Российский государственный университет
нефти и газа
им. И.М. Губкина

Кафедра «Информатики»

Лекция

Численное интегрирование

Постановка задачи:

вычислить интеграл вида

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

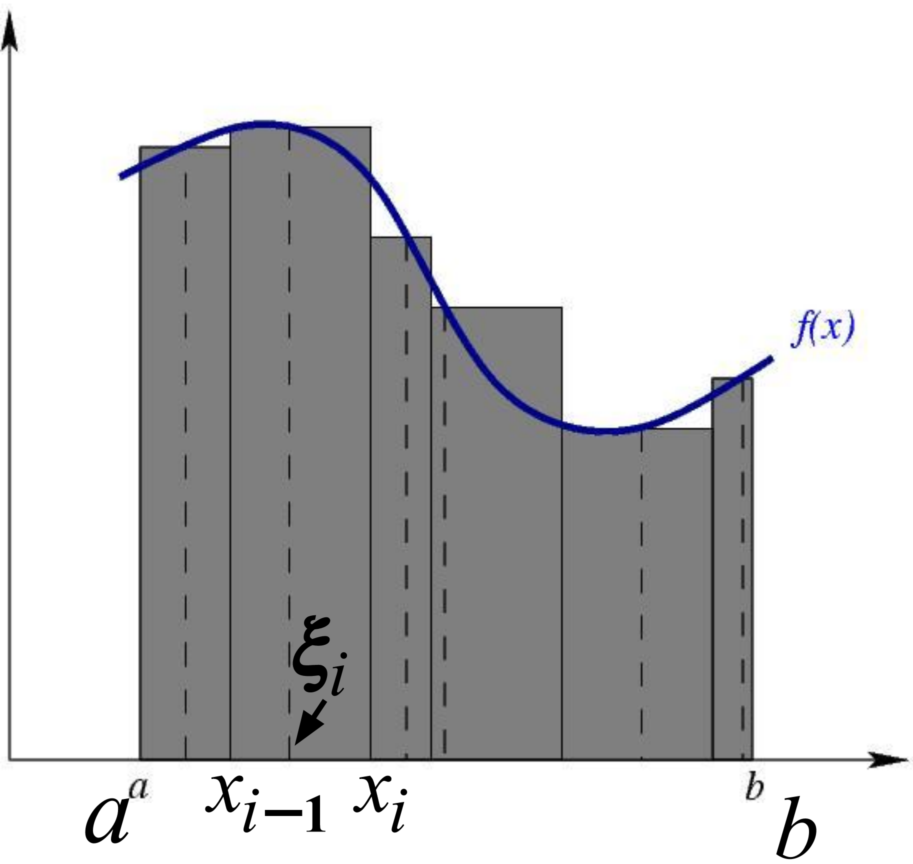
где **a** и **b** – пределы интегрирования;

f(x) – непрерывная функция на отрезке [**a**,**b**]

Определенный интеграл Римана

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} = b$$

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

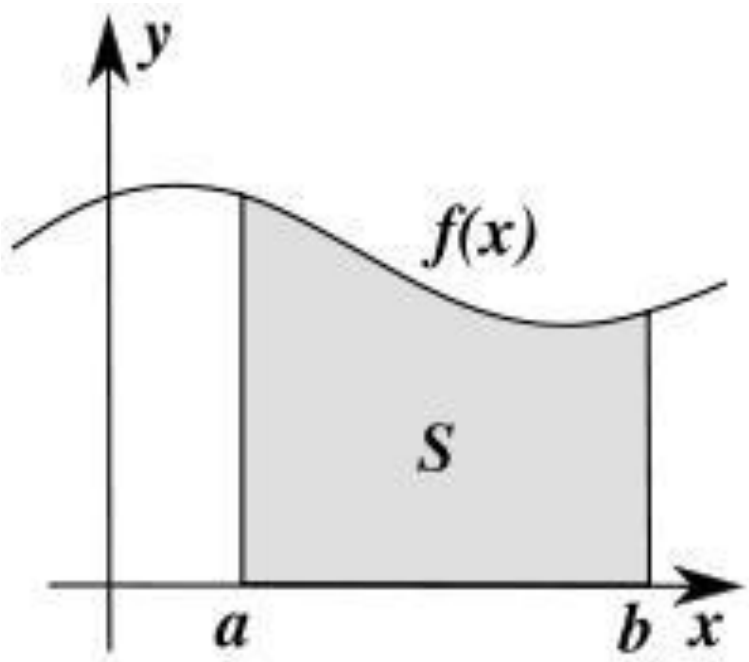


Интегральная сумма:

$$s_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} s_i$$

Вычисление определенных интегралов



$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Значение определенного интеграла можно трактовать как площадь криволинейной трапеции

методы численного интегрирования применяют

Если:

1) вид функции $f(x)$ не допускает непосредственного интегрирования;

2) значения функции $f(x)$ заданы в виде таблицы

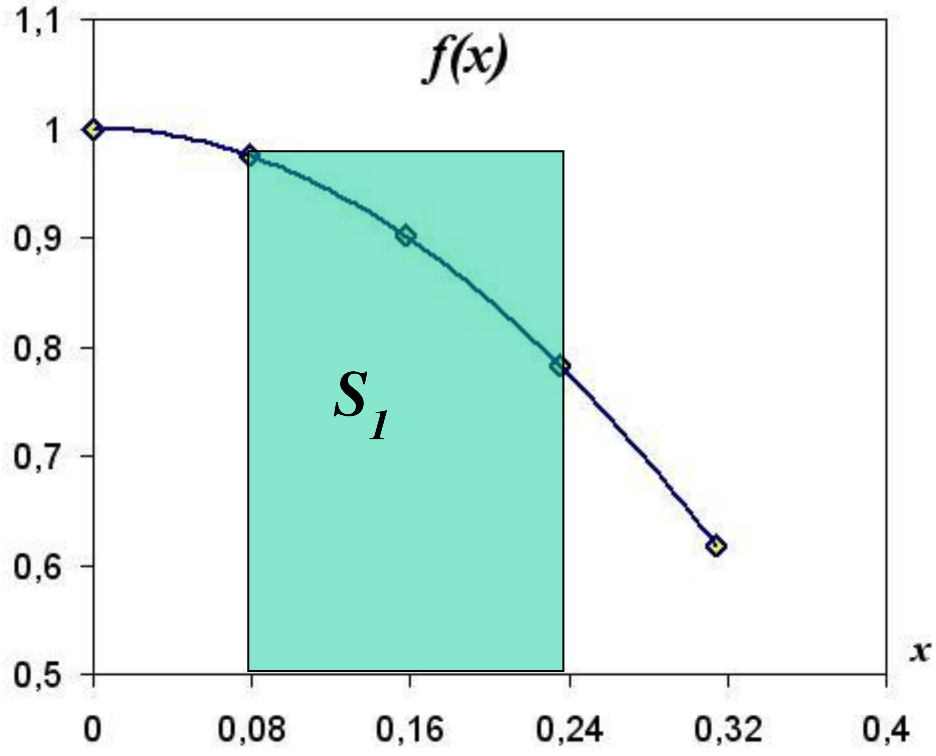
Основная идея - замена подынтегральной функции на более простую, интеграл от которой легко вычисляется аналитически.

