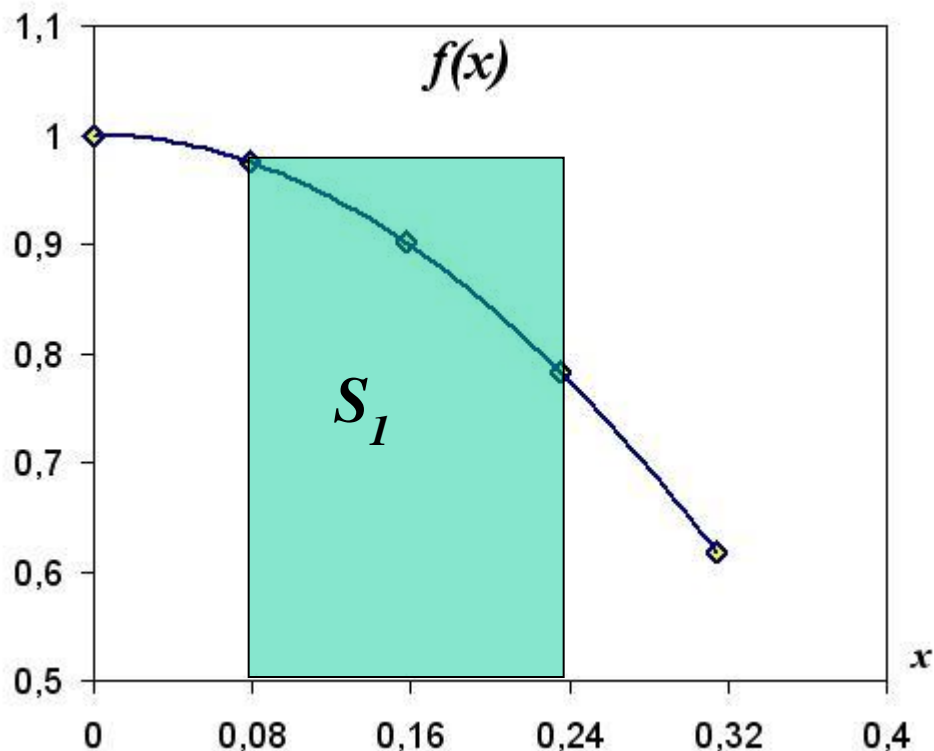
Замена $f(x)$ – на полином различных степеней.

□ $f(x)=const$ - метод прямоугольников,

□ $f(x)=kx+b$ - метод трапеций,

□ $f(x)=ax^2+bx+c$ - метод Симпсона.

