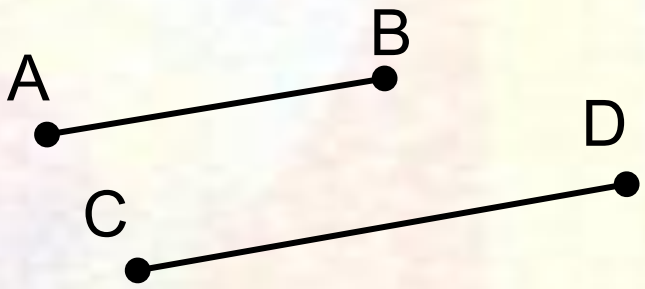
ПОДОБИЕ В ГЕОМЕТРИИ

ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

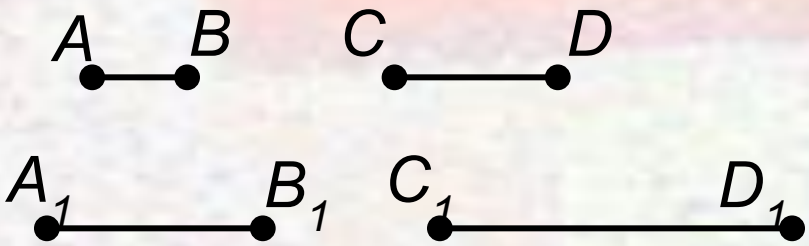
Пропорциональные отрезки

- Отношением отрезков называется отношение их длин.



$$\frac{AB}{CD}$$

- Отрезки *AB* и *CD* *пропорциональны* отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если



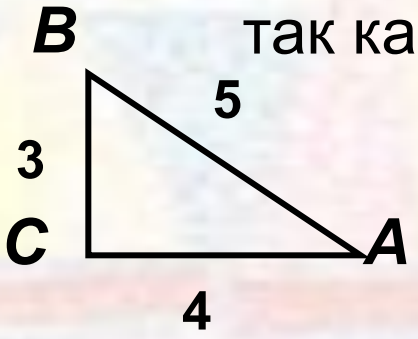
$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1}$$

ПРИМЕР

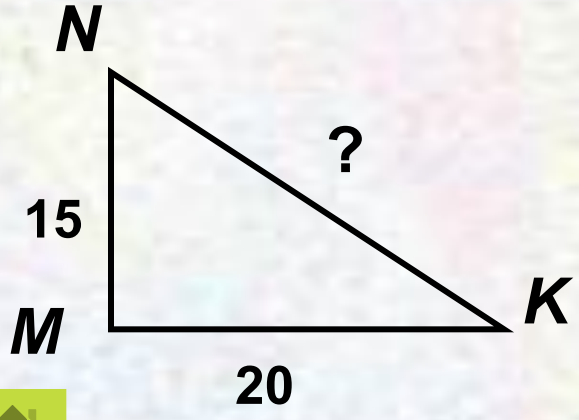
ПРИМЕР

- Даны два прямоугольных треугольника

Стороны ВС и СА пропорциональны MN и MK, так как



$$\frac{BC}{MN} = \frac{3}{15} \quad \text{и} \quad \frac{AC}{MK} = \frac{4}{20}$$

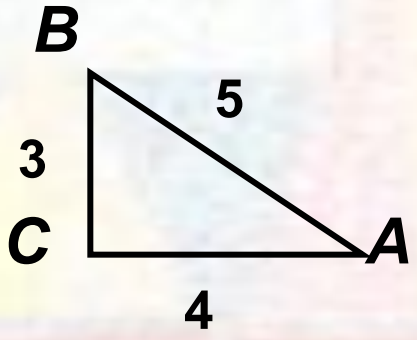


т.е. $$\frac{BC}{MN} = \frac{AC}{MK} = \frac{1}{5}$$

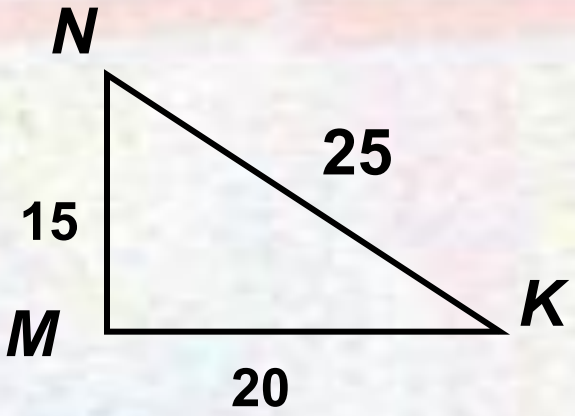
НАЙДИТЕ ГИПОТЕНУЗУ БОЛЬШЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

Пропорциональность отрезков

- Понятие пропорциональности вводится для любого числа отрезков.



например

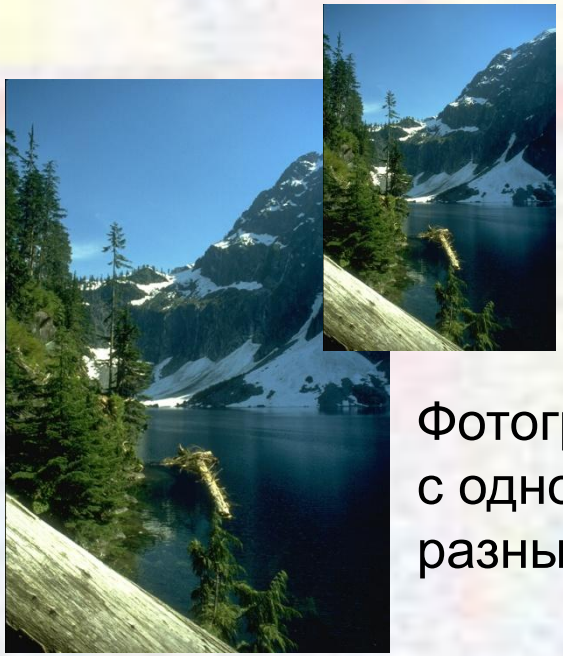


$$\frac{BC}{MN} = \frac{AC}{MK} = \frac{AB}{NK}$$

Подобные фигуры

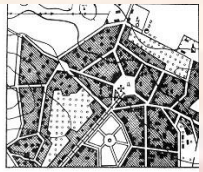
Предметы одинаковой формы, но разных размеров

Здание и его макет



Фотографии, отпечатанные с одного негатива, но с разными увеличениями;

1 : 10 000



1 : 25 000

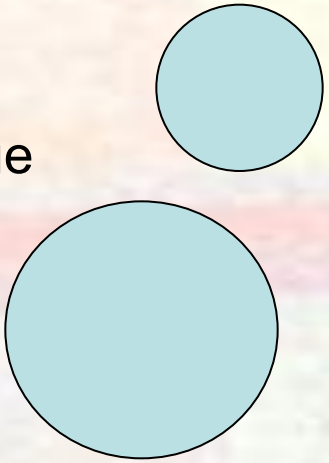
Планы, географические карты одного и того же района, выполненные в разных масштабах.

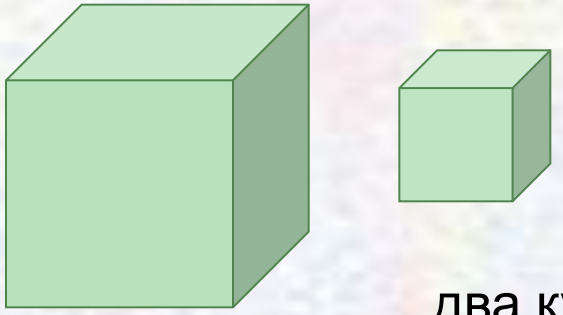
Подобные фигуры

- В геометрии фигуры одинаковой формы называют *подобными* фигурами

Подобными являются любые два квадрата

Подобными являются любые два круга





два куба

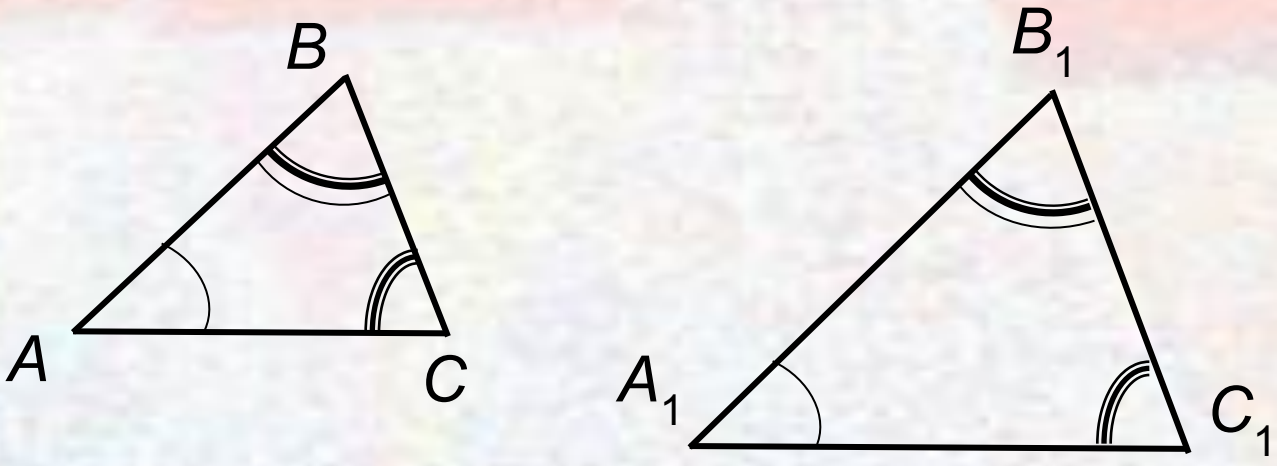
два шара

Подобные треугольники

- Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$,

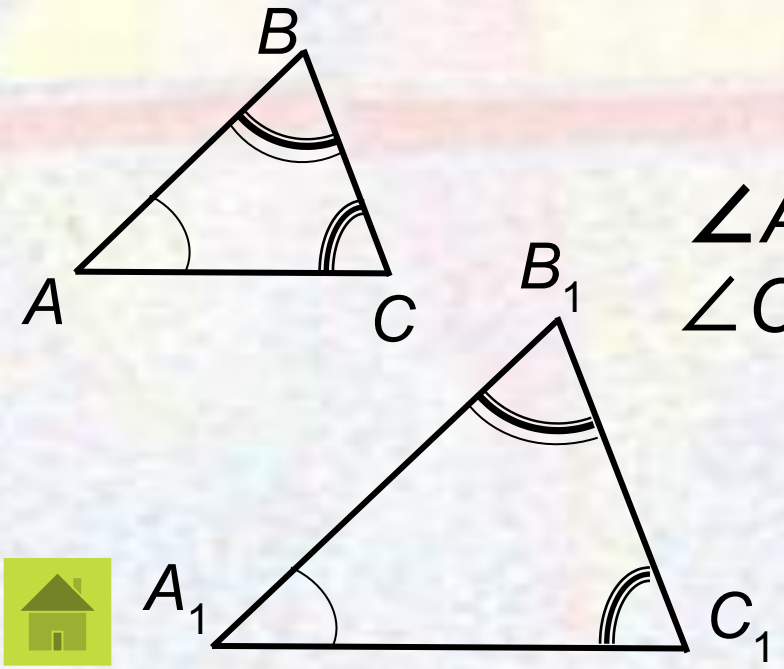
у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Стороны AB и A_1B_1 , AC и A_1C_1 , BC и B_1C_1, лежащие против равных углов, называют *сходственными*



Определение

- Два треугольника называются *подобными,* если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.