Квадратурные формулы Ньютона-Котеса

Замена ***f(x)*** – на полином различных степеней.

- ***f(x)=const*** - метод прямоугольников,
- ***f(x)=kx+b*** - метод трапеций,
- ***f(x)=ax²+bx+c*** - метод Симпсона.

Формула левых прямоугольников

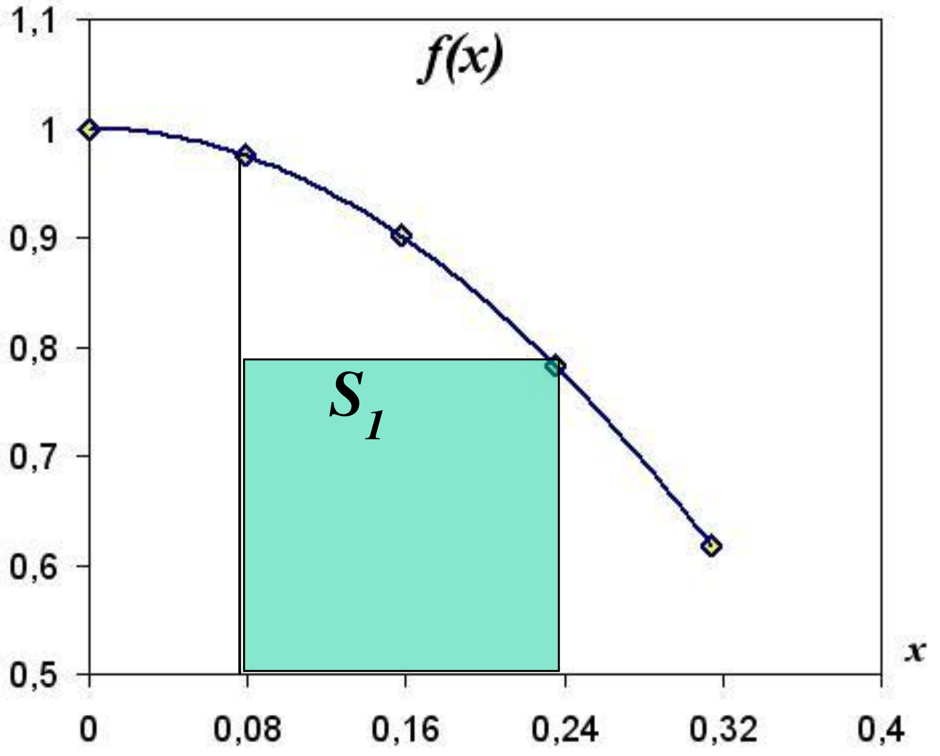


S1=(0.24-0.08)·f(0.08)=

=0.16*0.98=0.1568

$$S_{\mathbf{1}}=\left(x_i-x_{i-1}\right)f\left(x_{i-1}\right)$$

Формула правых прямоугольников

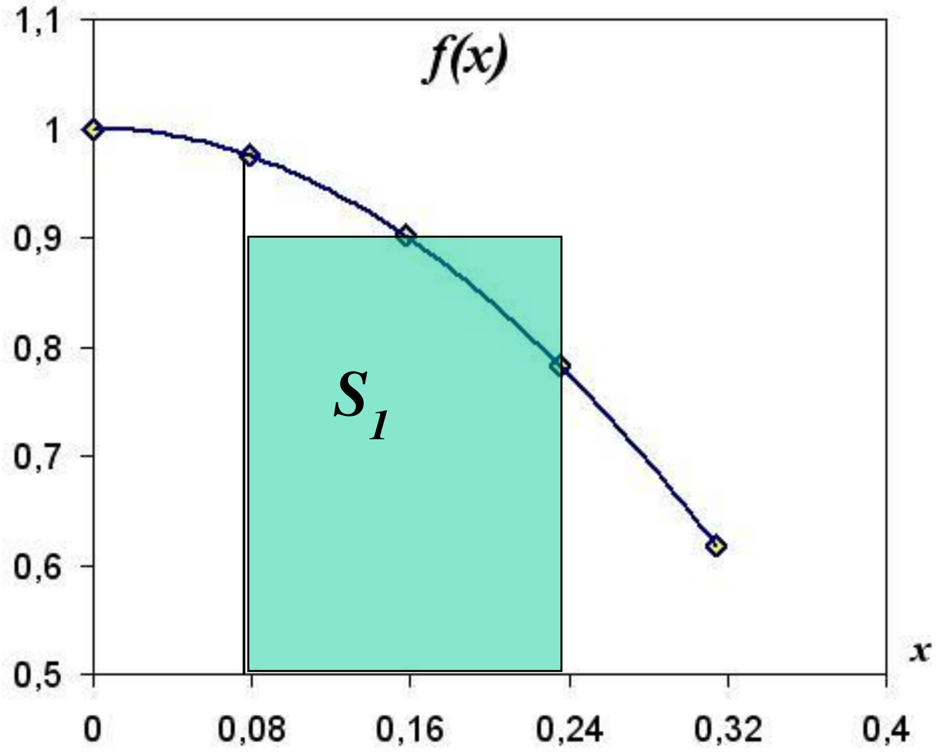


$S1=(0.24-0.08)\cdot f(0.24)=$

$=0.16*0.78=0.1248$

$$S_{\mathbf{1}}=\left(x_i-x_{i-\mathbf{1}}\right)f\left(x_i\right)$$

Формула средних прямоугольников