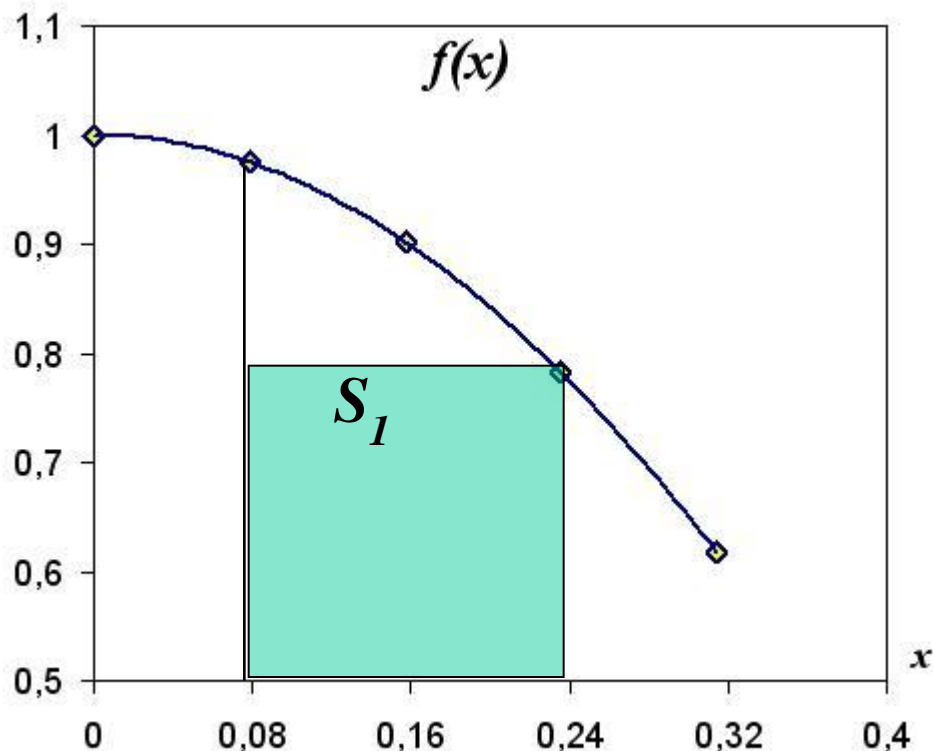
Формула левых прямоугольников



$$S_1 = (0.24 - 0.08) \cdot f(0.08) = \\ = 0.16 * 0.98 = 0.1568$$

$$S_1 = (x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1})$$

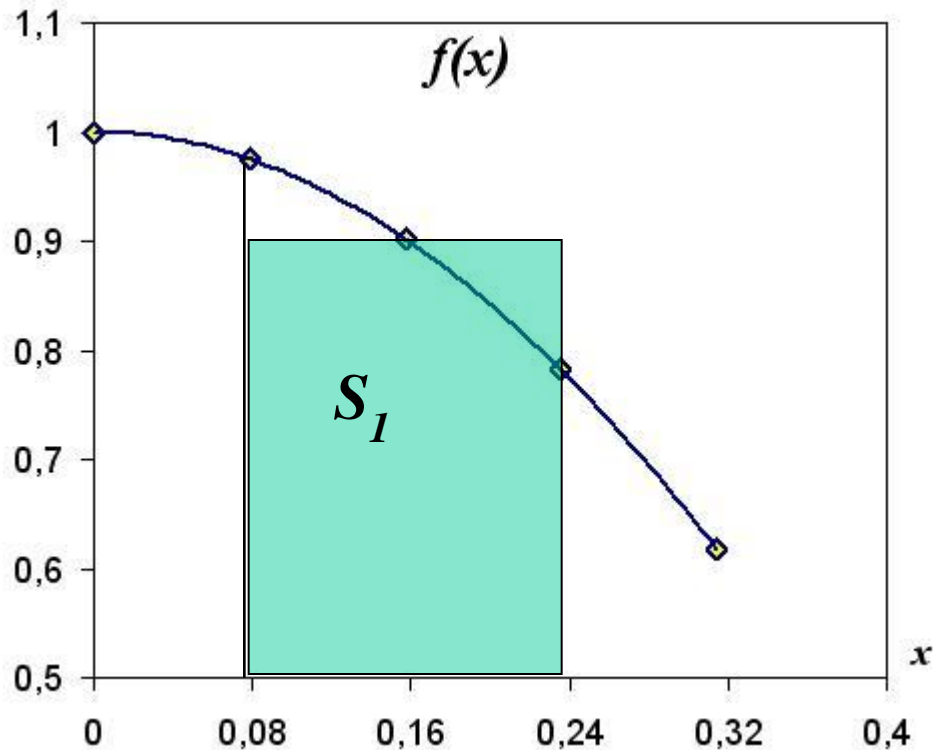
Формула правых прямоугольников



$$S_1 = (0,24 - 0,08) \cdot f(0,24) = \\ = 0,16 \cdot 0,78 = 0,1248$$

$$S_1 = (x_i - x_{i-1}) f(x_i)$$

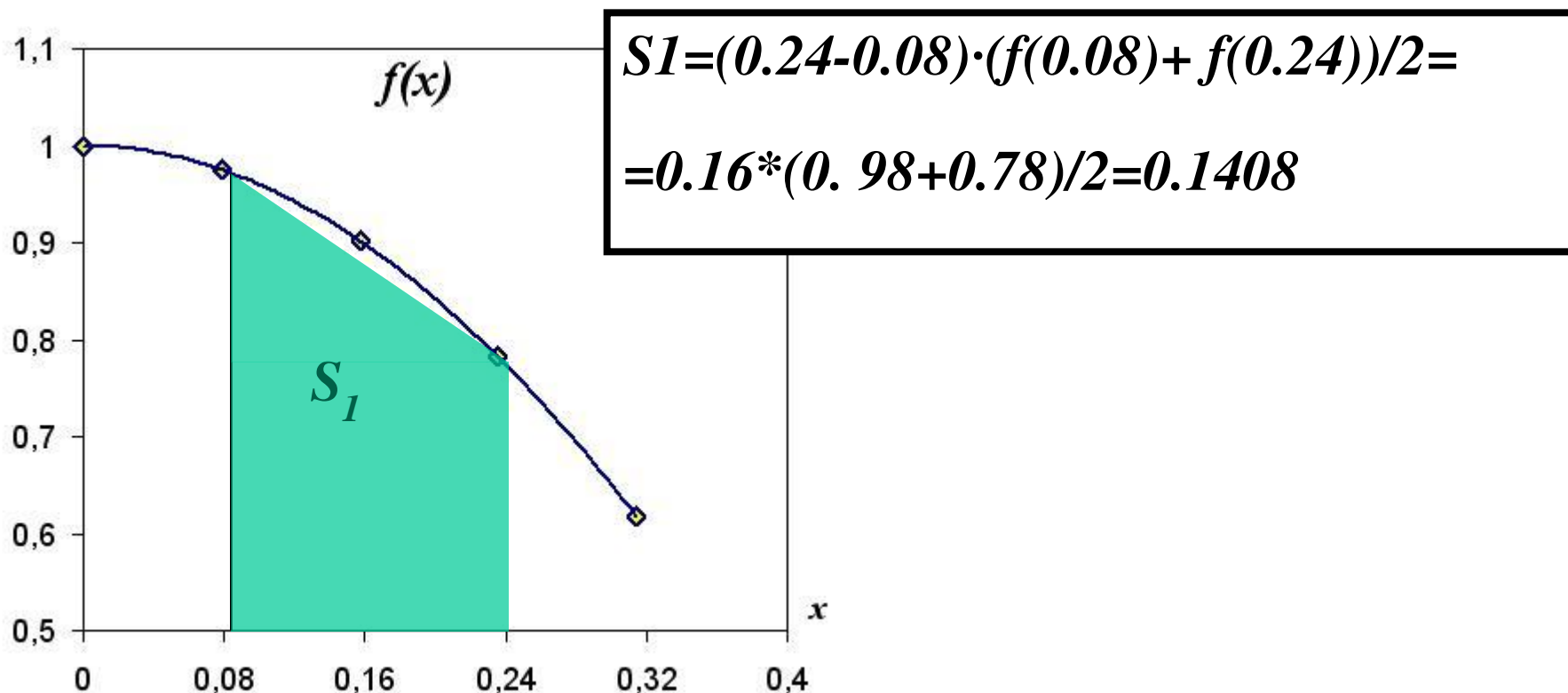
Формула средних прямоугольников



$$S_1 = (0.24 - 0.08) \cdot f(0.16) = \\ = 0.16 * 0.9 = 0.144$$

$$S_1 = (x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

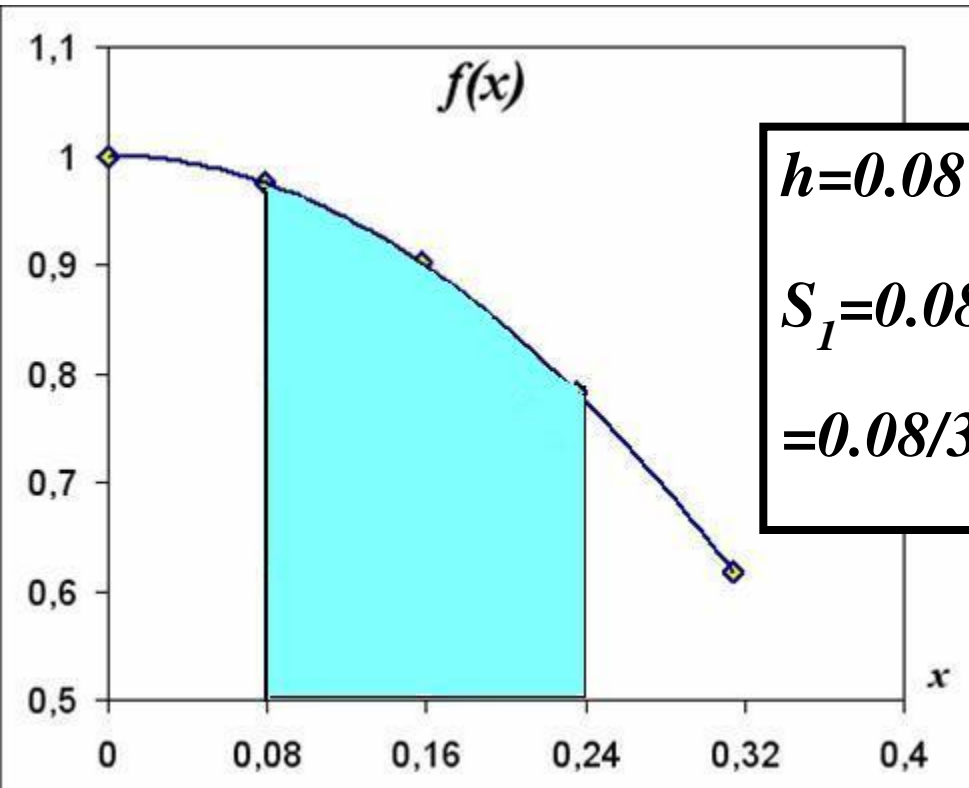