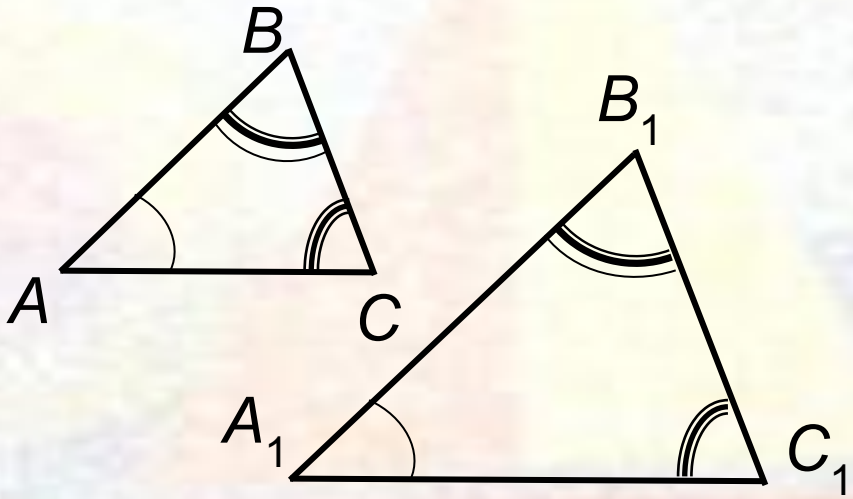
$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

$\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Коэффициент подобия

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

k – коэффициент подобия.

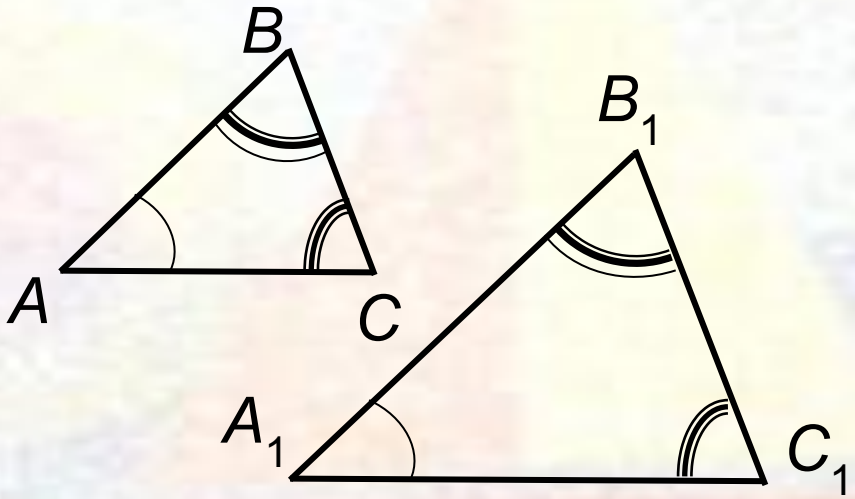
- Число *k* , равное отношению сходственных сторон, называется *коэффициентом подобия*.

Дополнительные свойства

- Отношение *высот* подобных треугольников, проведенных к сходственным сторонам, равно *коэффициенту подобия.*
- Отношение *медиан* подобных треугольников, проведенных к сходственным сторонам, равно *коэффициенту подобия.*
- Отношение *биссектрис* подобных треугольников, проведенных к сходственным сторонам, равно *коэффициенту подобия.*

Отношение периметров

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$



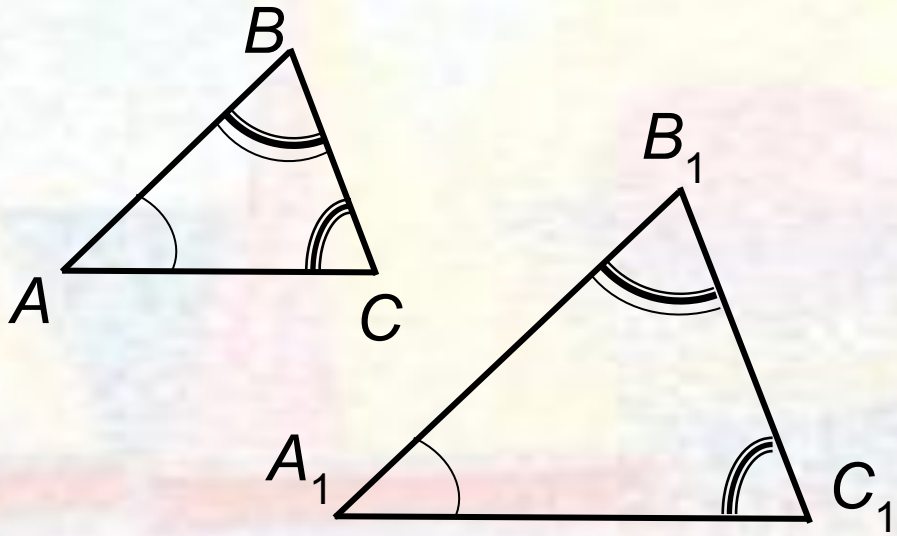
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = k$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

- **Отношение периметров подобных треугольников равно**
- ***коэффициенту подобия*.**

Отношение периметров



$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

$$AB = kA_1B_1$$

$$BC = kB_1C_1$$

$$AC = kA_1C_1$$

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB + BC + AC}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1} = \frac{kA_1B_1 + kB_1C_1 + kA_1C_1}{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1}$$

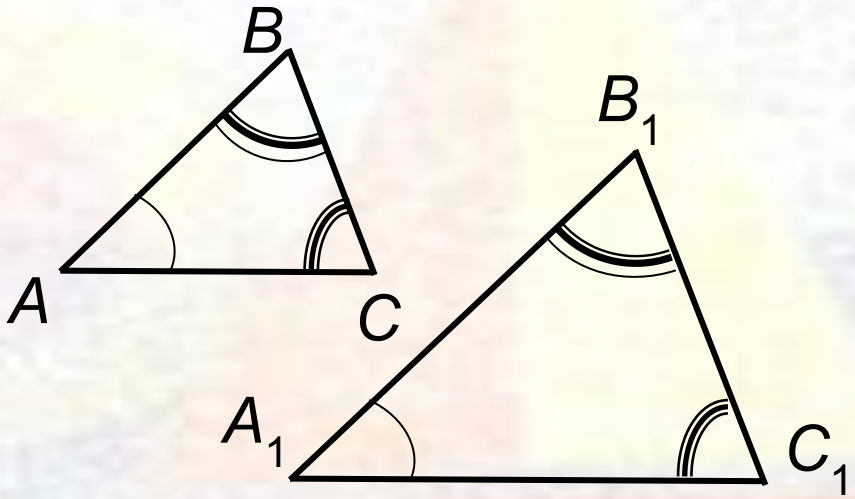
Выносим общий множитель за скобку и сокращаем дробь.

$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = k$$

Отношение площадей

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$



- **Отношение площадей подобных треугольников равно *квадрату коэффициента подобия*.**

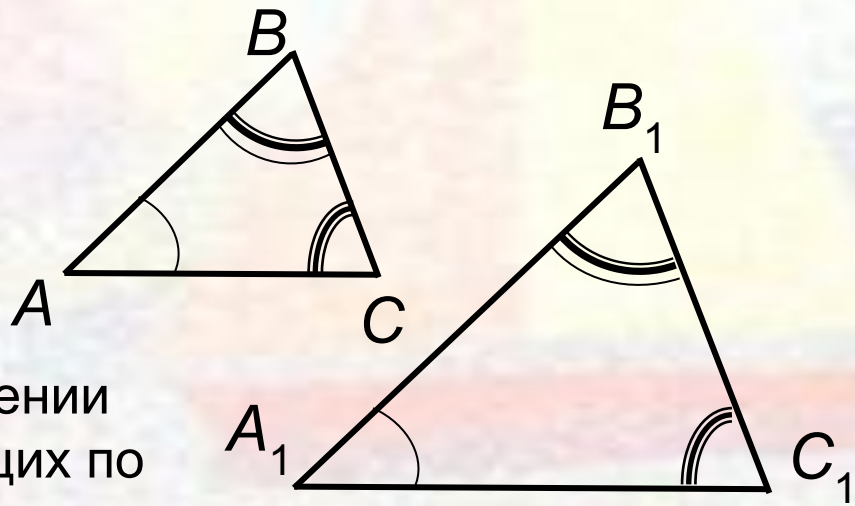
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Отношение площадей

Пусть $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, коэффициент подобия k

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

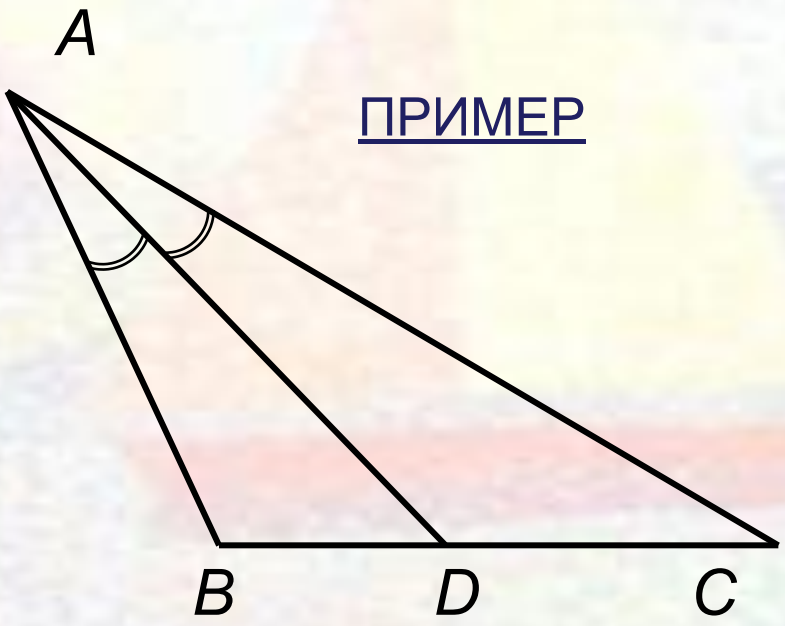


$\angle A = \angle A_1$, по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, имеем

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1} = k \cdot k = k^2$$

Свойство биссектрисы треугольника

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

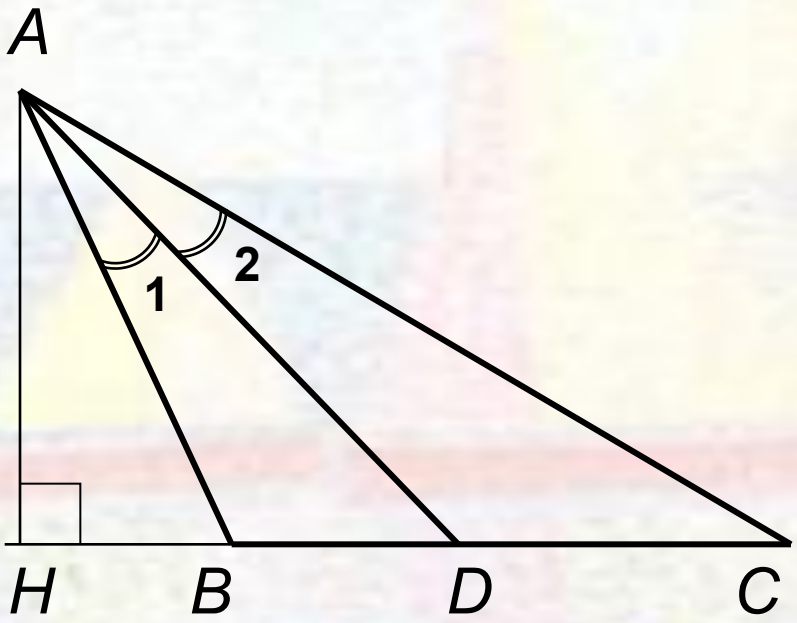


ПРИМЕР

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} \quad \text{или} \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Свойство биссектрисы треугольника