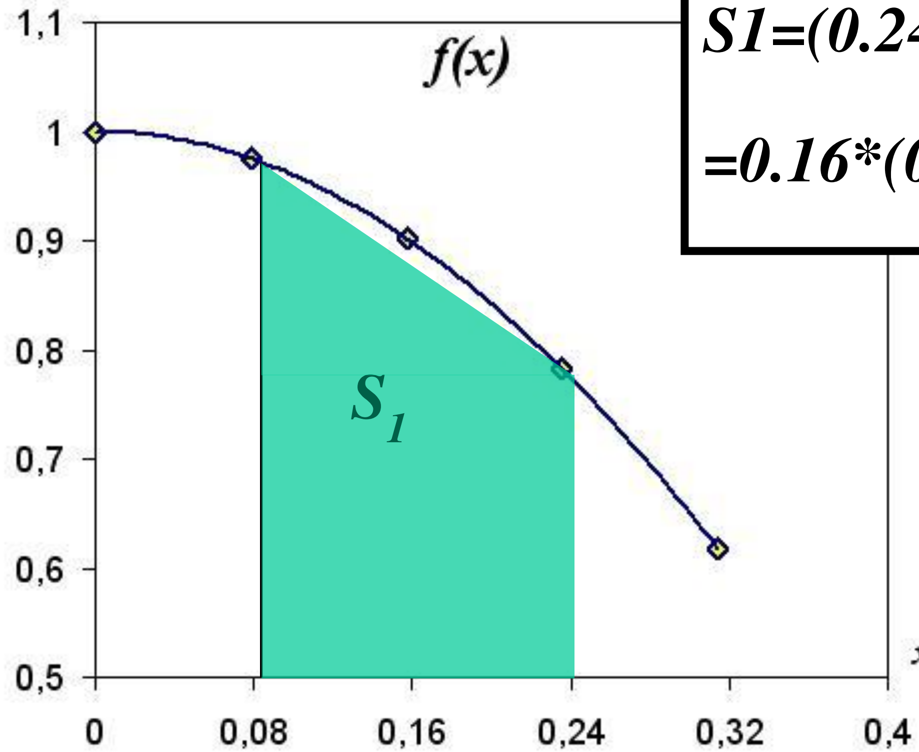


S1=(0.24-0.08)·f(0.16)=

*=0.16*0. 9=0.144*

$$S_1 = (x_i - x_{i-1}) f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)$$

Формула трапеции

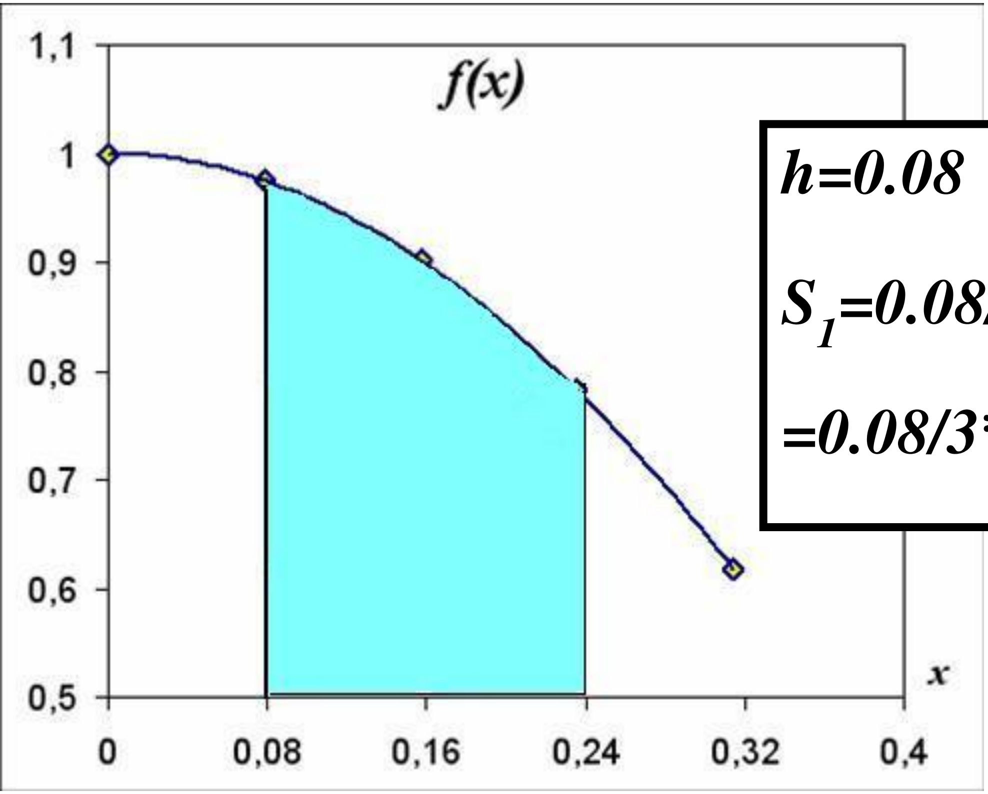


S1=(0.24-0.08)·(f(0.08)+ f(0.24))/2=

=0.16*(0. 98+0.78)/2=0.1408

$$S_1 = \left(x_i - x_{i-1}\right)\frac{f\left(x_{i-1}\right)+f\left(x_i\right)}{2}$$

Формула Симпсона



(трехточечная схема)

h=0.08

*S_1=0.08/3*f(0.08)+4f(0.16)+ f(0.24))=*

=0.08/3(0. 98+ 4*0.9+ 0.78)=0.1429*

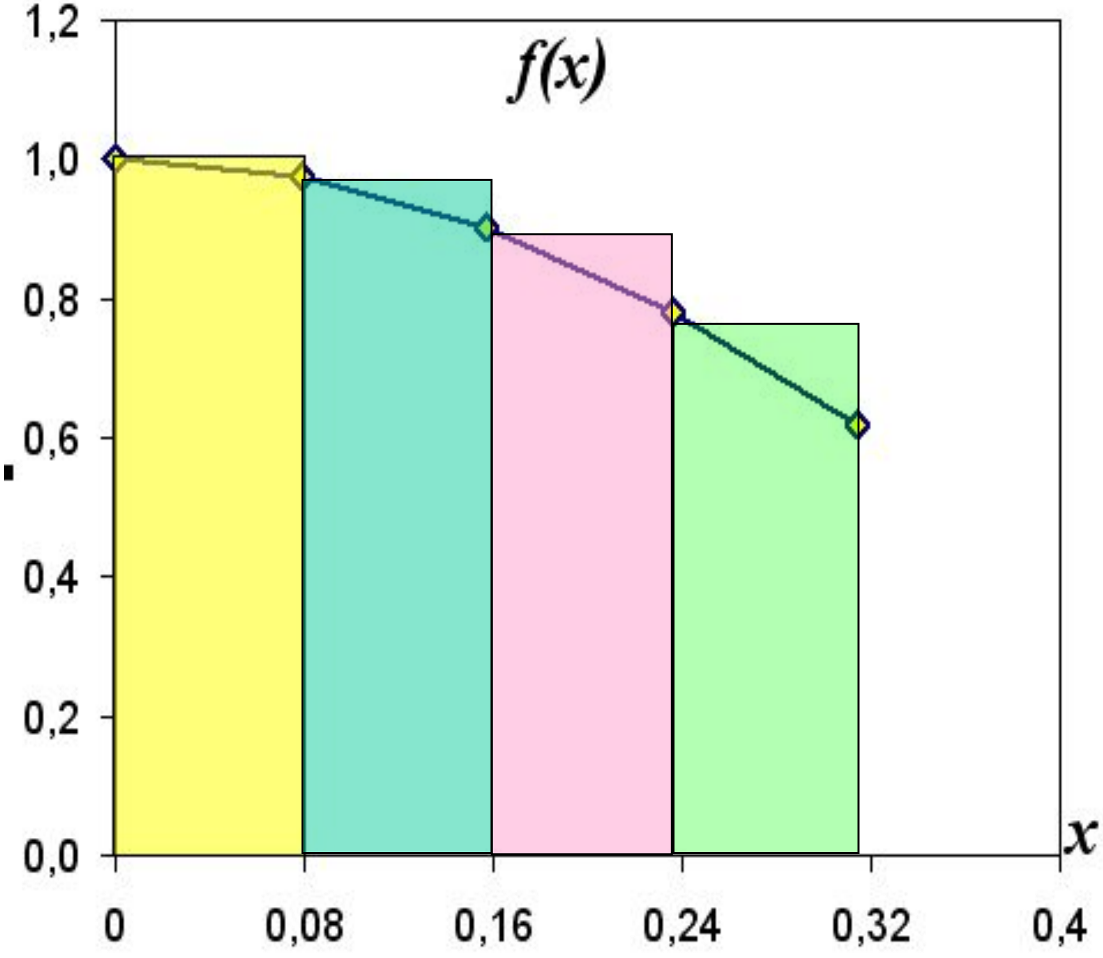
$$h = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i$$