Формула трапеции



$$S_1 = (x_i - x_{i-1}) \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

Формула Симпсона

(трехточечная схема)



$$h=0.08$$

$$S_1 = 0.08/3 * (f(0.08) + 4f(0.16) + f(0.24)) = \\ = 0.08/3 * (0.98 + 4*0.9 + 0.78) = 0.1429$$

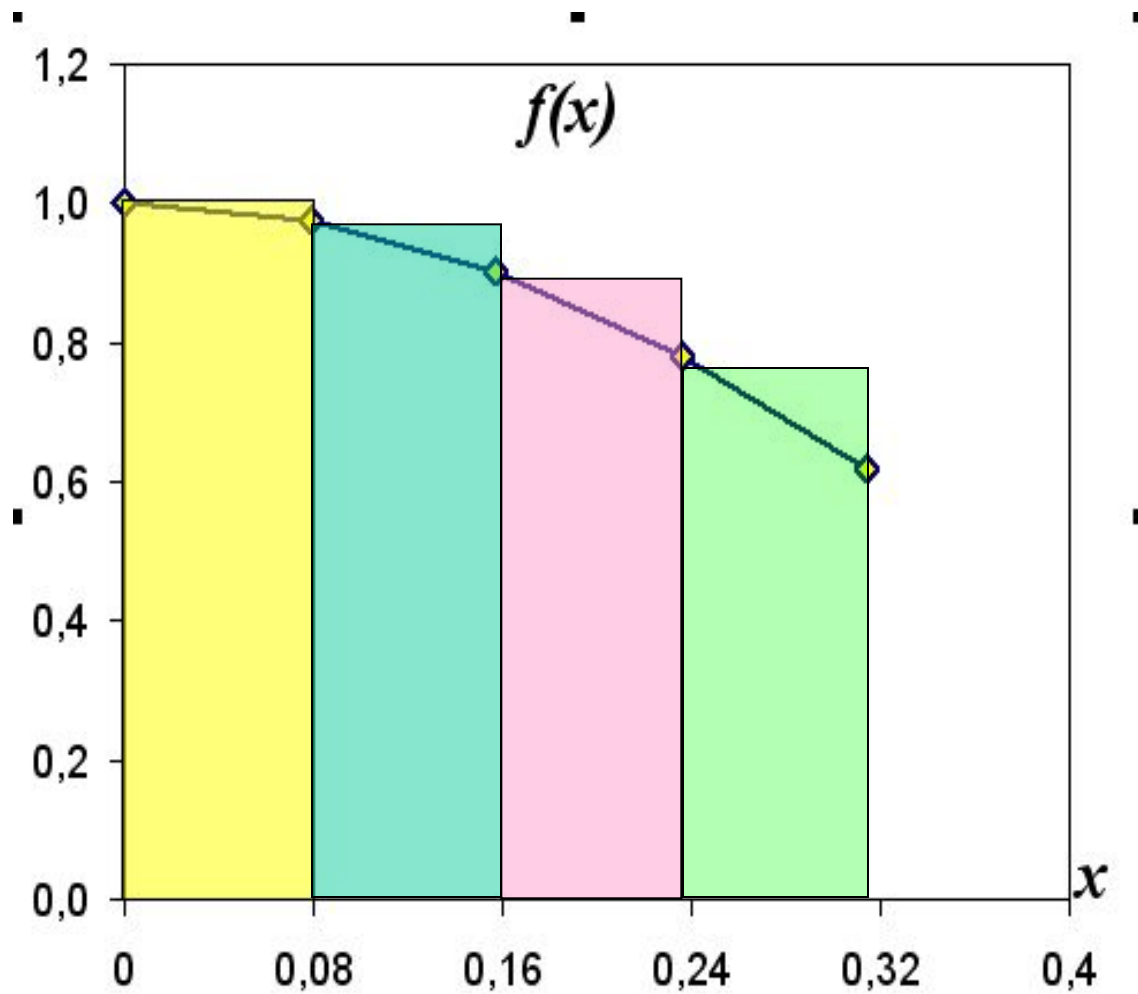
$$h = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$$

$$S_1 = \frac{h}{3} (f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

Сравнение методов

<i>метод</i>	<i>N узлов</i>	<i>результат</i>
левых прям.	1	<i>0.1568</i>
правых прям.	1	<i>0.1248</i>
средних прям.	1	<i>0.144</i>
трапеций	2	<i>0.1408</i>
Симпсона	3	<i>0.1429</i>