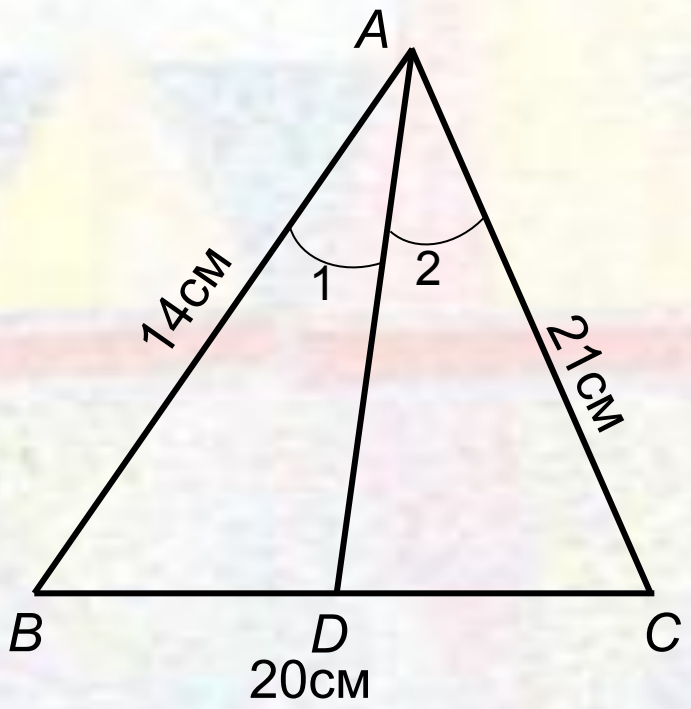


- ΔABD и ΔACD имеют общую высоту AH
- $$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{DB}{DC}$$
- ΔABD и ΔACD имеют равные углы $\angle 1 = \angle 2$
- $$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB \cdot AD}{AD \cdot AC} = \frac{AB}{AC}$$

ИМЕЕМ

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Свойство биссектрисы треугольника



Дано: ΔABC

AD – биссектриса

AB = 14 см

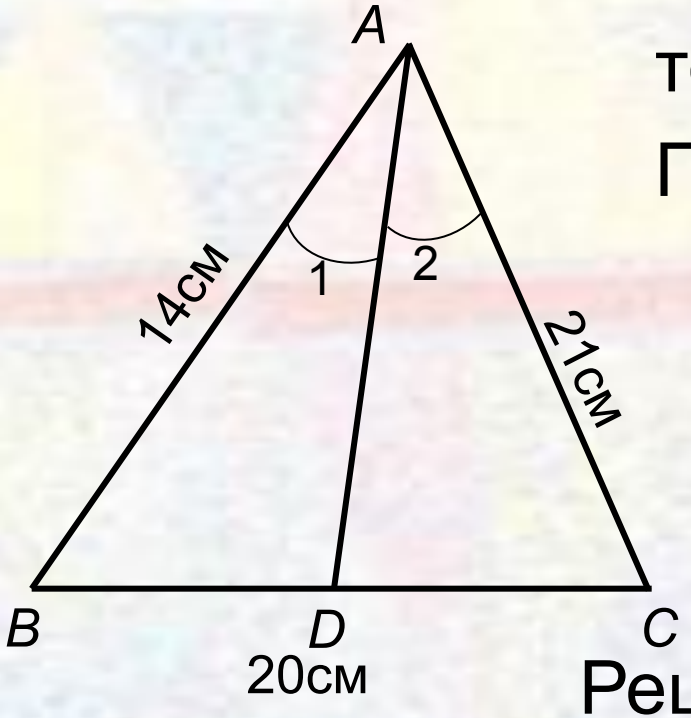
BC = 20 см

AC = 21 см

Найти: BD,CD.

Решение:

Свойство биссектрисы треугольника



Решение:

Пусть $BD = x$ см,

тогда $CD = (20 - x)$ см.

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$

имеем $\frac{x}{14} = \frac{20 - x}{21}$

Решая уравнение, получим $x = 8$

***BD* = 8 см, *CD* = 12 см.**

Признаки подобия треугольников

- Первый признак подобия треугольников.

(по двум углам)

- Второй признак подобия треугольников.

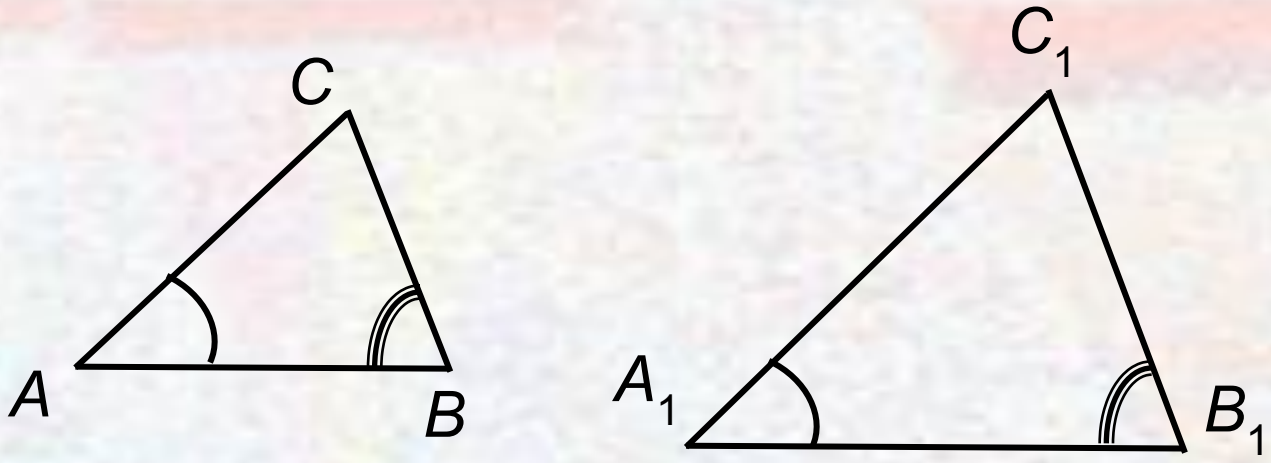
(по углу и двум пропорциональным сторонам)

- Третий признак подобия треугольников.

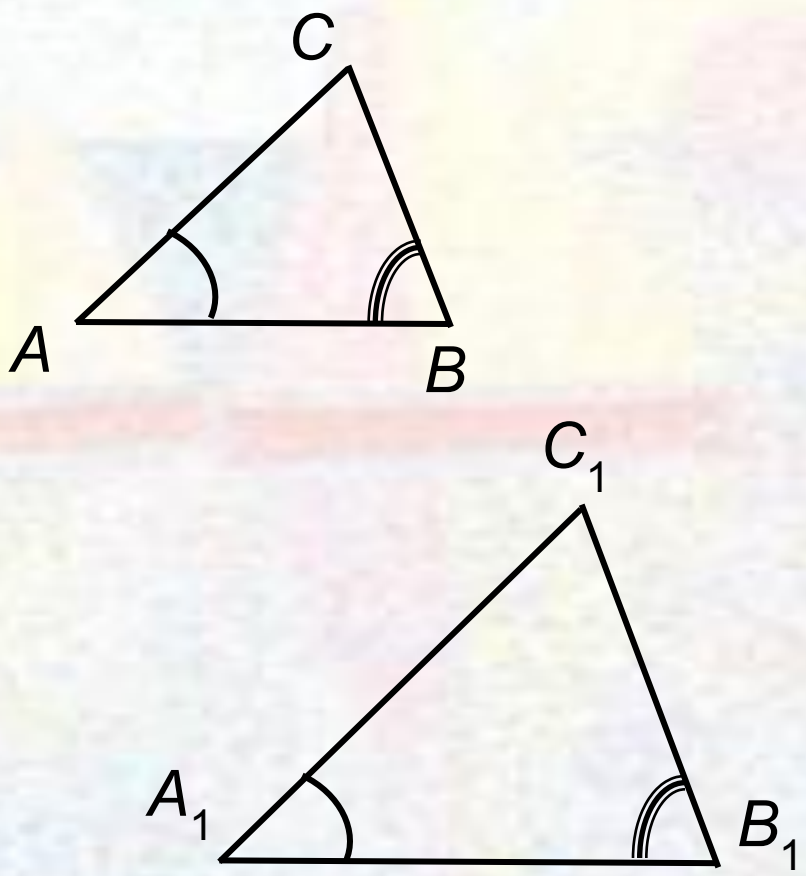
(по трем пропорциональным сторонам)

Первый признак подобия треугольников.

- Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



Первый признак подобия треугольников.



Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$,

$\angle A = \angle A_1$,

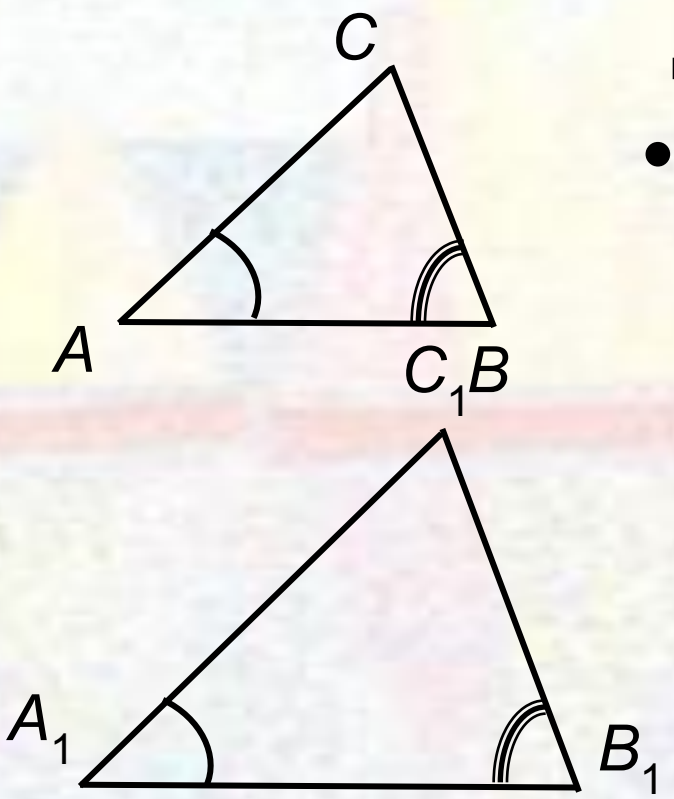
$\angle B = \angle B$.

Доказать:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

Первый признак подобия треугольников.



Доказательство:

- $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$,

$\angle C_1 = 180^\circ - \angle A_1 - \angle B_1$.