$$S_1 = \frac{h}{3}\left(f\left(x_{i-1}\right) + 4f\left(x_i\right) + f\left(x_{i+1}\right)\right)$$

Сравнение методов

метод	*N узлов*	*результат*
левых прям.	**1**	***0.1568***
правых прям.	**1**	***0.1248***
средних прям.	**1**	***0.144***
трапеций	**2**	***0.1408***
Симпсона	**3**	***0.1429***

Формула левых прямоугольников

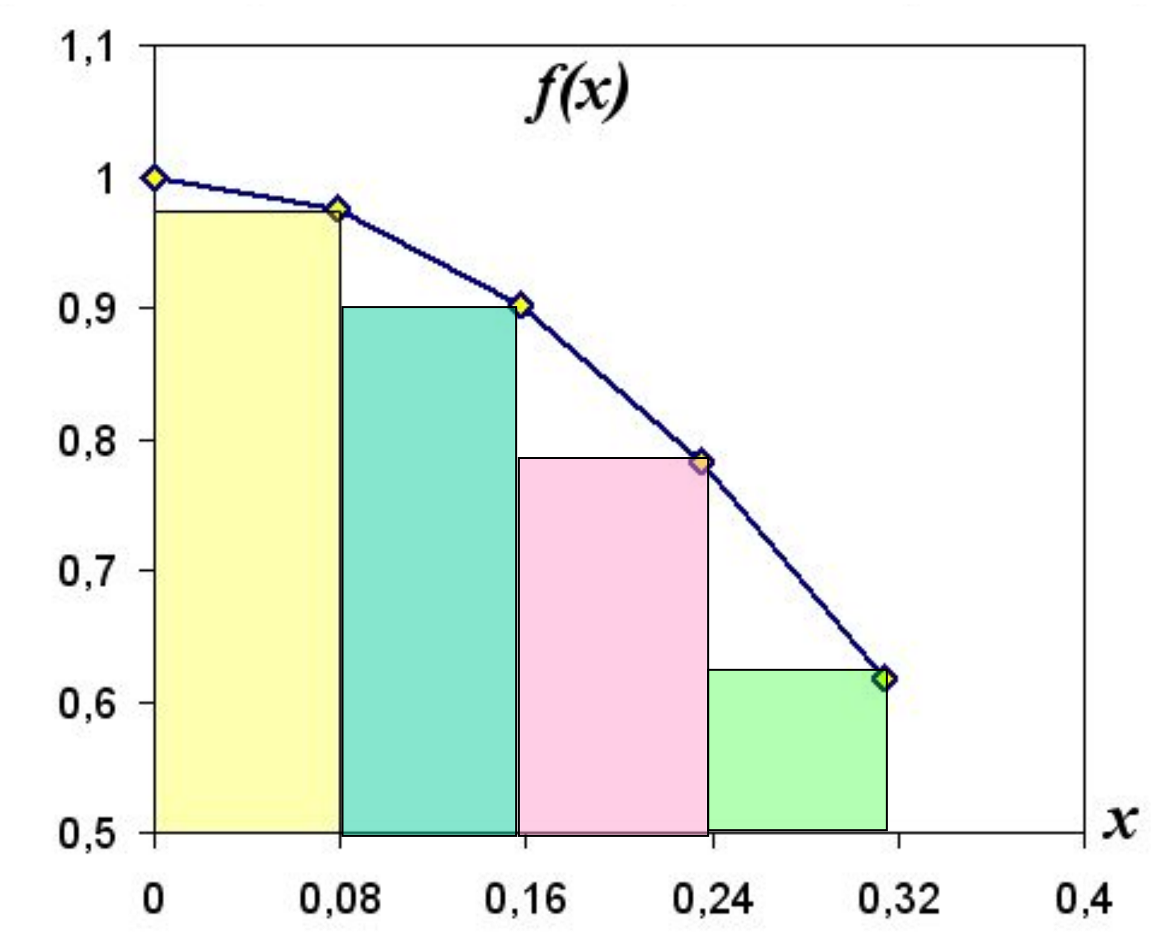


Метод левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

n – количество отрезков

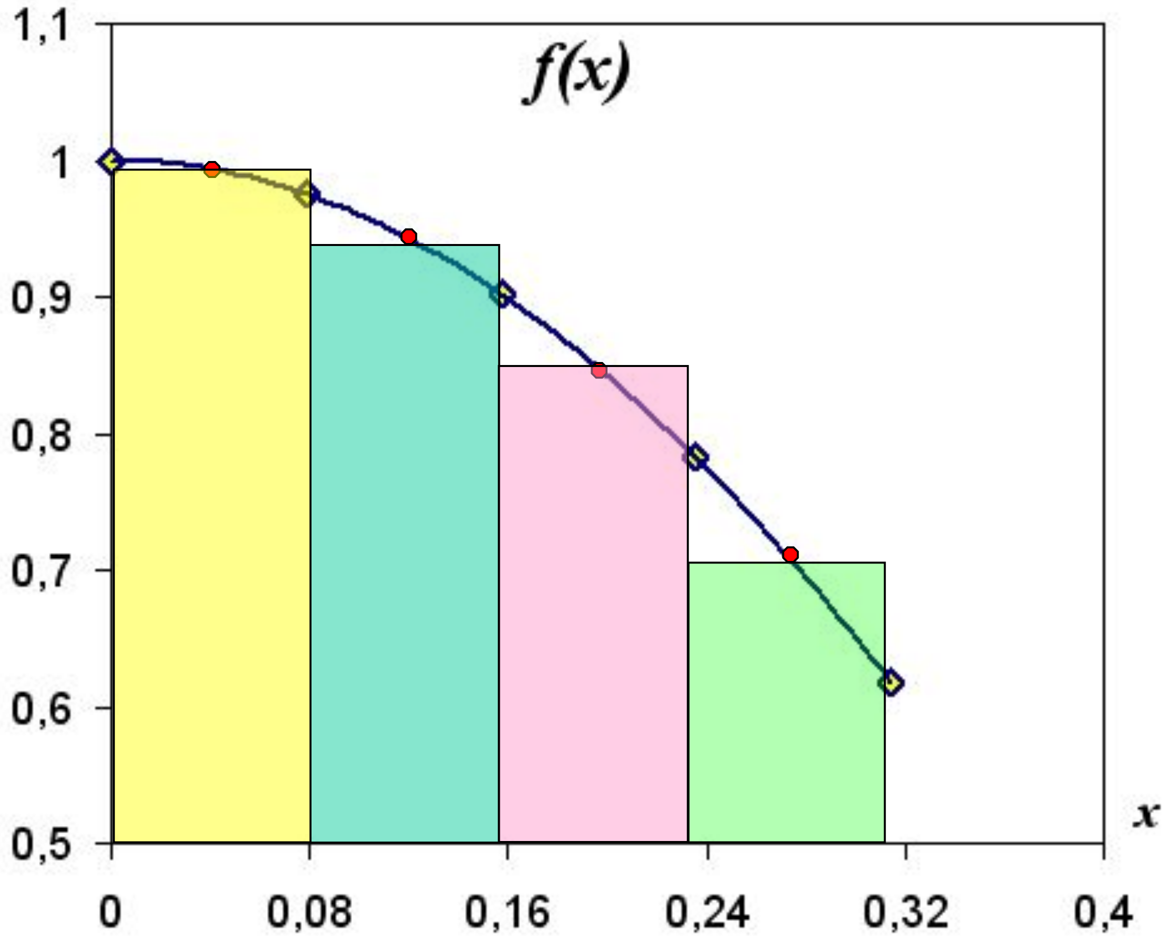
Формула правых прямоугольников



Метод правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Формула средних прямоугольников