Формула левых прямоугольников

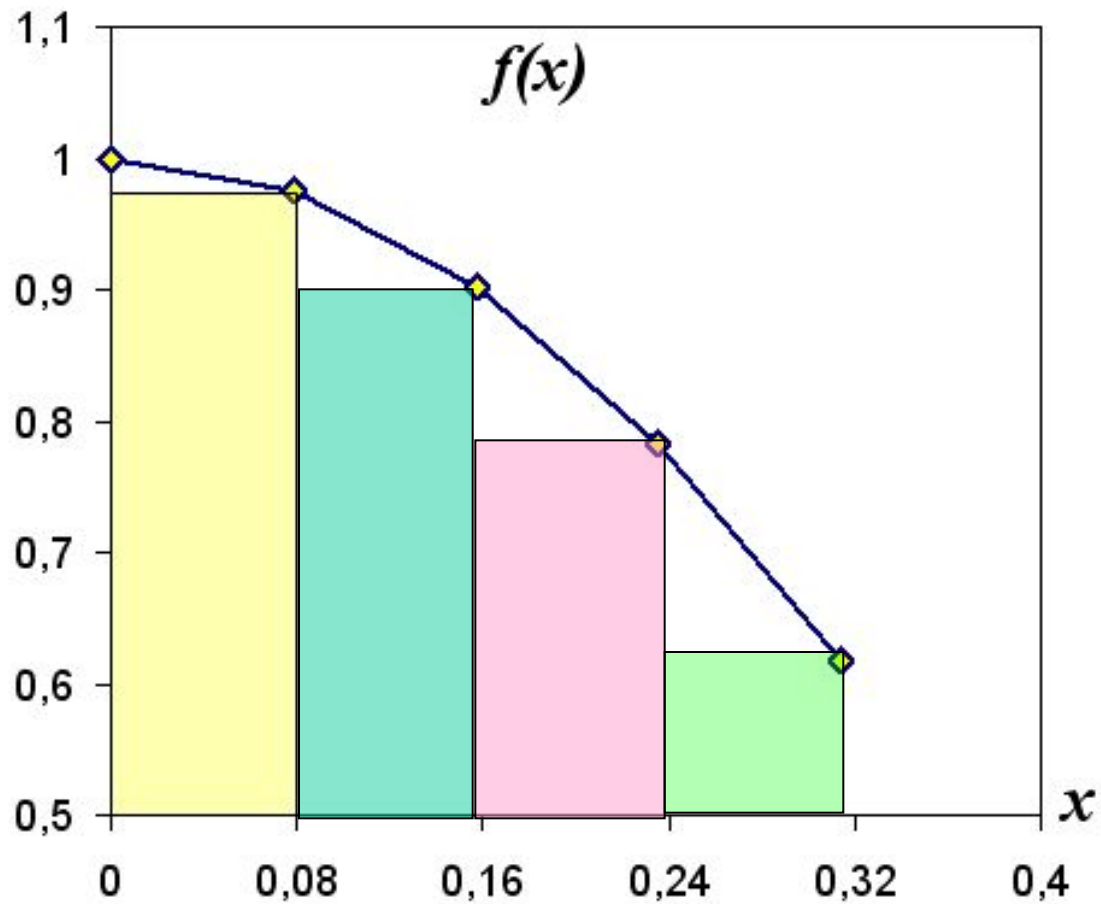


Метод левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

n – количество отрезков

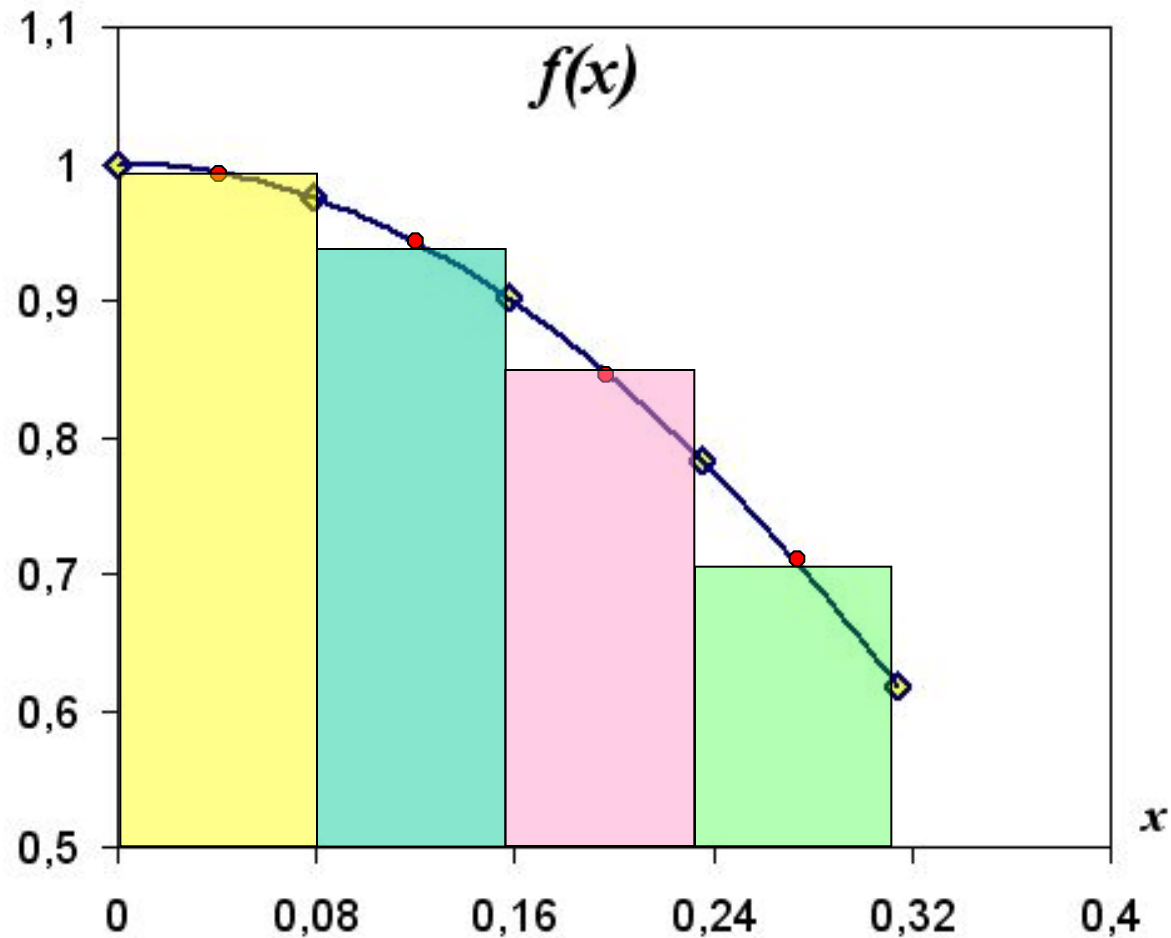
Формула правых прямоугольников



Метод правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