$\angle C = \angle C_1$

Таким образом углы треугольников соответственно равны.

Первый признак подобия треугольников.

Доказательство:

- $\angle A = \angle A_1$, $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$

  $\angle B = \angle B_1$. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB \cdot BC}{A_1B_1 \cdot B_1C_1}$

Имеем $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$

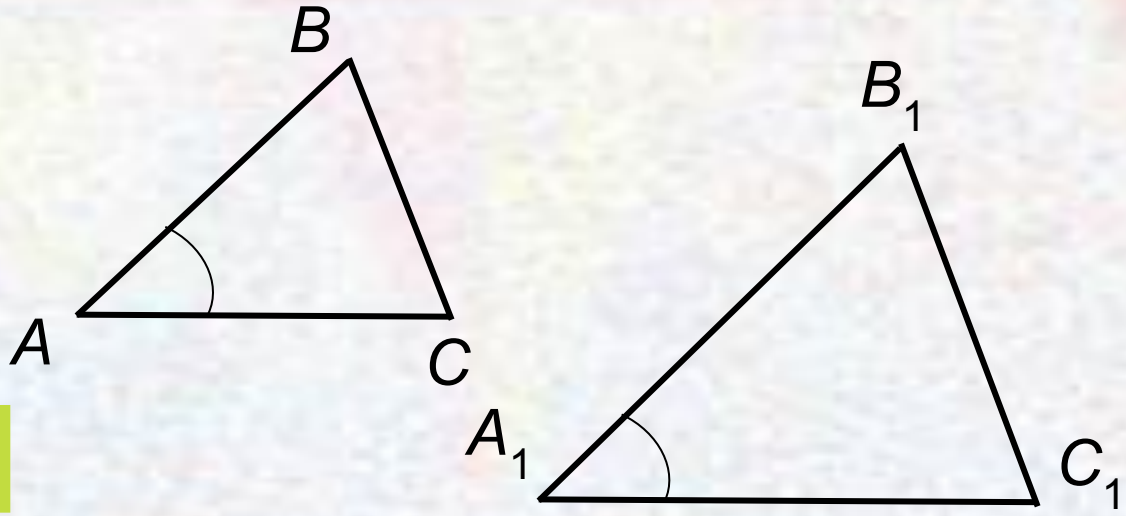
Аналогично, рассматривая равенство углов

$\angle C = \angle C_1$, $\angle A = \angle A_1$, получим $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$

Итак, сходственные стороны пропорциональны.

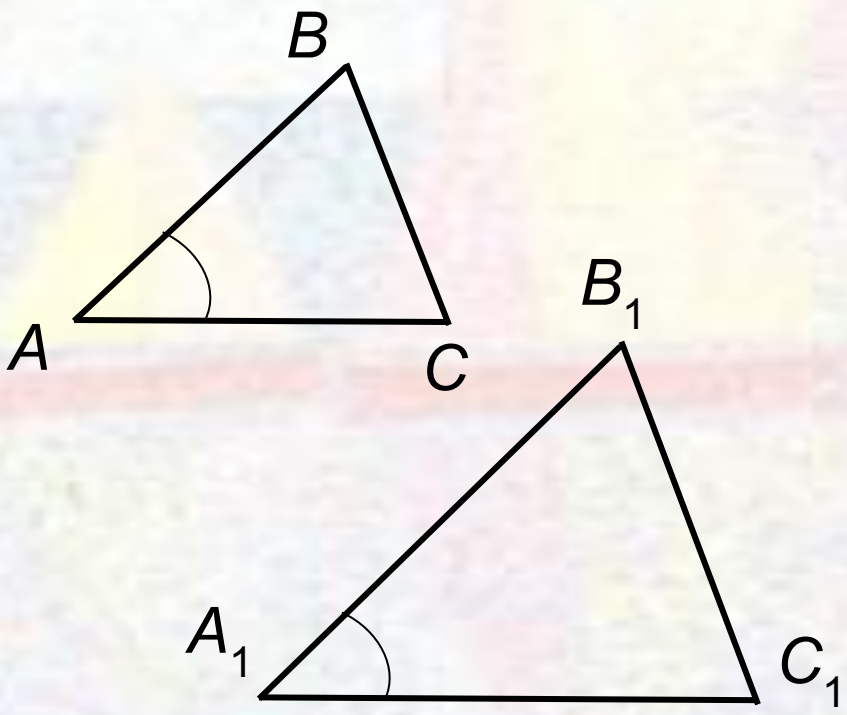
Второй признак подобия треугольников.

- Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.



$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Второй признак подобия треугольников.



Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$,

$\angle A = \angle A_1$,

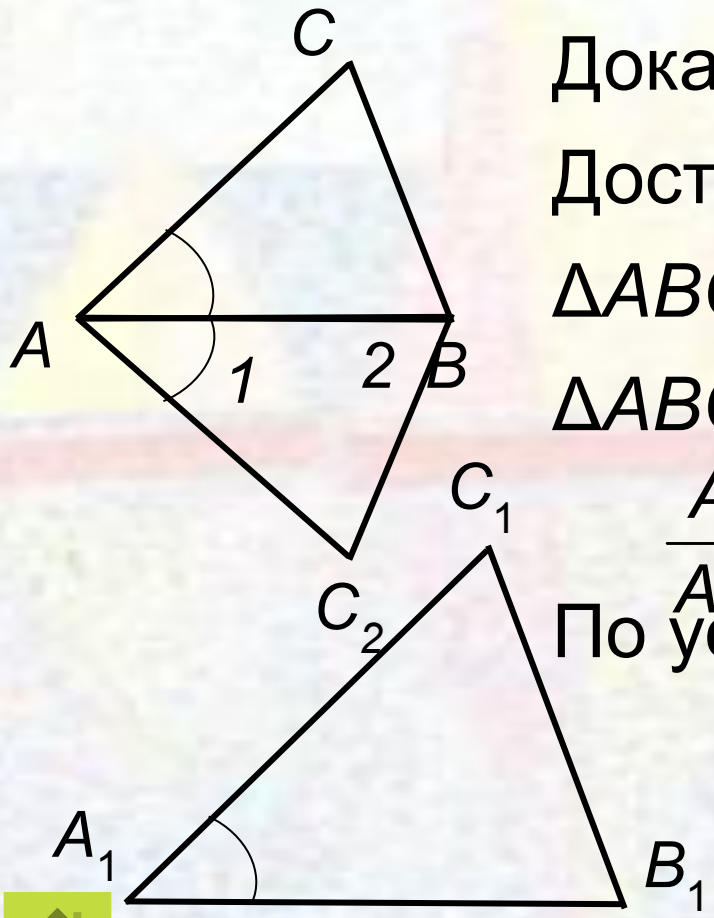
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Доказать:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

Второй признак подобия треугольников.



Доказательство:

Достаточно доказать, что $\angle B = \angle B_1$.

ΔABC_2, $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$,

$\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ по двум углам.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC_2}{A_1C_1}$$ (из подобия).

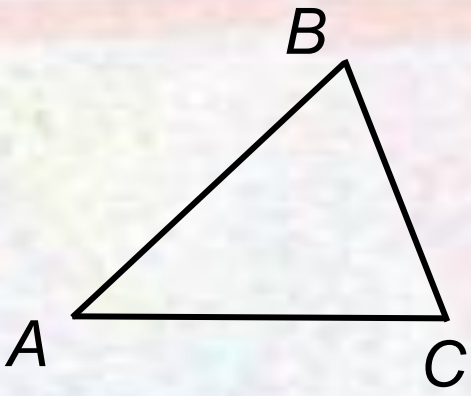
По условию $$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

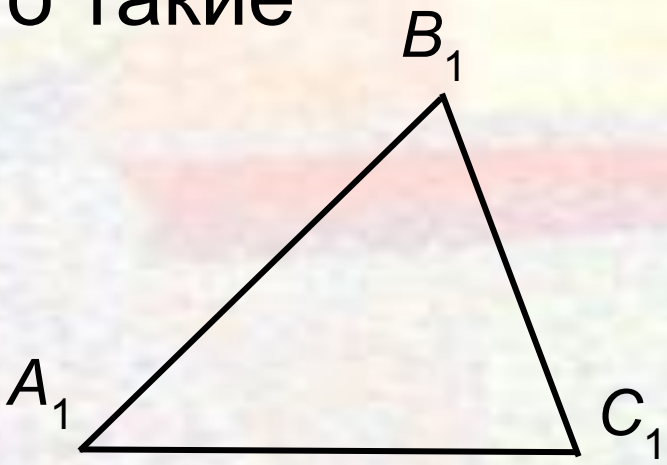
$AC = AC_2$.

$\Delta ABC = \Delta ABC_2$, т.е. $\angle B = \angle B_1$.

Третий признак подобия треугольников.

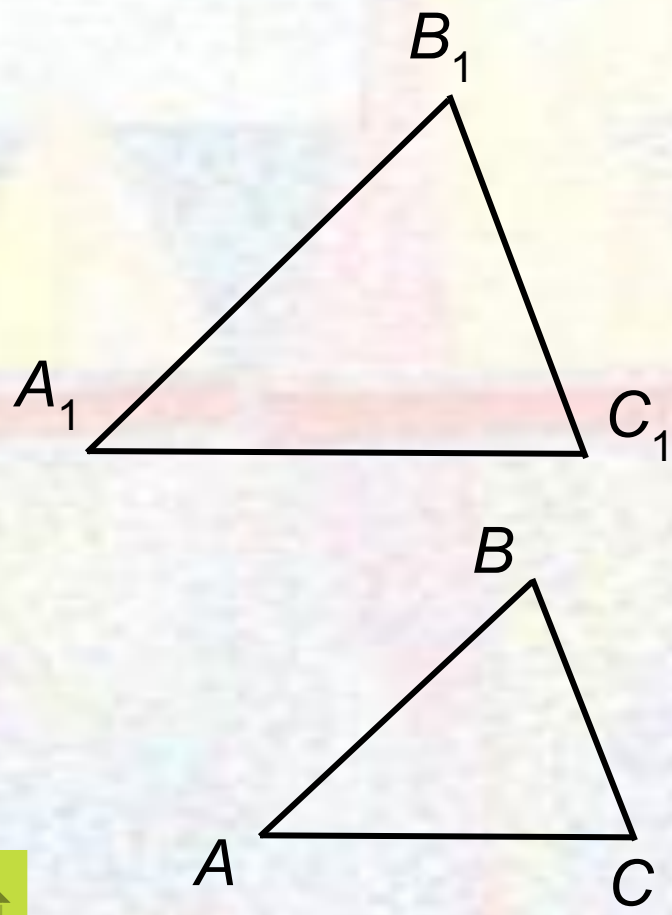
- Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.





$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Третий признак подобия треугольников.