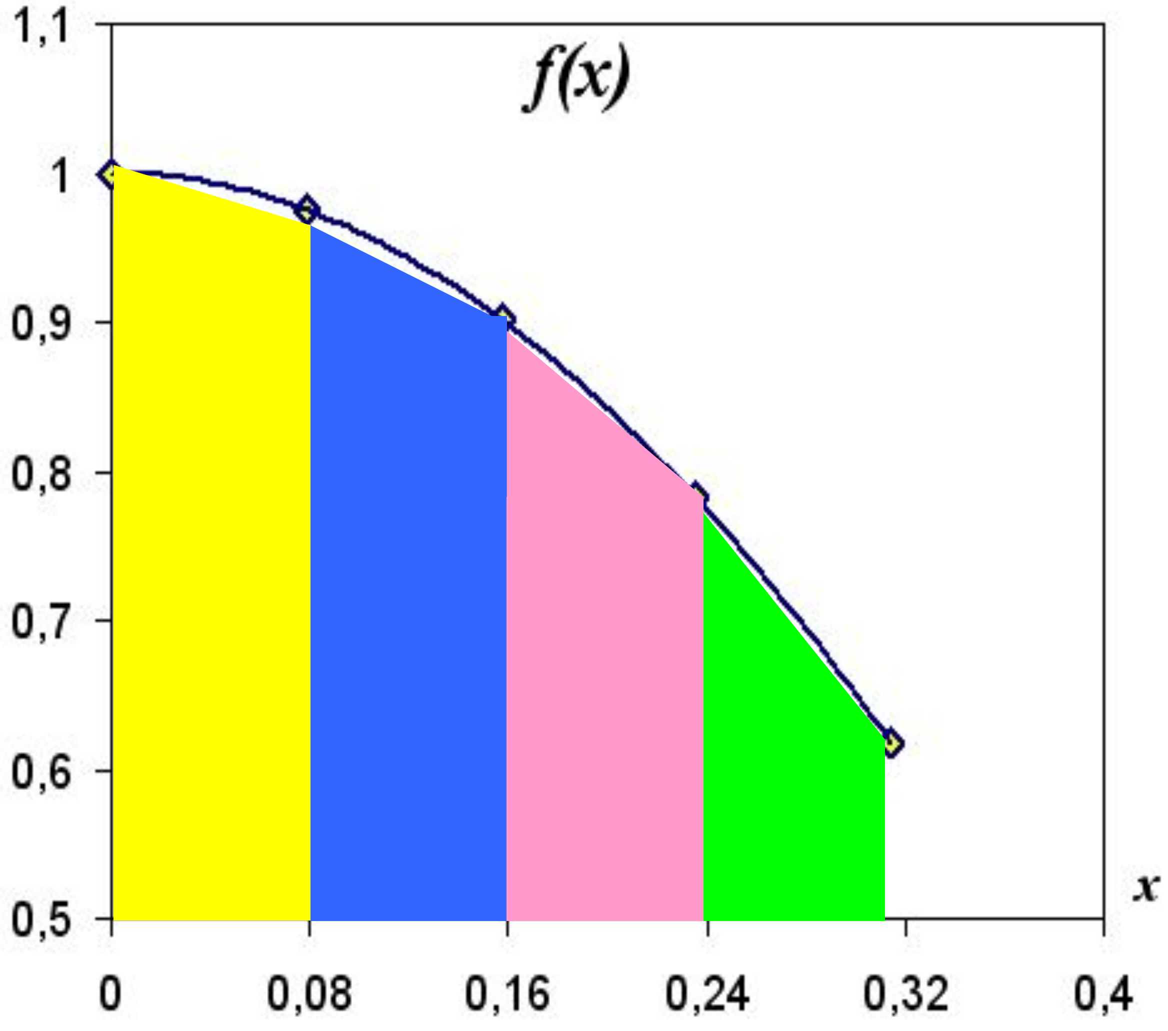


Метод средних прямоугольников

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$$

n – количество отрезков

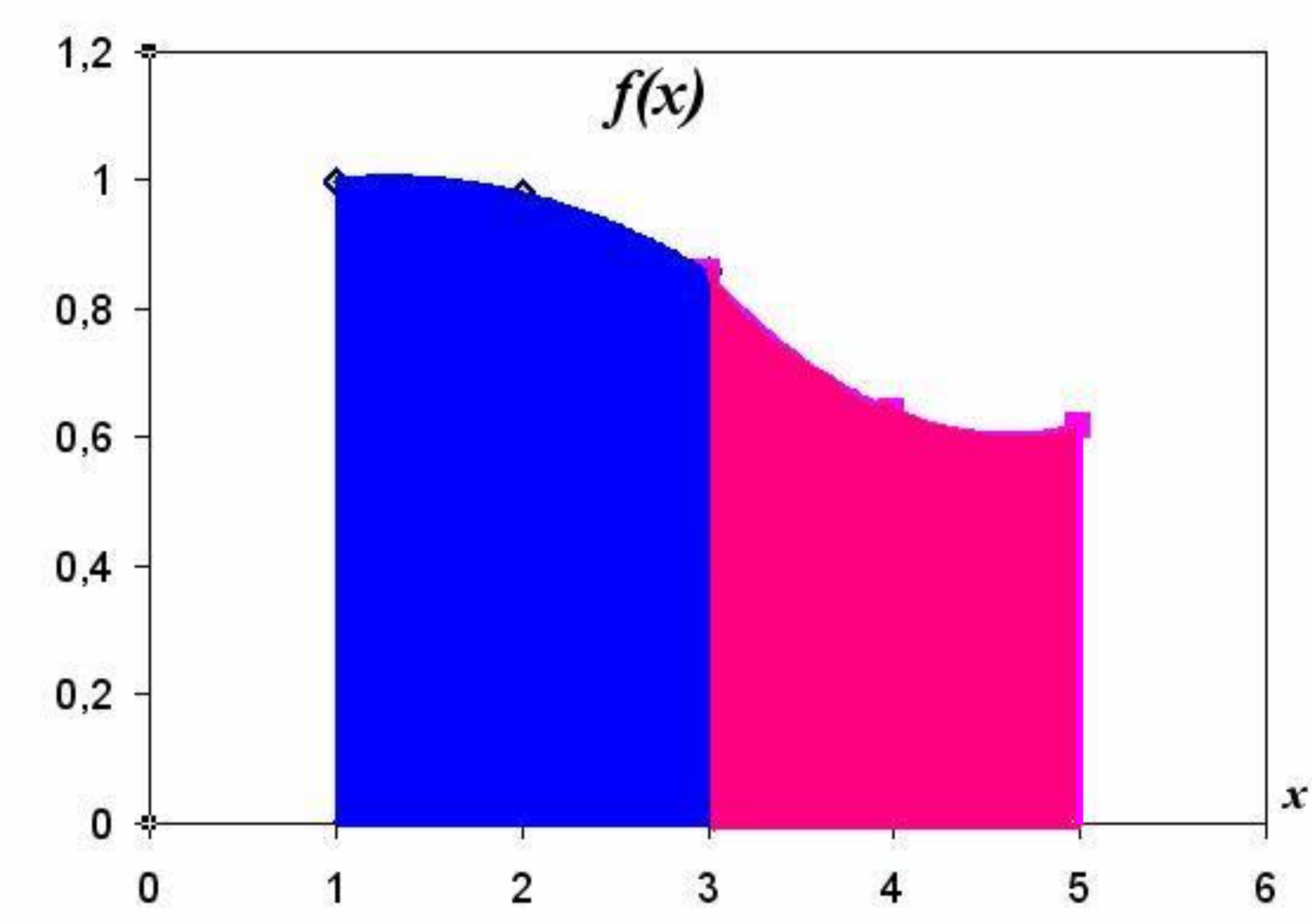
Формула трапеций



Метод трапеций

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{1}{2}f_0 + f_1 + f_2 + \ldots f_{n-1} + \frac{1}{2}f_n\right)$$