Формула средних прямоугольников

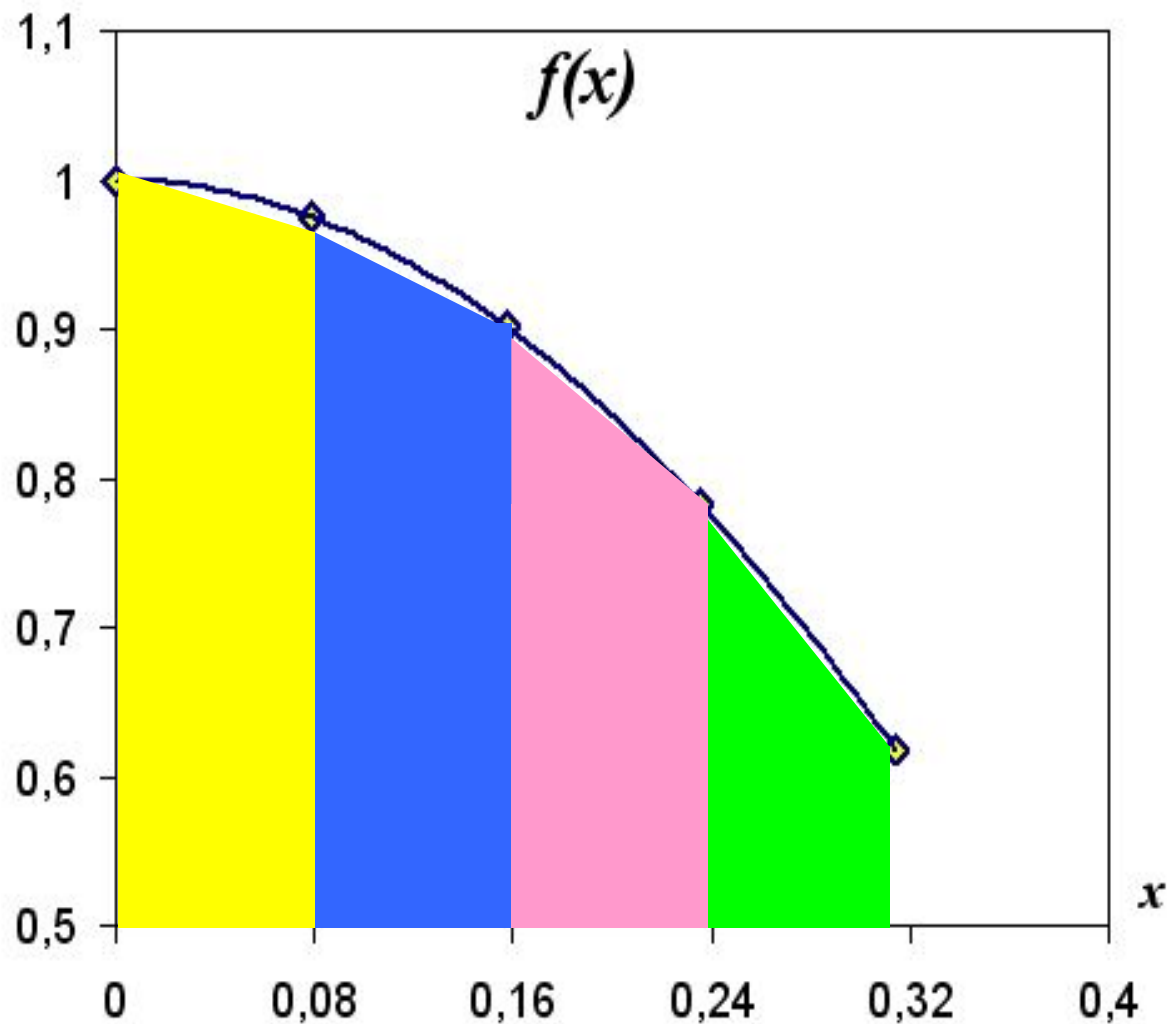


Метод средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

n – количество отрезков

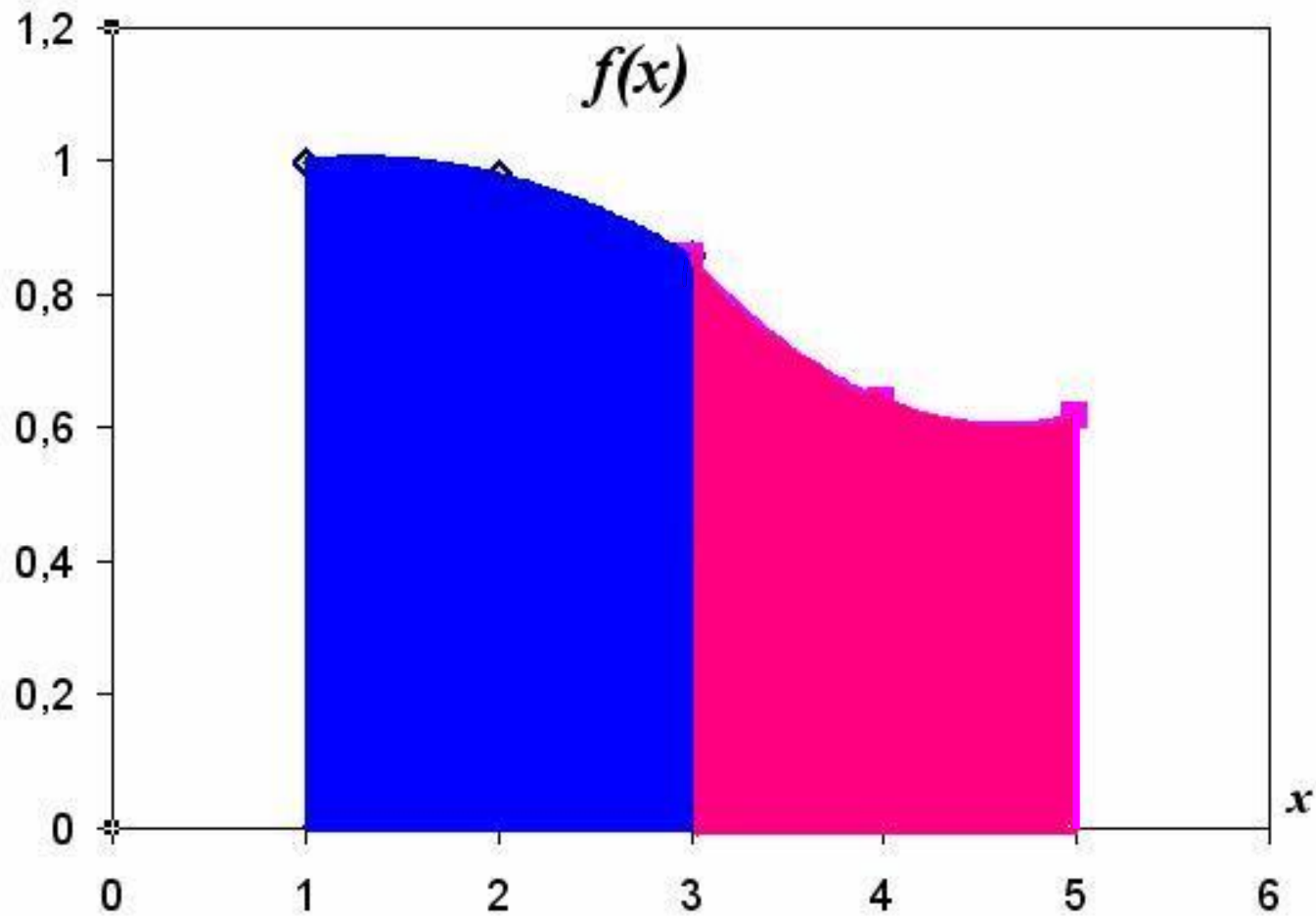
Формула трапеций



Метод трапеций

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right)$$