Дано:

ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$,

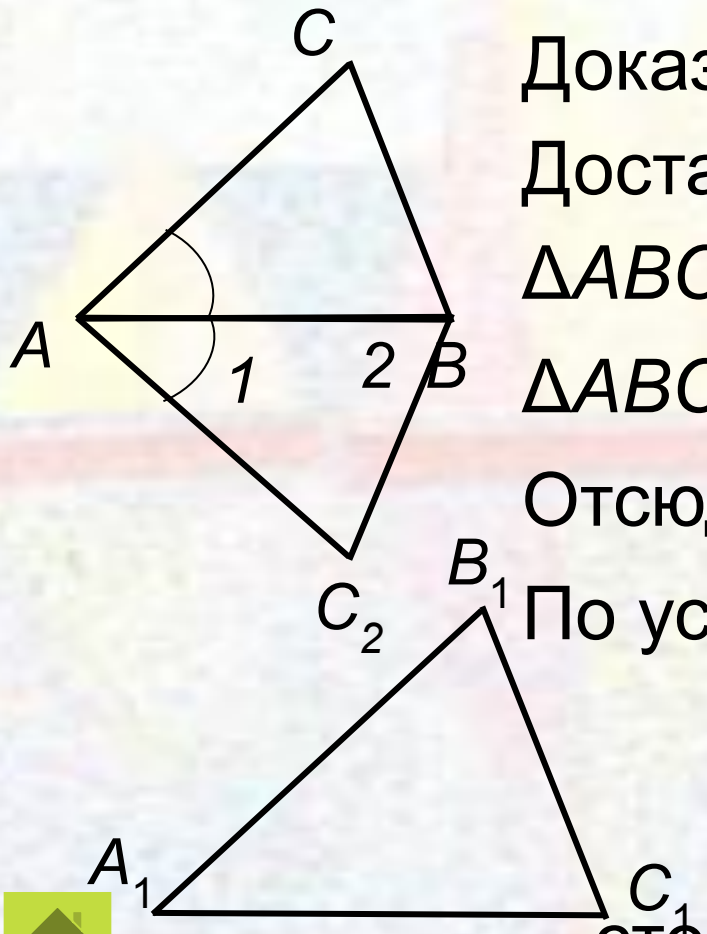
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

Доказать:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Доказательство:

Третий признак подобия треугольников.



Доказательство:

Достаточно доказать, что $\angle A = \angle A_1$

ΔABC_2, $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$,

$\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$ по двум углам.

Отсюда $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC_2}{B_1C_1} = \dfrac{AC_2}{A_1C_1}$

По условию

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$$

$\Delta ABC = \Delta ABC_2$ по трем сторонам, т.е. $\angle A = \angle A_1$

Разминка

1

- Отрезки *AB* и *CD* пропорциональны отрезкам *MN* и *PK*.
- Найдите *MN*,

если *AB* = 3, *CD* = 4, *PK* = 2.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PK} \qquad \frac{3}{4} = \frac{MN}{2}$$

***MN* = 1,5**

Разминка

2

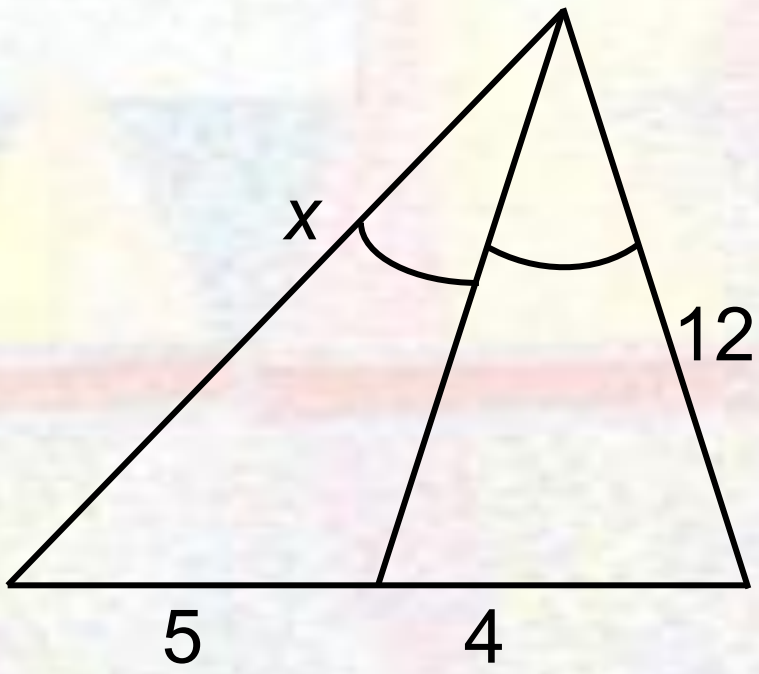
- Даны два подобных прямоугольных треугольника.
- Коэффициент подобия 1,5
- Стороны одного из них 3, 4 и 5.
- Найдите гипотенузу другого.

$5 \cdot 1{,}5 = 7{,}5$

7,5

Разминка

3



- По данным на рисунке найдите *x*.

$$\frac{x}{5} = \frac{12}{4}$$

***x* = 15**

Разминка

4

- Длины двух окружностей 2π и 8π.
- Найдите отношение их радиусов.

$2\pi : 8\pi = 1 : 4$

0,25

Разминка

5

- Отношение площадей двух квадратов равно 9 : 1.
- Найдите сторону большего их них, если сторона меньшего равна 2.

$k^2 = 9$, $k = 3$

Коэффициент подобия

$3 \cdot 2 = 6$

сторона большего квадрата

6

Решение задач

Пропорциональные отрезки	1	2	3
Свойство биссектрисы	4	5	6
Определение подобных треугольников	7	8	9
Отношение периметров подобных фигур	10	11	12
Отношение площадей подобных фигур	13	14	15

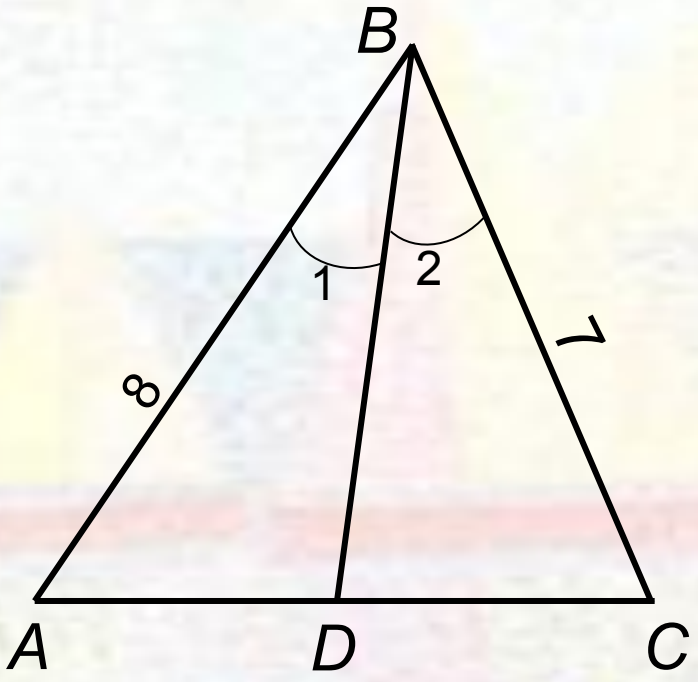
1 задача

Отрезки *AB* и *CD* пропорциональны отрезкам *EF* и *MN*.

Найдите *EF*,

если *AB* = 5 см, *CD* = 80 мм, *MN* = 1 дм.

4 задача



В треугольнике *ABC*

AC = 6 см,

BC = 7 см,

AB = 8 см,

BD – биссектриса.

Найдите, *AD*, *CD*.

7 задача

Треугольник со сторонами 2 см, 3 см, 4 см

подобен треугольнику

со сторонами 5 мм, 7,5 мм и 1 см.

Найдите коэффициент подобия.

10 задача

Сходственные стороны подобных треугольников относятся как 1 : 3. Найдите периметр большего треугольника, если периметр меньшего 15 см.

13 задача

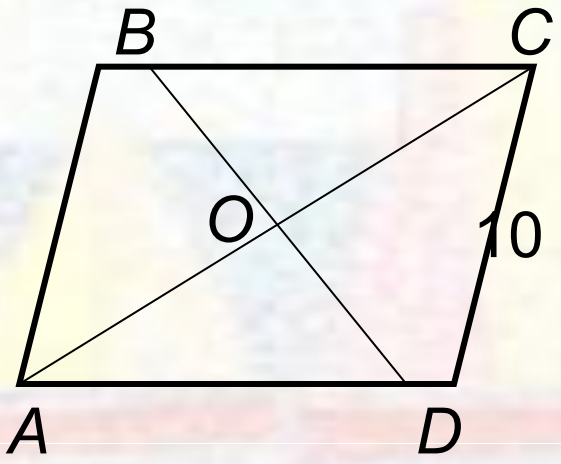
$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$,

$AB : A_1B_1 = k = 4$

$S_{\Delta ABC} = 48$ м^2.

Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$.

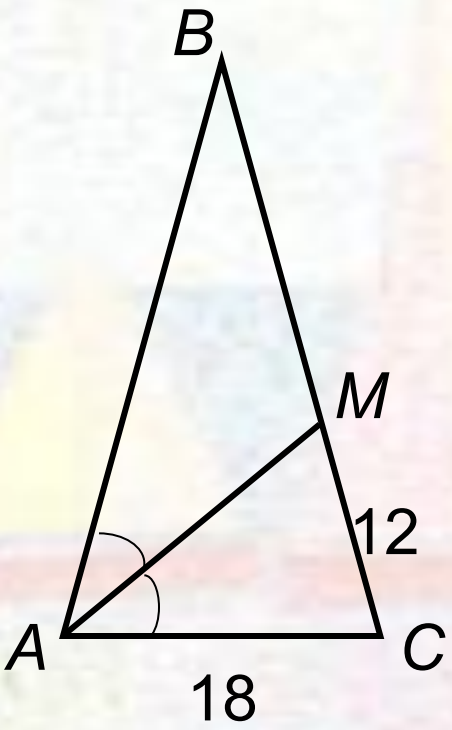
2 задача



В параллелограмме *ABCD* диагонали пересекаются в точке *O*, *CD* = 10 см. Найдите периметр параллелограмма, если

$$\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{OC}$$

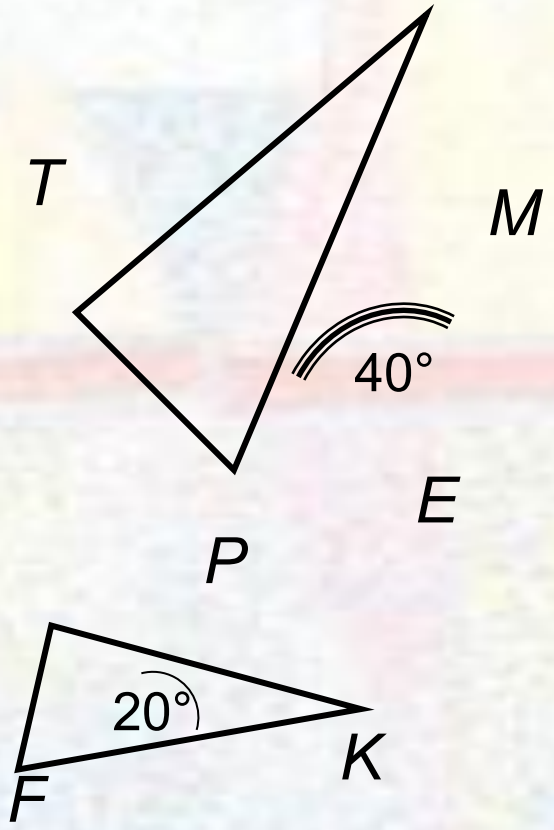
5 задача



Основание равнобедренного треугольника равно 18 мм, а биссектриса делит боковую сторону на отрезки, из которых прилежащий к основанию равен 12 мм. Найдите периметр треугольника

8 задача

Треугольники *KPF* и *EMT* подобны, причем



$$\frac{KP}{ME} = \frac{PF}{MT} = \frac{KF}{ET}$$

$\angle F = 20°$, $\angle E = 40°$.