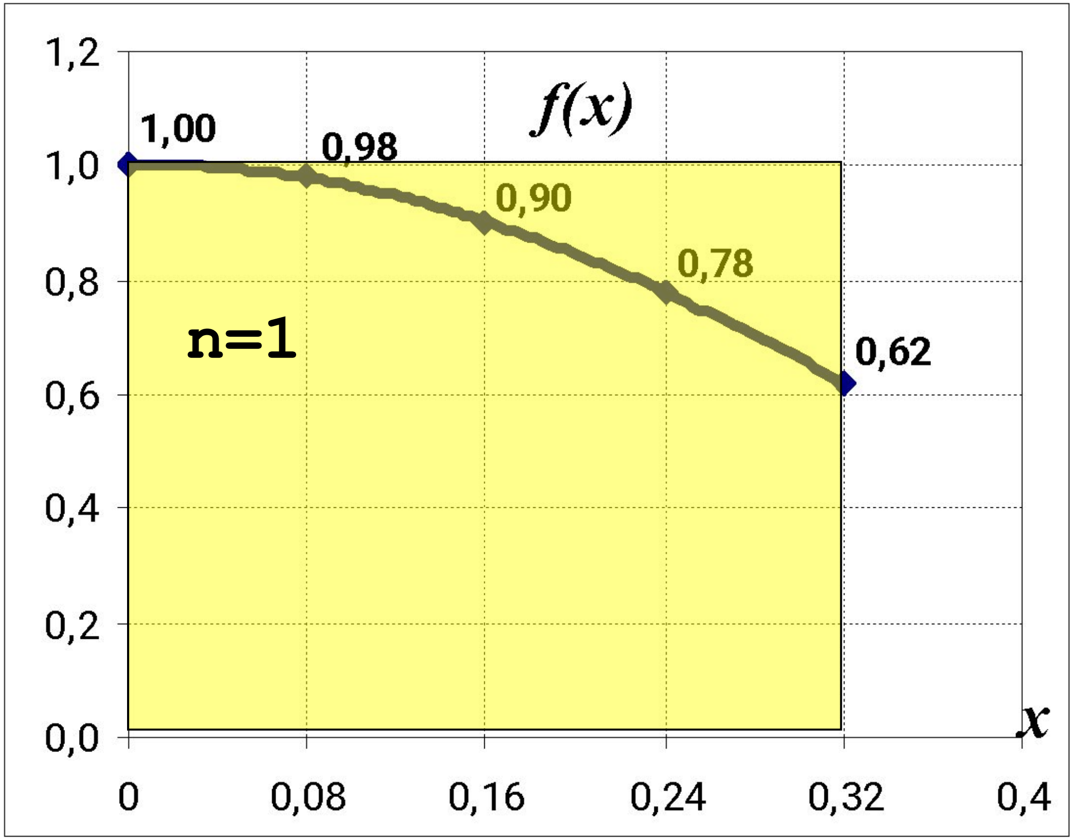
Формула Симпсона



Метод Симпсона

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f_0 + f_n + 2(f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{n-2}) + 4(f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{n-1})\right)$$