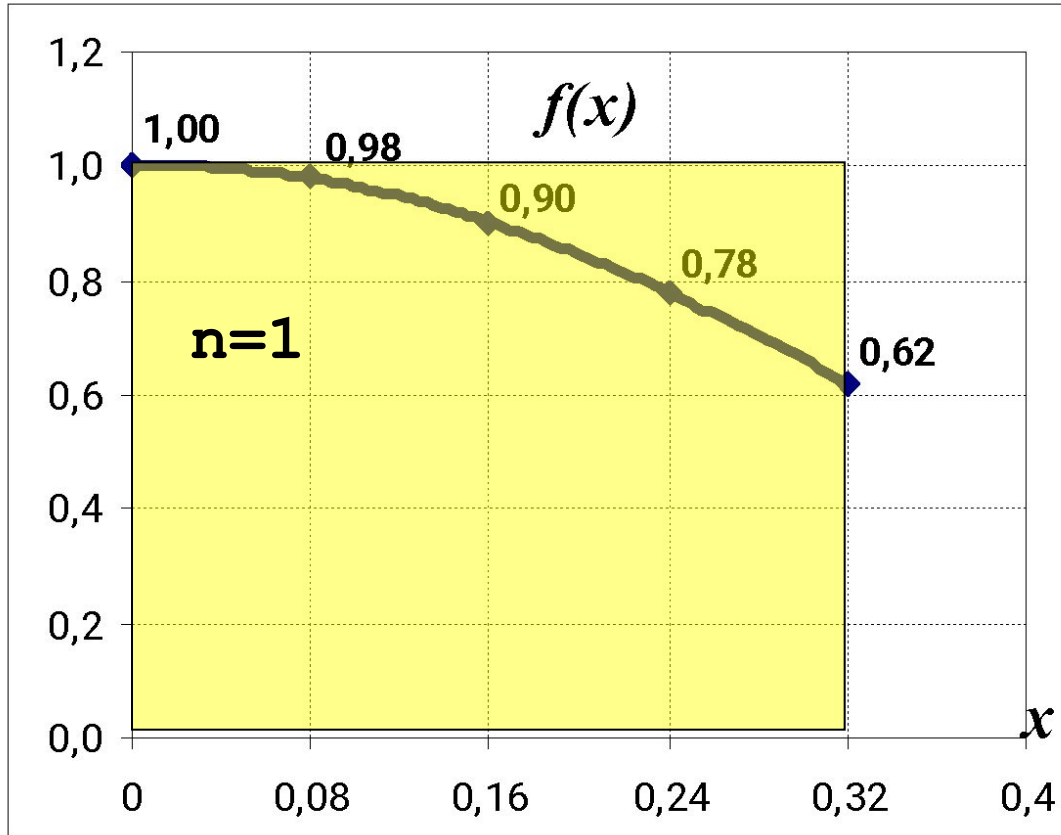
Формула Симпсона



Метод Симпсона

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + f_n + 2(f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{n-2}) + 4(f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{n-1}))$$