Найдите остальные углы этих треугольников.

11 задача

Периметры подобных треугольников 12 мм и 108 мм соответственно. Стороны одного из них 3 мм, 4 мм и 5 мм. Найдите стороны другого и определите его вид.

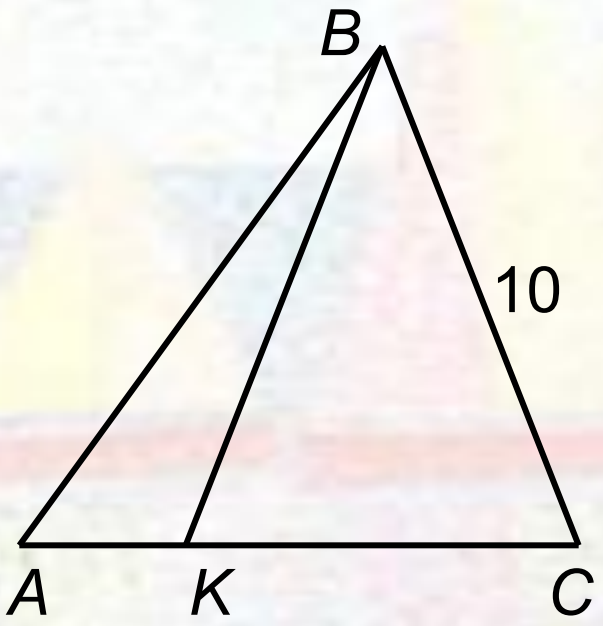
14 задача

Площади двух подобных треугольников равны 16 см^2 и 25 см^2.

Одна из сторон первого треугольника равна 2 см.

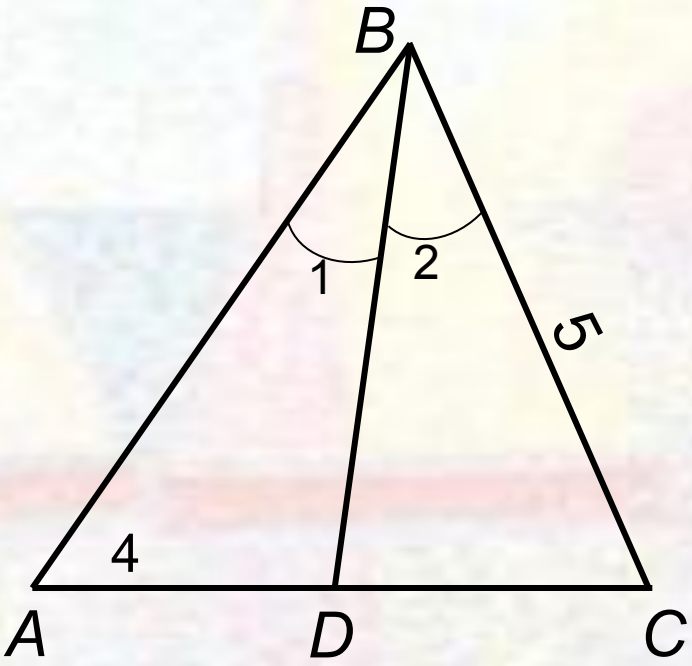
Найдите сходственную ей сторону второго треугольника.

3 задача



В треугольнике *ABC* точка *K* лежит на стороне *AC*. Площади треугольников *ABK* и *KBC* относятся как 1 : 3, *BC* = 10 см. Найдите *AC* , если $\frac{BC}{AC} = \frac{AK}{KC}$

6 задача



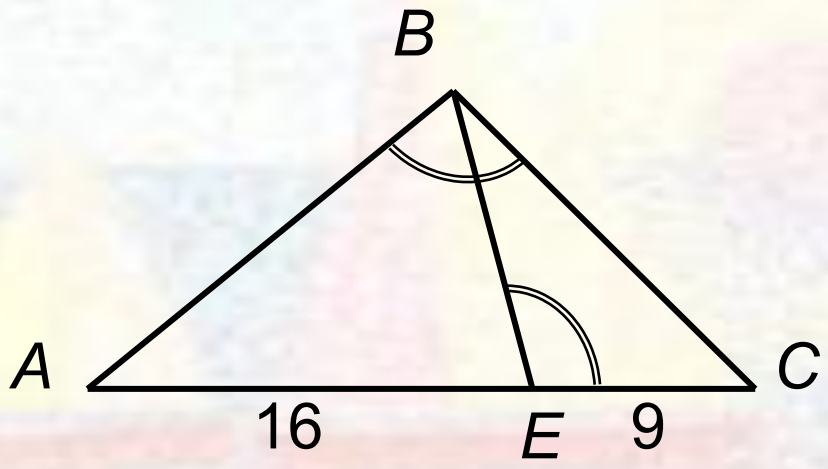
$AD = 4$

$BC = 5$

$AB + DC = 12$

Найти AB, DC, AC

9 задача



На рисунке

$\Delta BEC \sim \Delta ABC$,

$AE = 16$ см,

$CE = 9$ см. Углы

ABC и BEC тупые.

Найдите BC.

12 задача

Масштаб плана 1 : 1000.

Какова длина ограды участка,

если на плане размеры

прямоугольника,

изображающего участок 2 см х 5 см.

15 задача

Периметры подобных треугольников относятся как 2 : 3, сумма их площадей равна 260 см^2. Найдите площадь каждого треугольника.

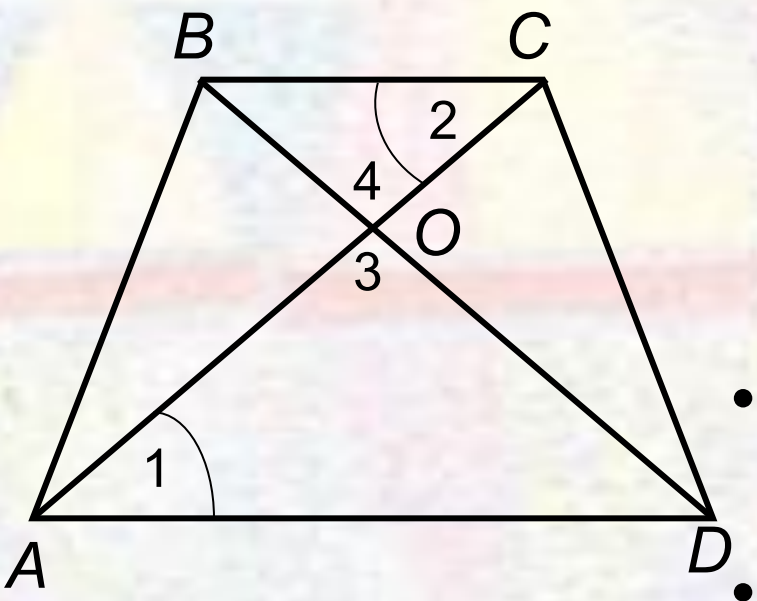
ЗАДАЧИ

1.

Диагонали трапеции *ABCD* пересекаются в точке *O*. Площади треугольников *BOC* и *AOD* относятся как 1 : 9. Сумма оснований *BC* и *AD* равна 4,8 см. Найдите основания трапеции.

Решение:

Решение



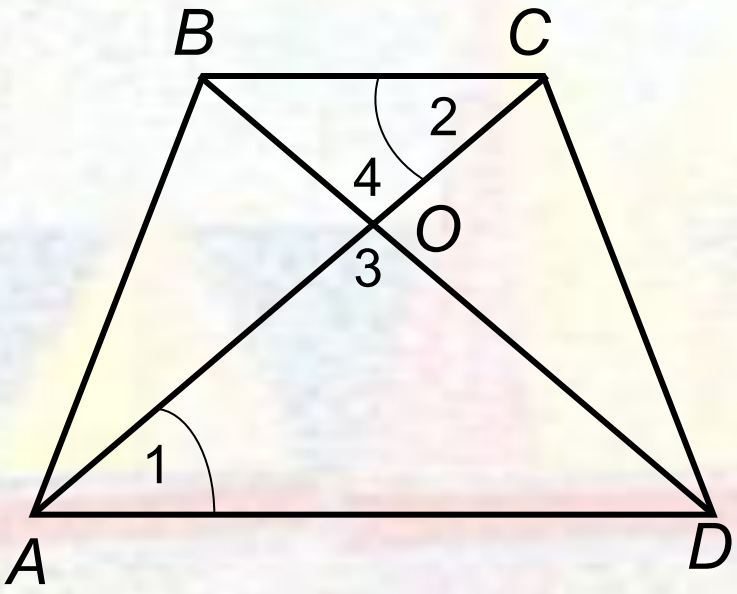
- Рассмотрим ΔAOD и ΔBOC:

$\angle 1 = \angle 2$ (накрест лежащие при $AD \parallel BC$, и секущей AC;

$\angle 3 = \angle 4$ (вертикальные)

- $\Delta AOD \sim \Delta BOC$ (по двум углам)
- $$\frac{AO}{OC} = \frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC} = k$$

Решение



- $\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta BOC}} = k^2 = \frac{9}{1}$.

  k = 3

- $AD + BC =$

  $= 3BC + BC = 4BC$

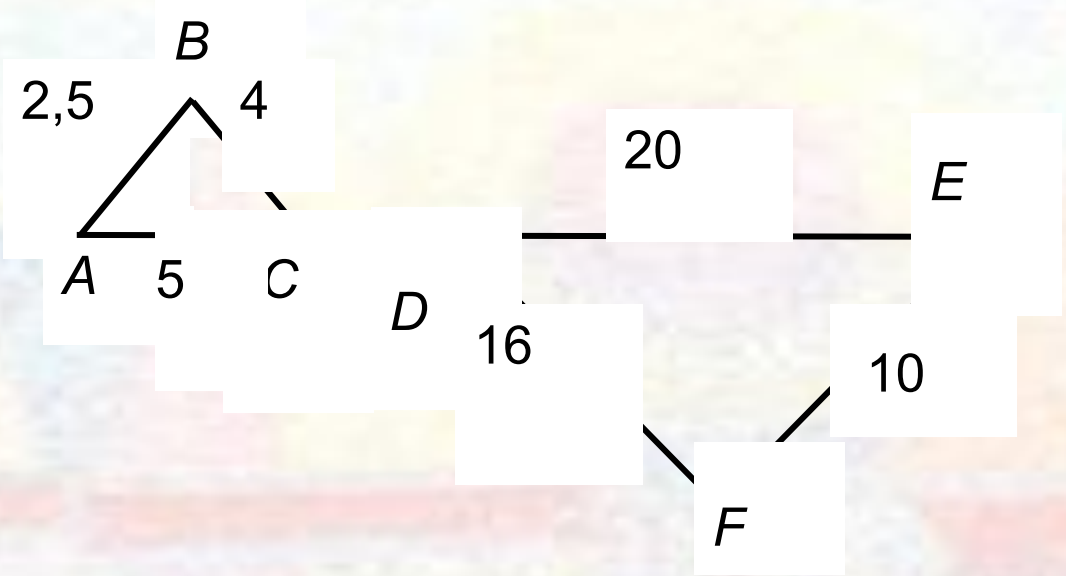
  $AD + BC = 4{,}8$см

  (по условию)

