# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ:

1) Конечная ОДЗ

2) Оценка левой и правой частей уравнений

3) Использование монотонности

# КОНЕЧНАЯ ОДЗ

Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения (неравенства или системы) состоит из конечного числа значений, то для решения достаточно проверить все эти значения.

Пример

Пример. $\sqrt{x^2-1}+x=1+\sqrt{2-2x^2}$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x^2-1\geq 0, \\ 2-2x^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\geq 1, \\ x^2\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$$

Проверка: $x=1$ – корень$(\sqrt{0}+1=1+\sqrt{0};\ 1=1$

$x=-1$ – не корень$(\sqrt{0}-1\neq 1+\sqrt{0}$

Ответ: $x=1$

Основн.

# ОЦЕНКА ЛЕВОЙ И ПРАВОЙ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЯ

$$f(x) = g(x)$$

$$f(x) \geq a$$

$$g(x) \leq a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a \end{cases}$$

Пример

Пример. $x^2 + 2^{|x|} = 1$

Решение. $x^2 + 2^{|x|} = 1 \Leftrightarrow 2^{|x|} = 1 - x^2 \Leftrightarrow$

$$(f(x) = 2^{|x|} \geq 1(\text{ так как } |x| \geq 0),$$
$$g(x) = 1 - x^2 \leq 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|x|} = 1 \\ 1 - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Далее

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = 0$$

$$f_1(x) \geq 0$$

$$f_2(x) \geq 0$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$f_n(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$$

Сумма нескольких неотрицательных функций равна нулю тогда и только тогда, когда все функции одновременно равны нулю

Пример

Пример. $\sqrt{x-2} + |x^3 - 8| + \lg(1 + \sqrt{x^2 - 4}) = 0$

Решение. Так как $f_1(x) = \sqrt{x-2} \geq 0,$

$$f_2(x) = |x^3 - 8| \geq 0,$$

$$f_3 = \lg\left(1 + \sqrt{x^2 - 4}\right) \geq 0,$$

то заданное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ |x^3 - 8| = 0 \\ \lg\left(1 + \sqrt{x^2 - 4}\right) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим $x = 2$, что удовлетворяет всей системе

Ответ: $x = 2$

Основн.

# Использование монотонности

## Схема решения

1)Подбираем один или несколько корней уравнения

2)Доказываем, что других корней это уравнение не имеет (используя теоремы о корнях уравнений или оценку левой и правой частей)

Далее

# Теоремы о корнях уравнений

**Теорема 1.**
Если в уравнении f(x) = a функция f(x) возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.

Пример

**Теорема 2.**
Если в уравнении f(x) = g(x) функция f(x) возрастает на некотором промежутке, а функция g(x) убывает на этом же промежутке(или наоборот), то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.

Пример

Основн.

Пример.

Уравнение $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=2$

имеет единственный корень $x=1$

$(\sqrt{1}+\sqrt[3]{1}=2,$ т. е. $2=2)$,

так как функция $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$

возрастает (на всей О. О. $x\geq 0$)

Назад

Пример.

Уравнение $2^x = 6 - x$

имеет единственный корень $x = 2$

$(2^2 = 6 - 2, \text{т. е. } 4 = 4)$

так как $f(x) = 2^x -$ возрастает, а

$g(x) = 6 - x$ – убывает

Назад