Оценка точности интегрирования



точное значение

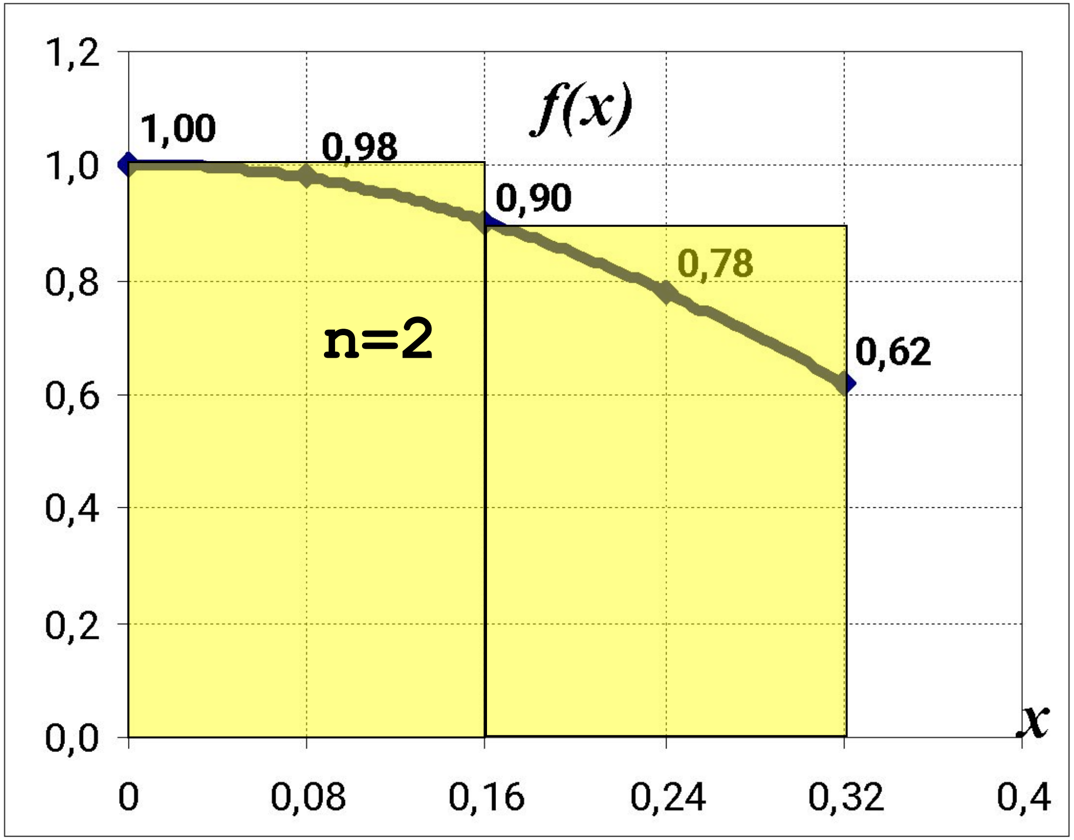
$$\int_{0}^{0,32} f(x)\,dx = \mathbf{0,278967}$$

n – *количество интервалов*

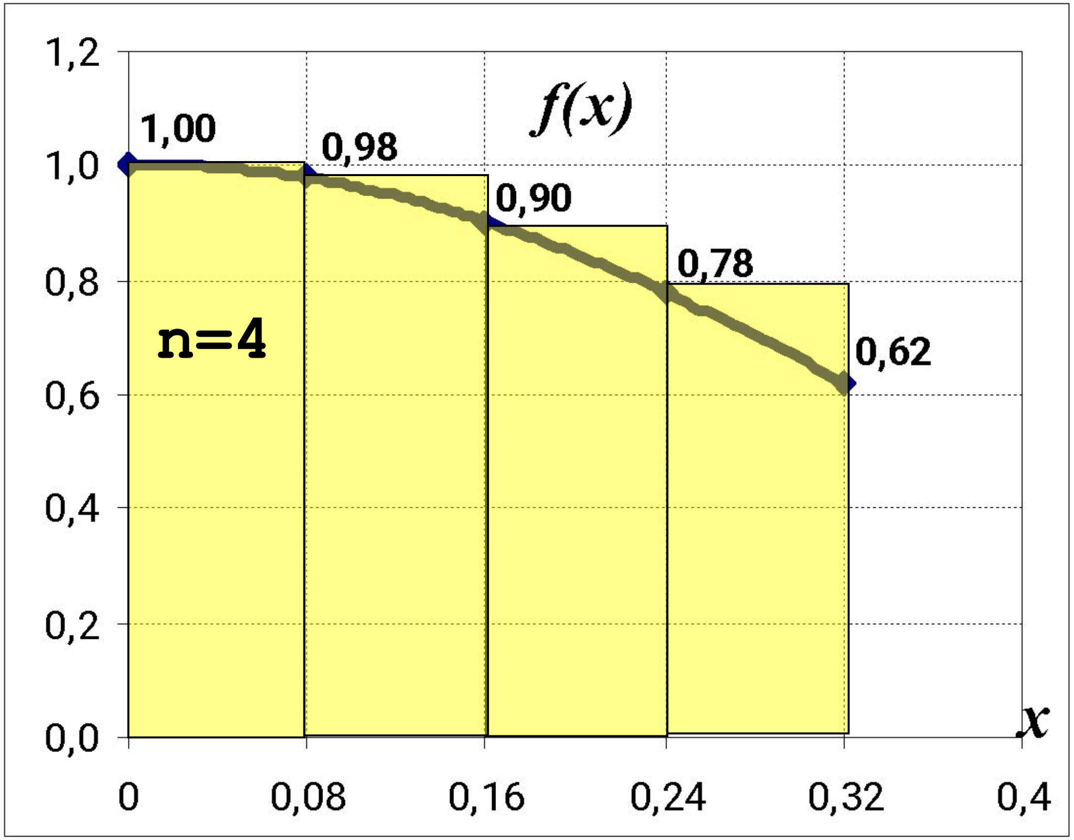
I_n – *значение интеграла при данном разбиении*

$$\varepsilon = \left|\frac{I_{точн} - I_n}{I_{точн}}\right| \qquad \varepsilon_{точн} = \left|\frac{I \qquad - I}{I}\right|$$