- $BC = 1{,}2$ см
- $AD = 3{,}6$ см

Ответ: $BC = 1{,}2$ см $AD = 3{,}6$ см

ЗАДАЧИ

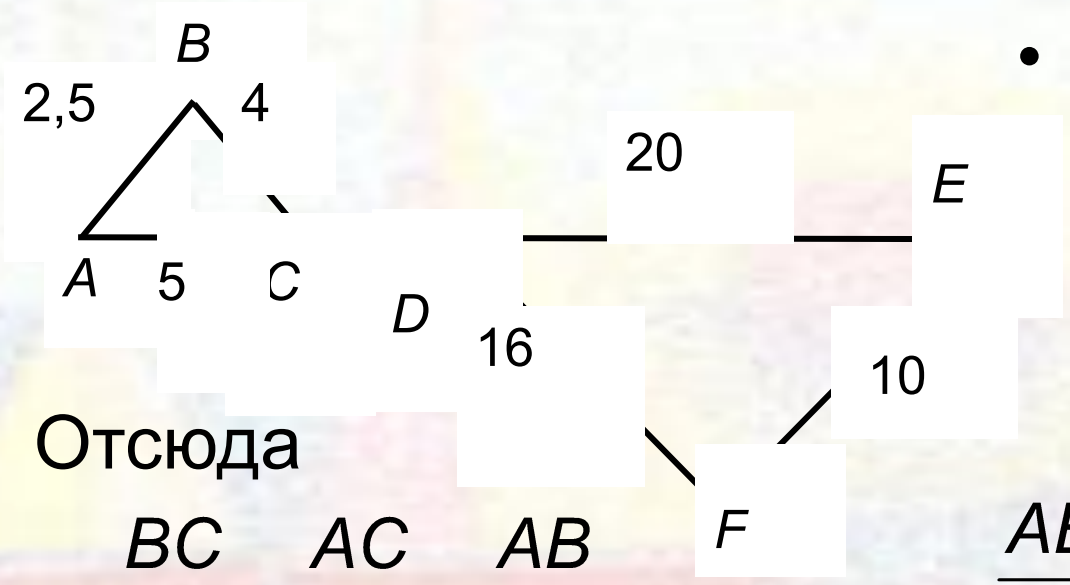


2.

Докажите, что треугольники, изображенные на рисунке, подобны, и выясните взаимное положение прямых *CB* и *DF*.

Решение:

Решение



- Найдем отношение сходственных сторон данных треугольников

$$\frac{AB}{EF} = \frac{2,5}{10} = 0,25$$

$$\frac{AC}{ED} = \frac{5}{20} = 0,25$$

$$\frac{BC}{DF} = \frac{4}{16} = 0,25$$

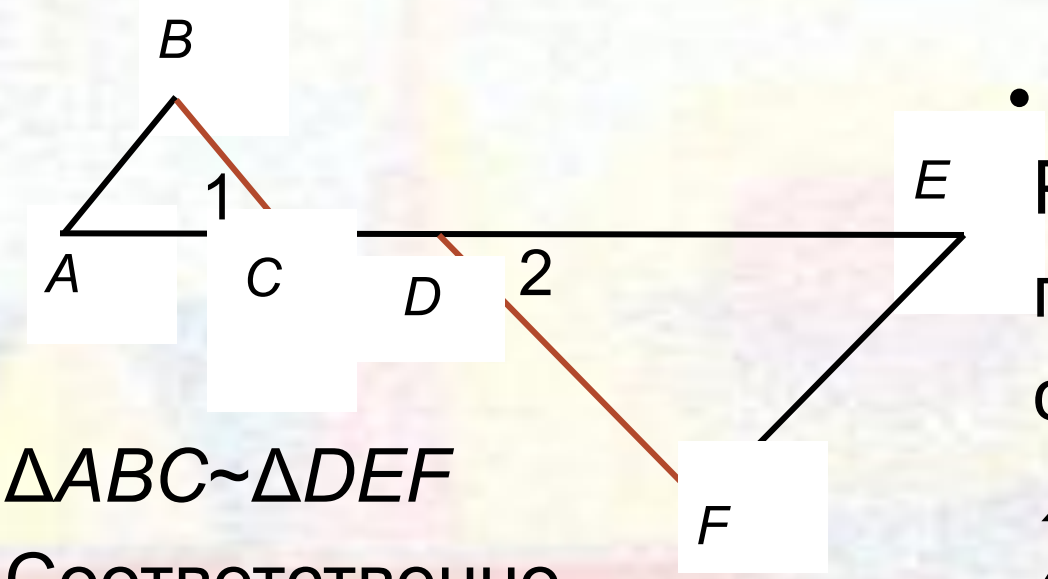
- Отсюда

$$\frac{BC}{DF} = \frac{AC}{DE} = \frac{AB}{EF}$$

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

по трем пропорциональным сторонам

Решение



$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Соответственно

$\angle A = \angle E$

$\angle B = \angle F$

$\angle ACB = \angle EDF$

- Рассмотрим прямые *BC* и *DF*, секущую *AE*

$\angle 1 = \angle 2$

(внешние накрест лежащие)

$BC \parallel DF.$

ЗАДАЧИ

3.

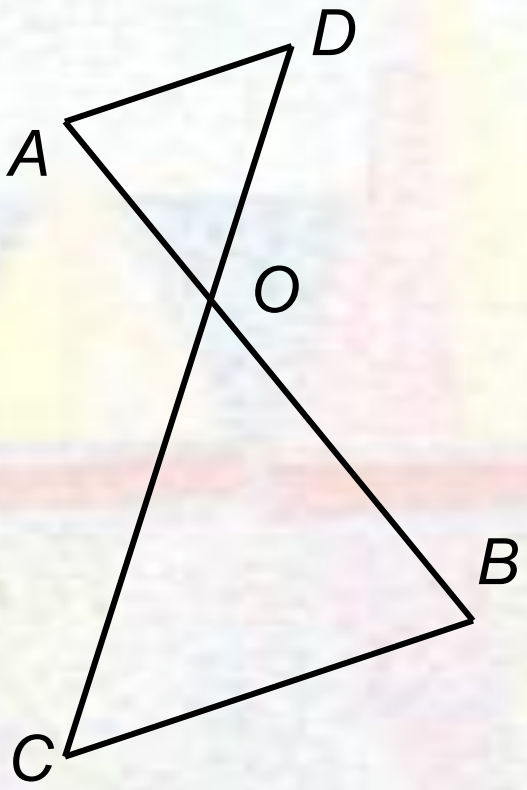
Отрезки *AB* и *CD* пересекаются

в точке *O*, причем $\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC}$.

Докажите, что $\angle CBO = \angle DAO$.

Решение:

Решение



- Рассмотрим ΔAOD и ΔCOB
- $\angle DOA = \angle COB$ (вертикальные).
- $$\frac{AO}{OB} = \frac{DO}{OC}.$$
- $\Delta AOD \sim \Delta COB$ по углу и двум пропорциональным сторонам.
- $\angle CBO = \angle DAO$ *(из подобия)*.

ЗАДАЧИ

4. В треугольнике ABC

$AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 7$.

Точка E лежит на стороне AB.

Внутри треугольника взята точка M так,

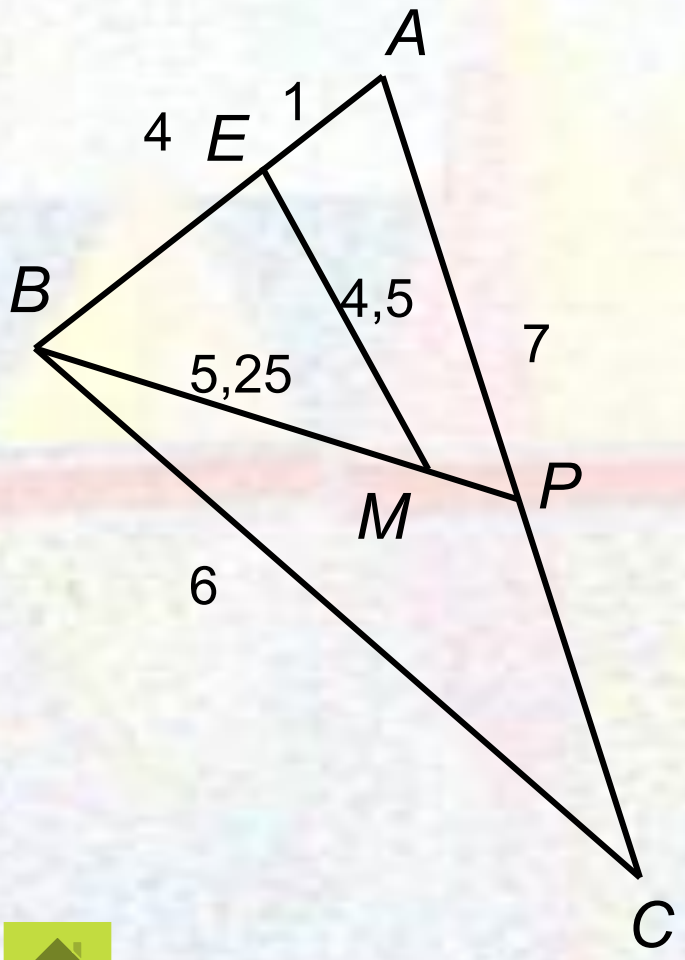
что $MB = 5{,}25$, $ME = 4{,}5$, $AE = 1$.

Прямая BM пересекает AC в точке P.

Докажите, что ΔAPB равнобедренный.

Решение:

Решение



- .

Рассмотрим ΔBEM и ΔABC

$BE = AB - AE = 4 - 1 = 3$

$BE : AB = 3 : 4 = 0,75$

$EM : BC = 4,5 : 6 = 0,75$

$BM : AC = 5,25 : 7 = 0,75$,

т.е. стороны треугольников пропорциональны

Решение

- $\Delta BEM \sim \Delta ABC$ по трем пропорциональным сторонам. Следовательно, $\angle BME = \angle ACB$

  $\angle EBM = \angle BAC$

  $\angle BEM = \angle ABC$.

- Рассмотрим треугольник ABP: $\angle EBM = \angle BAC$, т.е. $\angle ABP = \angle BAP$.

  ΔABP – равнобедренный, что и требовалось доказать.

ЗАДАЧИ

5.

Диагональ *AC* параллелограмма *ABCD* равна 90.

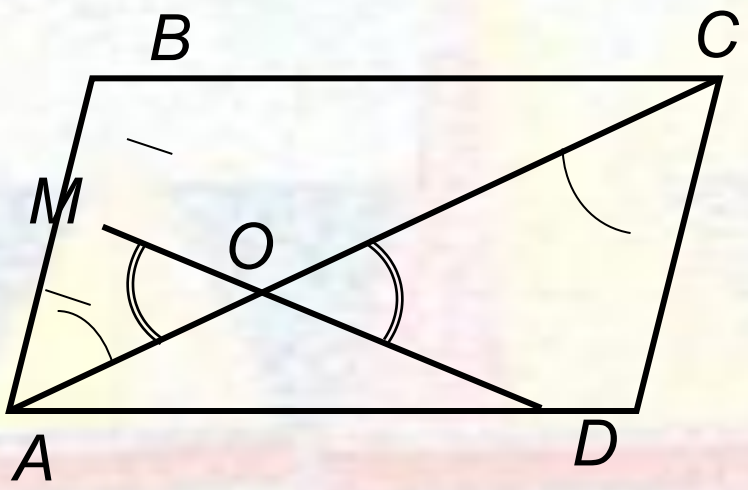
Середина *M* стороны *AB* соединена с вершиной *D.*

Отрезок *MD* пересекает *AC* в точке *O*.

