

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ:

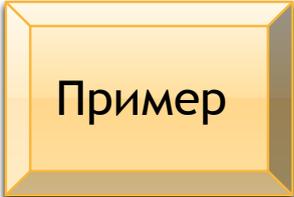
1) Конечная ОДЗ

2) Оценка левой и правой частей
уравнений

3) Использование монотонности

КОНЕЧНАЯ ОДЗ

Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения (неравенства или системы) состоит из конечного числа значений, то для решения достаточно проверить все эти значения.



Пример

Пример. $\sqrt{x^2 - 1} + x = 1 + \sqrt{2 - 2x^2}$

Решение. одз: $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0, \\ 2 - 2x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1, \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Проверка: $x = 1$ – корень ($\sqrt{0} + 1 = 1 + \sqrt{0}$; $1 = 1$)

$x = -1$ – не корень ($\sqrt{0} - 1 \neq 1 + \sqrt{0}$)

Ответ: $x = 1$

ОСНОВН.

ОЦЕНКА ЛЕВОЙ И ПРАВОЙ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЯ

$$f(x) = g(x)$$

$$f(x) \geq a$$

$$g(x) \leq a$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a \end{cases}$$

Пример

Пример. $x^2 + 2^{|x|} = 1$

Решение. $x^2 + 2^{|x|} = 1 \Leftrightarrow 2^{|x|} = 1 - x^2 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} (f(x) = 2^{|x|} \geq 1 \text{ (так как } |x| \geq 0), \\ g(x) = 1 - x^2 \leq 1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|x|} = 1 \\ 1 - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$



Далее

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = 0$$

$$f_1(x) \geq 0$$

$$f_2(x) \geq 0$$

.....

$$f_n(x) \geq 0$$



$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$$

Сумма нескольких неотрицательных функций равна нулю тогда и только тогда, когда все функции одновременно равны нулю

Пример

Пример. $\sqrt{x-2} + |x^3 - 8| + \lg(1 + \sqrt{x^2 - 4}) = 0$

Решение. Так как $f_1(x) = \sqrt{x-2} \geq 0$,
 $f_2(x) = |x^3 - 8| \geq 0$,
 $f_3 = \lg(1 + \sqrt{x^2 - 4}) \geq 0$,

то заданное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ |x^3 - 8| = 0 \\ \lg(1 + \sqrt{x^2 - 4}) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения
находим $x = 2$, что
удовлетворяет всей системе

Ответ: $x = 2$

Основн.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОНОТОННОСТИ

Схема решения

1) Подбираем один или несколько корней уравнения

2) Доказываем, что других корней это уравнение не имеет (используя теоремы о корнях уравнений или оценку левой и правой частей)

Далее

Теоремы о корнях уравнений

Теорема 1.

Если в уравнении $f(x) = a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.

Пример

Теорема 2.

Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, а функция $g(x)$ убывает на этом же промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке.

Пример

Основн.

Пример.

Уравнение $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$

имеет единственный корень $x = 1$

($\sqrt{1} + \sqrt[3]{1} = 2$, т. е. $2 = 2$),

так как функция $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

возрастает (на всей $O.O. x \geq 0$)



Назад

Пример.

Уравнение $2^x = 6 - x$

имеет единственный корень $x = 2$

($2^2 = 6 - 2$, т. е. $4 = 4$)

так как $f(x) = 2^x$ — возрастает, а

$g(x) = 6 - x$ — убывает



Назад