Оценка точности интегрирования



точное значение

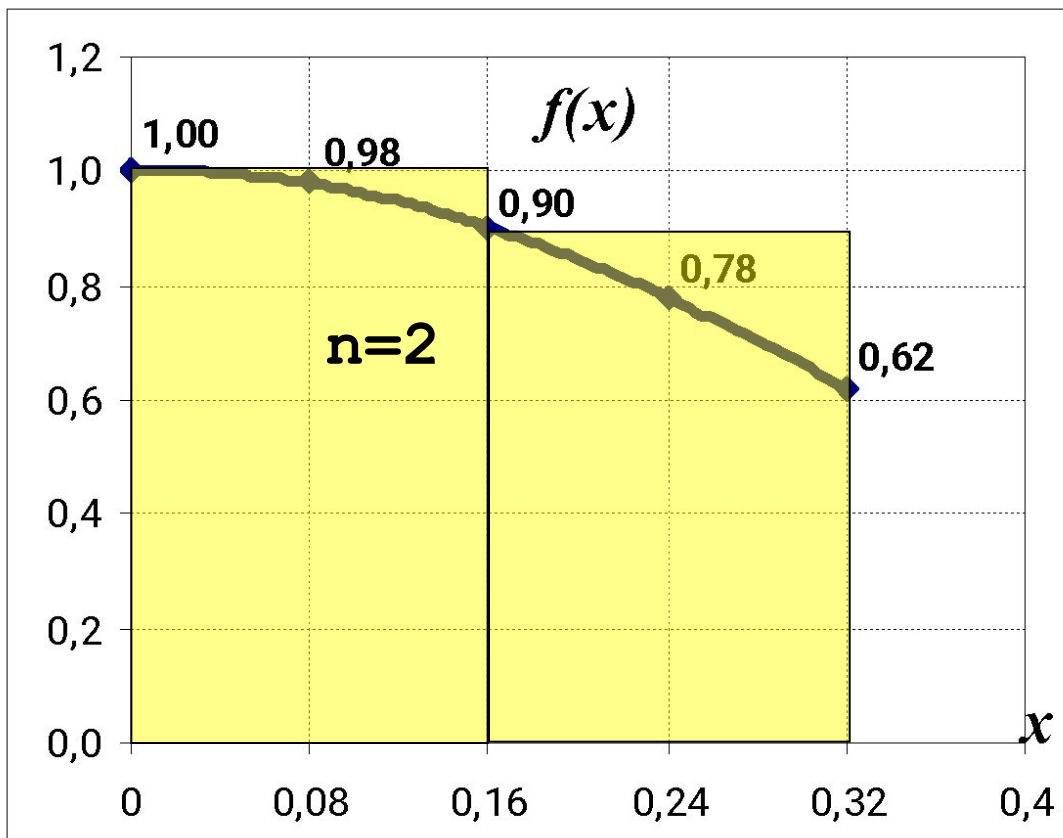
$$0,32 \int_0 f(x) dx = 0,278967$$

количество интервалов

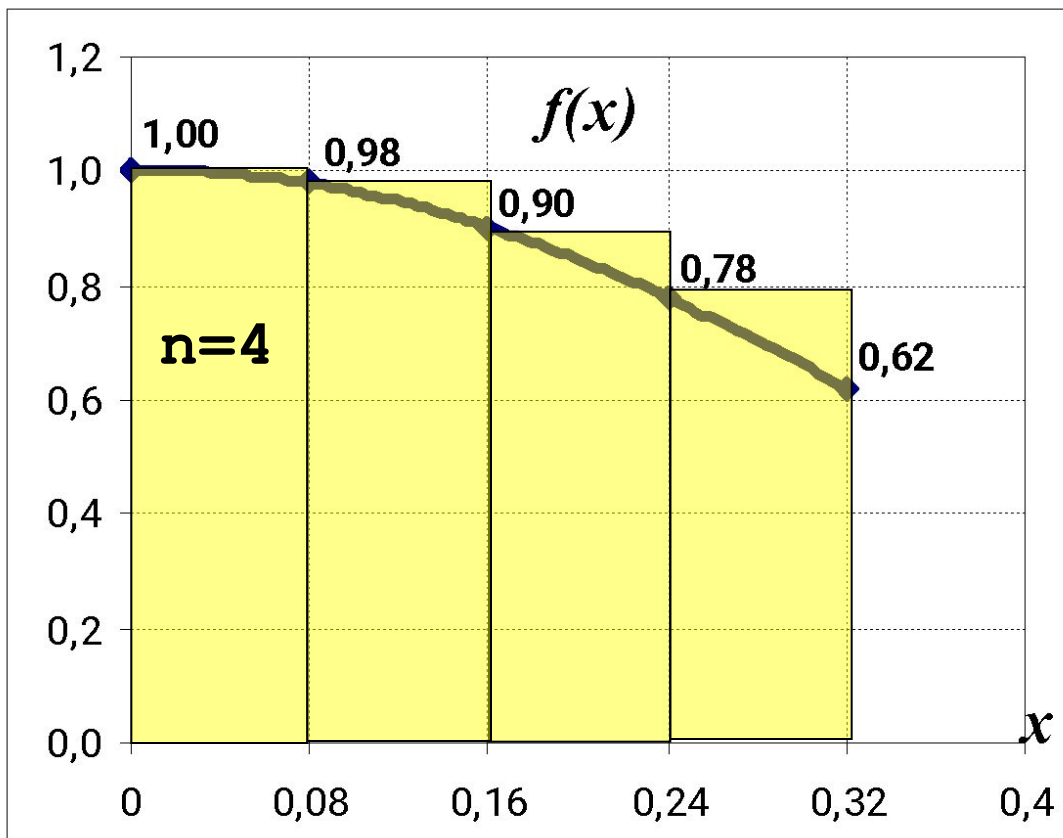
Значение интеграла при данном разбиении

$$\varepsilon = \left| \frac{I_{\text{точн}} - I_n}{I_{\text{точн}}} \right| \quad \varepsilon_{\text{точн}} = \left| \frac{I - I}{I} \right|$$