Найдите отрезки *AO* и *CO*.

Решение:

Решение



- Рассмотрим

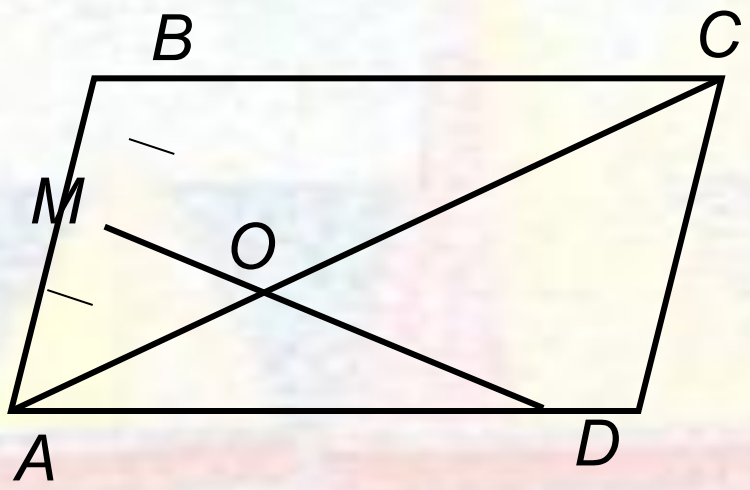
ΔAOM и ΔCOD

$\angle AOM = \angle COD$ (вертикальные),

$\angle MAO = \angle OCD$ (накрест лежащие при $AB \parallel DC$ и секущей AC).

Отсюда $\Delta AOM \sim \Delta COD$ по двум углам.

Решение



- .

$AM = ½\ AB$ (по условию)

$AB = CD$ ($ABCD$ - параллелограмм),

$AM : CD = 1 : 2$

- $\Delta AOM \sim \Delta COD$

$$\frac{AO}{OC} = \frac{OM}{OD} = \frac{AM}{CD} = \frac{1}{2}$$

т.е. $AO = 0{,}5CO$

- $AO = ⅓AC = ⅓\cdot 90 = 30$

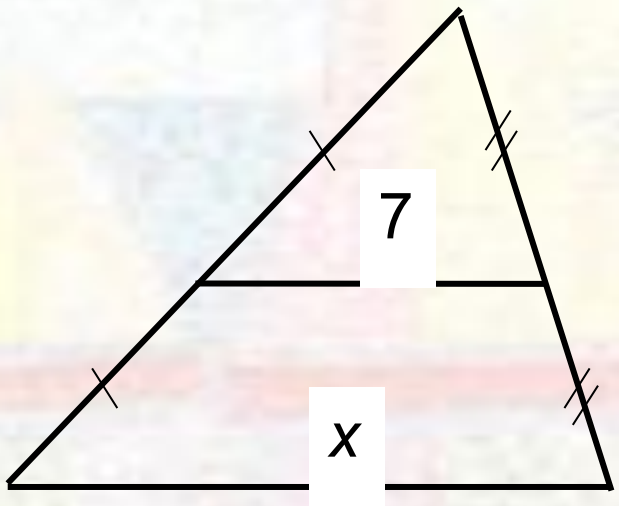
  $CO = ⅔AC = ⅔\cdot 90 = 60$

ТЕСТ

Решите задачи, отметьте нужные ячейки

	А	Б	В	Г
1				
2				
3				
4				
5				

ТЕСТ



1. По данным рисунка *x* равен

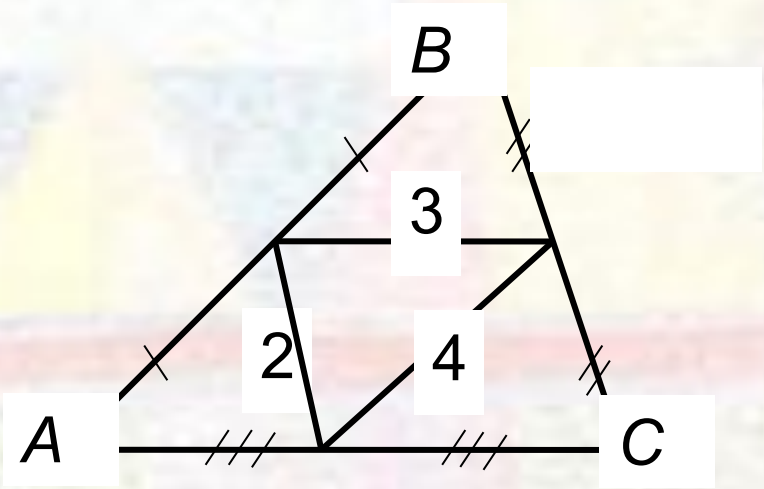
А) 7

Б) 14

В) 3,5

Г) 14/3

ТЕСТ



2) По данным рисунка периметр Δ*ABC* равен

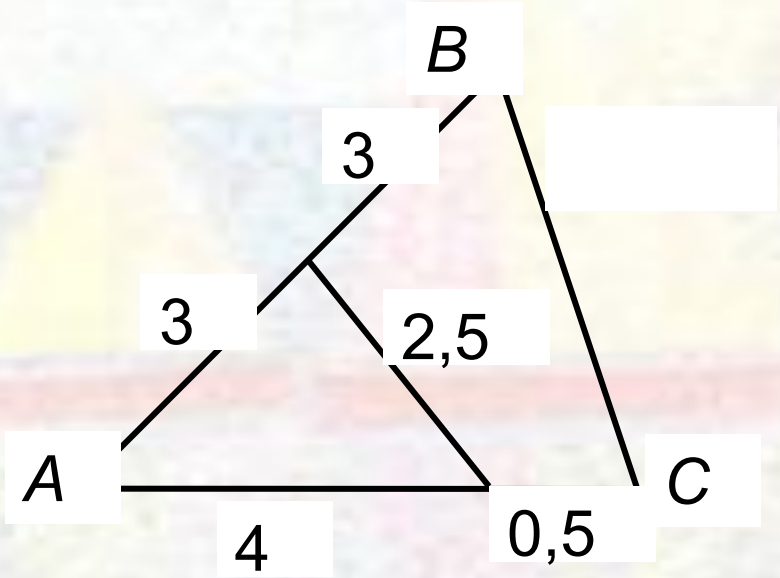
А) 9

Б) 27

В) 36

Г) 18

ТЕСТ



3) По данным рисунка отрезок *BC* равен

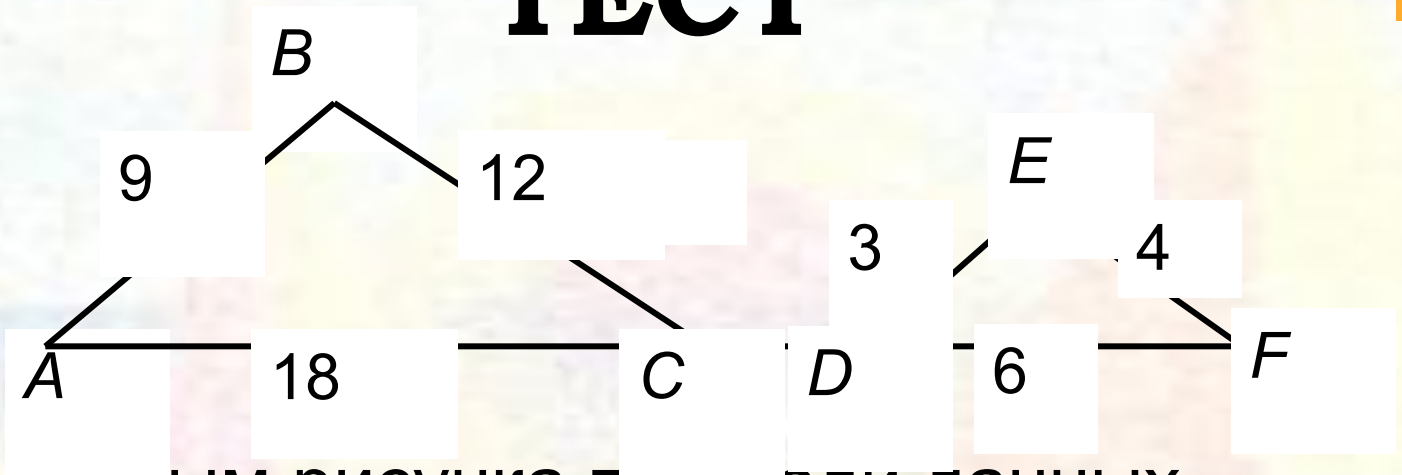
А) 3,75

Б) 7,5

В) 5

Г) 4,5

ТЕСТ



4) По данным рисунка площади данных треугольников относятся

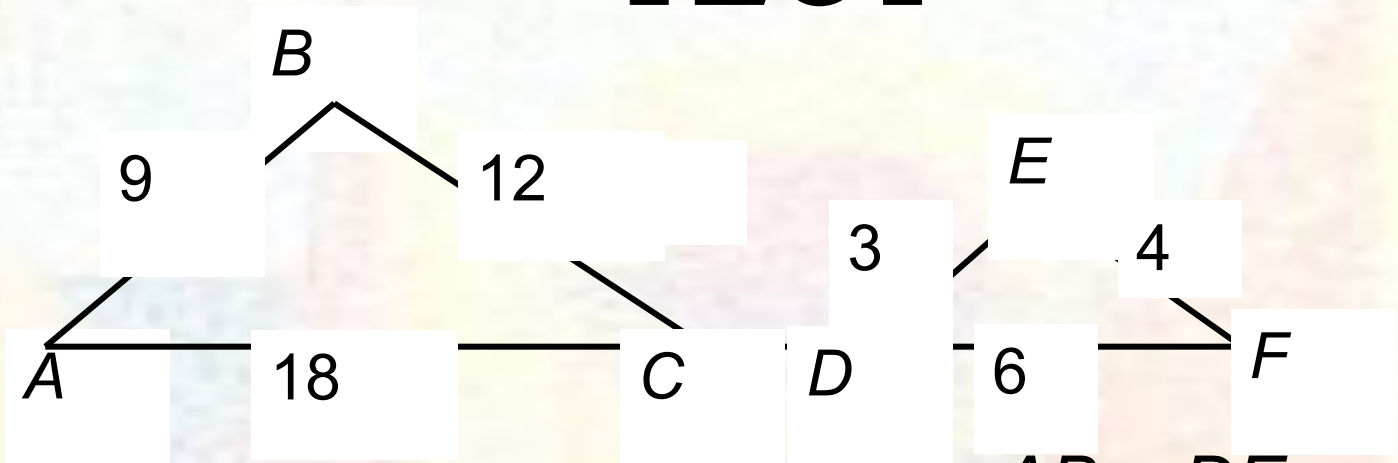
А) 3 : 1

Б) 9 : 1

В) 6 : 1

Г) 9 : 4

ТЕСТ



5) По данным рисунка прямые *AB* и *DE*

А) нельзя ответить

Б) пересекаются

В) параллельны

ТЕСТ

ОТВЕТЫ:

	А	Б	В	Г
1		✦		
2				✦
3	✦			
4		✦		
5			✦	