ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА
(лекция №11 мен)

ПРОСТЕЙШИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

План

1. Основные понятия
2. Решение дифференциальных уравнений

   I-го порядка

3. Решение дифференциальных уравнений II-го порядка
4. Задачи на составление диф.уравнений

1. Основные понятия

Определение:

Уравнения, содержащие неизвестную функцию, аргумент этой функции и ее производные или дифференциалы, называются дифференциальными.

В общем виде Д.У. можно записать так:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

- *<u>Решить дифференциальное уравнение</u>*

- Решить Д.У. значит найти функцию, которая при подстановке в Д,У., обращает его в тождество, т.е. найти *y(x)*
- Например, решением дифференциального уравнения радиоактивного распада

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

будет функция: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

Виды уравнений:

- **Обыкновенное Д.У.** - если искомая функция есть функция одного аргумента.
- **Д.У. в частных производных** – если искомая функция зависит от нескольких аргументов и дифференциальное уравнение содержит ее частные производные по этим аргументам

например

$$(x+3)dy-(y+3)dx=0; \qquad xy+y^2=(2x^2+xy)y'$$

$$y''-6y'+8y=0; \qquad y''=\frac{1}{4\sqrt{y}}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E-E_p\right)\Psi=0$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

- *Порядок дифференциального уравнения*

- Порядком дифференциального уравнения называется порядок **старшей производной** или дифференциала, содержащегося в этом уравнении.

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = F$$

- Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения*.

- Поэтому решение Д.У. иногда называют общим интегралом

Виды решений Д.У.

- Различают **общее и частное** решения дифференциального уравнения.
- **Общим решением дифференциального уравнения** (ОРДУ) называется такое его решение , которое содержит столько независимых произвольных постоянных , каков порядок этого уравнения.
- Если общее решение дифференциального уравнения получают *в неявном виде* , то оно называется **общим интегралом**.

- Чтобы найти **частное решение Д.У.** (ЧРДУ), должны быть известны так называемые начальные условия.
- *Например,* для дифференциального уравнения $$y' = y$$
- ОРДУ будет : $y = Ce^x$
- а ЧРДУ будет при условии $y(0) = 2$

$$y = 2e^x$$

2. Решение дифференциальных уравнений I-го порядка

- Расмотрим решение некоторых видов Д. У.:
- - уравнения I –го порядка с разделяющимися переменными
- - однородные Д.У. I –го порядка

Д.У. I-го порядка с разделяющимися переменными

- К таким уравнениям относятся уравнения вида

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx+f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy=0$$

Путем алгебраических преобразований данное уравнение приводят к уравнениям вида

$$\Phi(y)dy=F(x)dx$$

- После интегрирования уравнения

$$\Phi(y)dy = F(x)dx$$

- находим общее решение дифференциального уравнения или общий интеграл

$$\int \Phi(y)dy = \int F(x)dx$$

- откуда выражаем $y = f(x, c)$

- где ОРДУ: $y = f(x, c)$

Например: $xydx + (x + 1)dy = 0.$

- Разделим переменные

$$(x + 1)dy = -xydx$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{x+1}$$

- проинтегрируем обе части уравнения

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{xdx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{(x+1-1)dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{1}{x+1} - 1 \right) dx$$

ОИДУ: $$\ln y = \ln(x+1) - x + \ln C$$

ОРДУ: $$y = C(x+1)e^{-x}$$

Запишем **алгоритм** решения Д.У. 1 порядка с разделяющимися переменными:

- 1. Выразить производную из уравнения
- 2. Записать производную через дифференциалы
- 3. Разделить переменные (с функцией налево, с аргументом направо)
- 4. Проинтегрировать обе части Д.У.
- 5. Из вида первообразных выразить функцию – это будет ОРДУ

Д.У. I-го порядка однородные

- Однородными Д.У. называются уравнения, в которых производная является функцией от $\frac{y}{x}$. То есть $y` = f(\frac{y}{x})$
- Решаются эти уравнением путем замены переменной

- Решаются эти уравнением путем замены переменной
- $u = \frac{y}{x}$ Отсюда $y = ux$
- Тогда $y' = u'x + x'u = \frac{du}{dx}x + u$
- После такой подстановки уравнение превращается в уравнение с разделяющимися переменными

Например: $$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

- Это однородное уравнение, т.к.

$$y' = \frac{1 + y/x}{1 - y/x}$$

- Обозначим $u = \dfrac{y}{x}$ Отсюда $y = ux$

- Тогда $y' = u'x + x'u = \dfrac{du}{dx}x + u$

- Уравнение будет иметь вид

$$\frac{du}{dx}x + u = \frac{1+u}{1-u}$$

Решаем уравнение $\frac{du}{dx}x+u=\frac{1+u}{1-u}$

$$\frac{du}{dx}x=\frac{1+u}{1-u}-u$$

$$\frac{du}{dx}x=\frac{1+u-u+u^2}{1-u}$$

$$\frac{(1-u)du}{1+u^2}=\frac{dx}{x}$$

$$\frac{du}{1+u^2}-\frac{udu}{1+u^2}=\frac{dx}{x}$$

Теперь интегрируем

$$\boldsymbol{arctg(u) - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln x + C}$$

$$arctg\frac{y}{x} \quad - \frac{1}{2}\ln(1+(y/x)^2) = \ln x + C$$

Т.к.выразить «У» невозможно, то мы получили ОИДУ

ДУ первого порядка линейные неоднородные

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Используем замену переменной

$$y = uv$$

$$y' = u'v + uv'.$$

Подставив значения y и y' в уравнение, получим:

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$u'v + u\big(v' + p(x)v\big) = q(x)$$

$$u'v + u\left(v' + p(x)v\right) = q(x)$$

- Если выбрать *v*(*x*) так, чтобы выражение, стоящее в скобках, обратилось в нуль, т. е.

$$v' + p(x)v = 0$$

- то для второй функции *u*(*x*) получится уравнение

$$u'v(x) = q(x).$$

- После этого найдем $y = v(x) \cdot u(x, C).$

ДУ в полных дифференциалах

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

Если предположить, что это полный дифференциал какой-то функции *U(x,y),*

То

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Причем, U(x,y)=const и

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

алгоритм

- Проверить $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
- Из области определения выбрать x_0 y_0
- Вычислить $Q(x_0, y)$
- Найти

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_o, y)dy$$

- Приравнять найденное значение константе