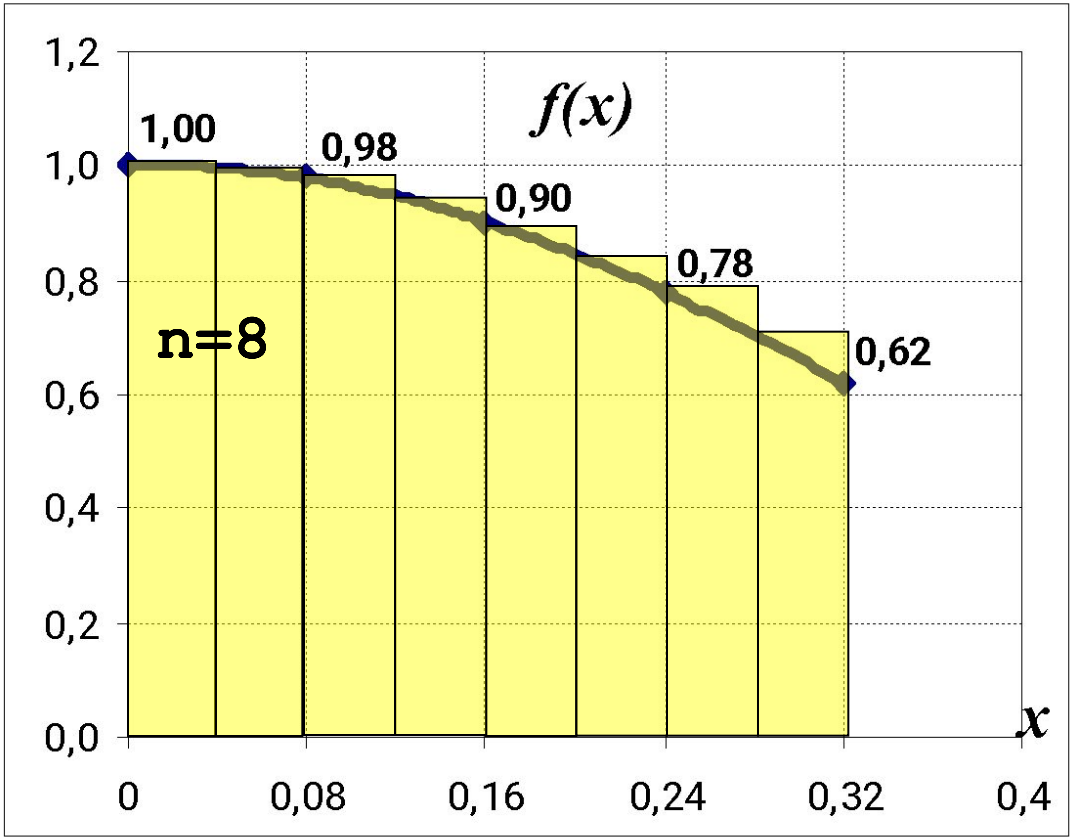
увеличение точности интегрирования



увеличение точности интегрирования



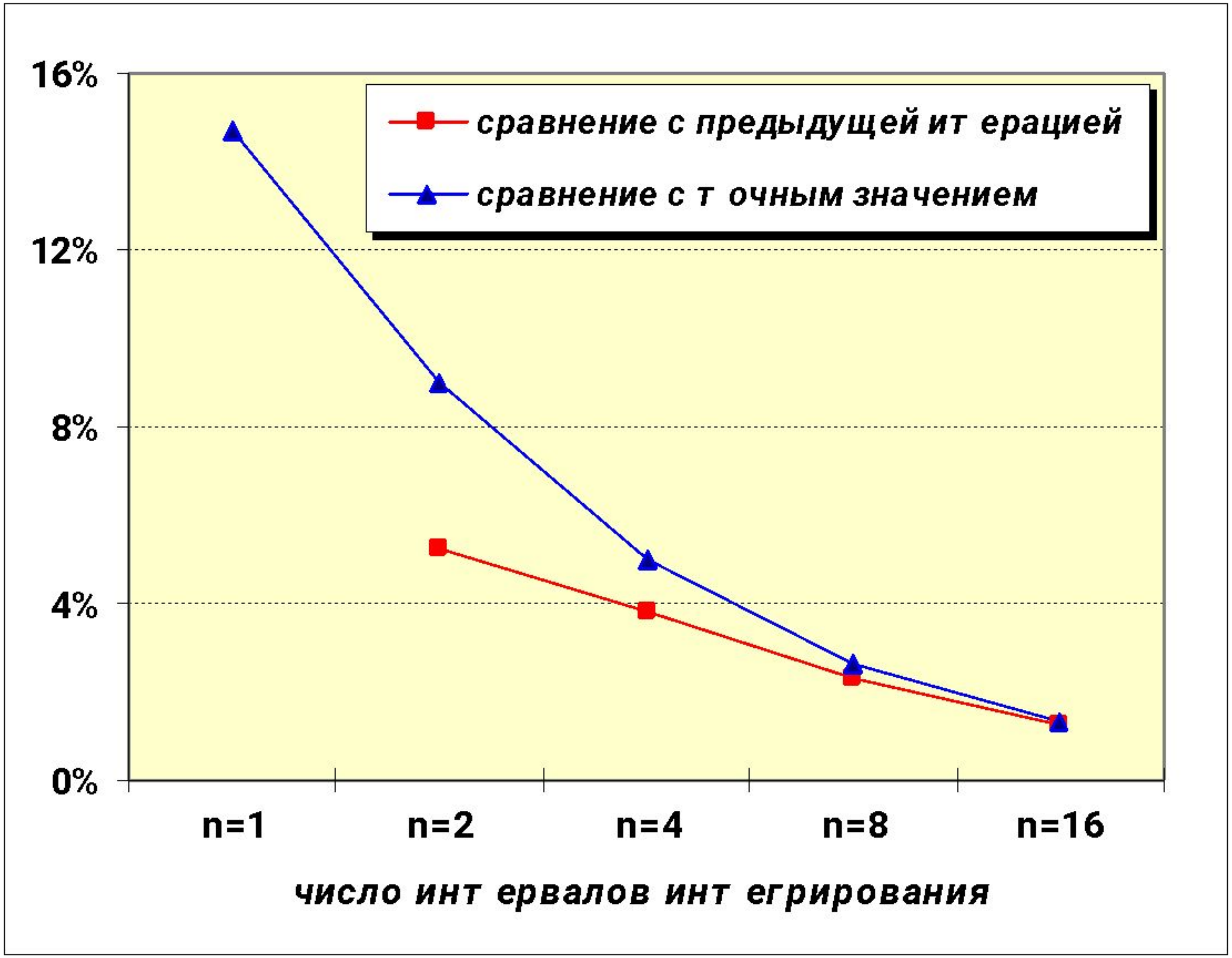
увеличение точности интегрирования



Погрешность интегрирования

	количество интервалов разбиения				
	n=1	n=2	n=4	n=8	n=16
Значение I_n	**0,320**	**0,304**	**0,293**	**0,286**	**0,283**
ε		**0,0526**	**0,038**	**0,023**	**0,013**
$\varepsilon_{точн}$	**0,147**	**0,090**	**0,050**	**0,026**	**0,013**

Погрешность интегрирования



Символьное интегрирование в среде Matlab

syms x

f=sym(‘x/(4+x^2’)

s=int(f,x) – функция вычисляющая значение интеграла, где

s – символьное значение интеграла

f –подынтегральная функция.

Численное интегрирование в среде Matlab

a=0;

b=1;

s=int(‘x/(4+x^2’,a,b)

где

s – численное значение интеграла

a, b – пределы интегрирования

Численное интегрирование в среде Matlab

Метод трапеций:

s=**trapz**(x,y)

– функция вычисляющая значение интеграла методом трапеций, где

s – численное значение интеграла

x – вектор значений аргумента

y – вектор значений подынтегральной функции.

Численное интегрирование в среде Matlab

Метод Симпсона:

[Q,FCNT]=quad(FUN,A,B,TOL)

Q – значение интеграла по методу Симпсона;

FCNT – Количество узлов при заданной точности;

FUN – подынтегральная функция;

A,B – пределы интегрирования;

TOL – точность вычислений, если не указывать, то принимается равной 10^{-6}