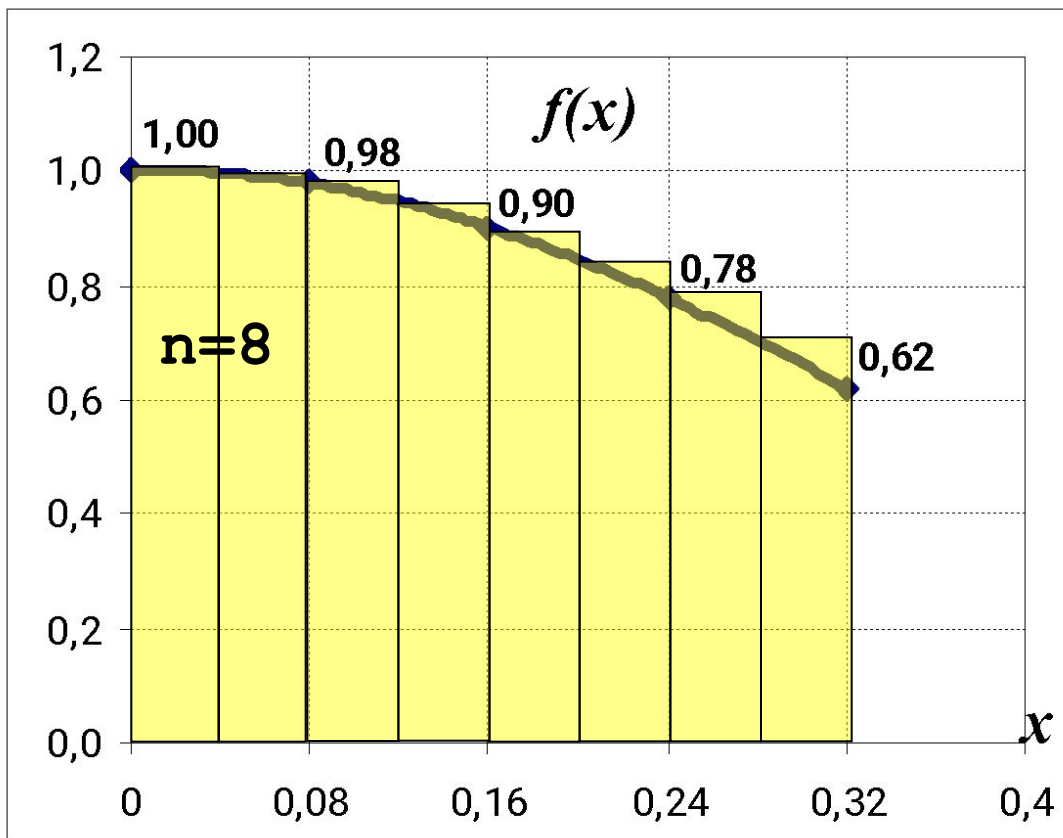
увеличение точности интегрирования



увеличение точности интегрирования



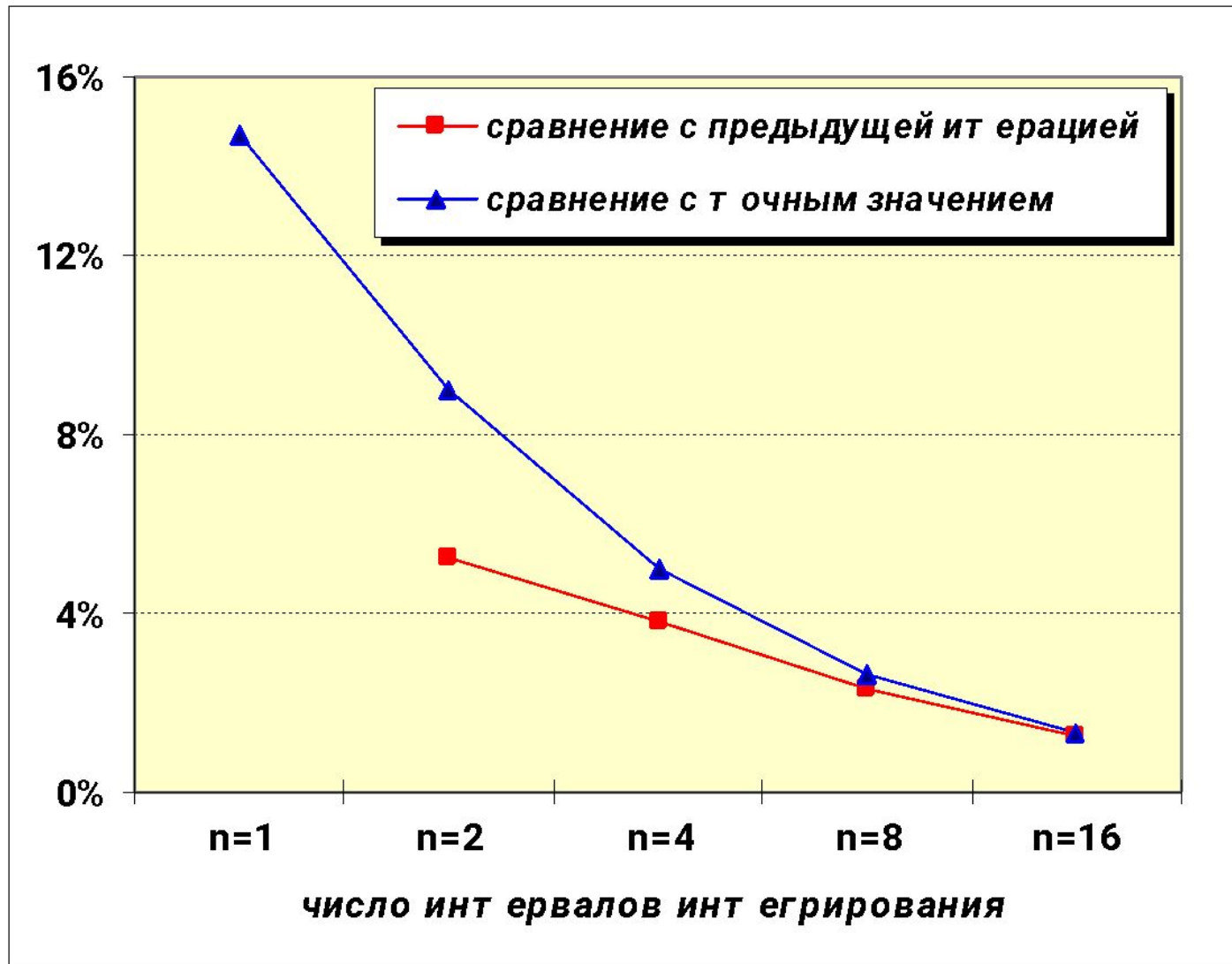
увеличение точности интегрирования



Погрешность интегрирования

	КОЛИЧЕСТВО ИНТЕРВАЛОВ РАЗБИЕНИЯ				
	n=1	n=2	n=4	n=8	n=16
Значение I_n	0,320	0,304	0,293	0,286	0,283
ε		0,0526	0,038	0,023	0,013
$\varepsilon_{\text{точн}}$	0,147	0,090	0,050	0,026	0,013

Погрешность интегрирования



Символьное интегрирование в среде Matlab

`syms x`

`f=sym('x/(4+x^2)')`

`s=int(f,x)` – функция вычисляющая значение интеграла,
где

s – символьное значение интеграла

f –подынтегральная функция.

Численное интегрирование в среде Matlab

`a=0;`

`b=1;`

`s=int('x/(4+x^2)',a,b)`

где

`s` – численное значение интеграла

`a`, `b` – пределы интегрирования

Численное интегрирование в среде Matlab

Метод трапеций:

$s = \text{trapz}(x, y)$

– функция вычисляющая значение интеграла методом трапеций, где

s – численное значение интеграла

x – вектор значений аргумента

y – вектор значений подынтегральной функции.

Численное интегрирование в среде Matlab

Метод Симпсона:

$[Q, FCNT]=quad(FUN, A, B, TOL)$

Q – значение интеграла по методу Симпсона;

FCNT – Количество узлов при заданной точности;

FUN – подынтегральная функция;

A, B – пределы интегрирования;

TOL – точность вычислений, если не указывать, то принимается равной 10^{-6}