Теория вероятностей. Подготовка к ЕГЭ

Основные понятия

- ***Случайным*** называется событие, которое нельзя точно предсказать заранее. Оно может либо произойти, либо нет.
- ***Испытанием*** называют такое действие, которое может привести к одному из нескольких результатов.

Достоверным событием называется событие, которое обязательно произойдет в результате испытания (извлечение белого шарика из ящика с белыми шарами).

Невозможным считается событие, которое не может произойти в результате данного испытания (извлечение черного шарика из ящика с белыми шарами).

Случайные события

Событие **А** называется **благоприятствующим** событию **В** , если появление события А влечет за собой появление события В.

События **А и В** называются **несовместными**, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого (испытание: стрельба по мишени ; А-выбивание четного числа очков; В- не четного).

События **А и В** называются **совместным**, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого(А- в аудиторию вошел учитель; В- вошел студент).

Два события **A** и $\overline{A}$ называются **противоположными**, если не появление одного из них в результате испытания влечет появление другого ($\overline{A}$ отрицание А).

Если группа событий такова, что в результате испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них и любые два из них несовместны, то эта группа событий называется **полной группой событий.**

События **называются равновозможными** , если по условию испытания нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое (**А**-орел; **В**-решка).

Размещения

Размещением из n элементов по m называется любое упорядоченное подмножество из m элементов множества, состоящего из n различных элементов

Теорема: число размещений из n по m равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример.

В классе 20 человек. Сколькими способами можно выбрать 2 человека для конкурса.

Решение:

Общее количество элементов $m = 20$,

количество отбираемых элементов $n = 2$.

Порядок не важен.

Используя формулу получим число выборов:

$$A_{20}^{2} = \frac{20!}{(20-2)!} = 18! \cdot 19 \cdot 20 : 18! = 380$$

Ответ: 380

1) В журнале 10 страниц , необходимо на страницах поместить 4 фотографии. Сколькими способами это можно сделать , если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии ?

$$A_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040_{сп}$$

2) Сколько можно записать четырехзначных чисел , используя без повторения все десять цифр?

$$A_{10}^{4} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040_{сп}$$

$$A_{9}^{3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504_{сп}$$

$$Ответ: 5040 - 504 = 4536_{способов}$$

Перестановки

Перестановкой из n элементов называется любое упорядоченное множество, в которое входят по одному разу все n различных элементов данного множества

Теорема: Число перестановок n различных элементов равно n!

$$P_n = n!$$

1) Записать все возможные перестановки для чисел 3,5,7

3,5,7 ; 3,7,5 ; 5,3,7 ; 5,7,3 ; 7,3,5 ; 7,5,3

2) Сколькими способами можно расставить девять различных книг на полке, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?

$$P_6 = 6! = 720 \qquad P_4 = 4! = 24$$

$$P_6 \cdot P_4 = 720 \cdot 24 = 17280$$

Сочетания

Сочетанием из n элементов по m называется любое подмножество из m элементов, которые принадлежат множеству, состоящему из n различных элементов

Теорема: Число сочетаний из n по m равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Следствие: Число сочетаний из n элементов по n-m равно числу сочетаний из n элементов по m

$$C_n^{m-n} = C_n^m$$

Пример

Имеется стопка из 25 книг. Сколькими способами можно выбрать 3 книги.

Решение

Общее количество элементов $m = 25$,

количество отбираемых элементов $n = 3$.

Порядок не важен, выборки отличаются только составом книг.

Используя формулу получим число выборок:

$$C_{25}^{3} = 2300$$

Ответ:2300

1) Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров , что бы среди них были 3 черных ?

Решение: среди выбранных шаров 4 белых и 3 черных.

$$C_{10}^{4}=\frac{10!}{4!\cdot 6!}=210$$ Способов выбора былых шаров

$$C_{5}^{3}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$$ Способов выбора черных шаров

По правилу умножения искомое число способов равно $C_{10}^{4}\cdot C_{5}^{3}=2100$

2) Сколькими способами можно группу из 12 человек разбить на две подгруппы, в одной из которых должно быть не более 5 , а во второй- не более 9 человек ?

$$C_{12}^{3}=220$$ Подгруппа из 3 человек

$$C_{12}^{4}=495$$ Подгруппа из 4 человек

$$C_{12}^{5}=792$$ Подгруппа из 5 человек

Выбор первой подгруппы однозначно определяет вторую, по правилу сложения искомое число способов равно: $C_{12}^{3}+C_{12}^{4}+C_{12}^{5}=1507$

Пример:

1. *В самоуправлении из* 25 *человек нужно выбрать начальника, секретаря и кассира. Сколькими различными способами это можно сделать?*
Решение:
Из 25 *человек нужно выбрать троих.*
Порядок элементов важен, т.к. поменяв местами людей, обязанности их изменятся.
Значит, нужно вычислить число размещений из 25 *элементов по* 3*.*

$$A_{25}^{3}=\frac{25!}{(25-3)!}=\frac{25!}{22!}=\frac{\cancel{22!}\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{\cancel{22!}}=23\cdot 24\cdot 25=13\,800 \text{ (способов).}$$

2. *В самоуправлении из* 25 *человек нужно выбрать* 3 *человека для комиссии. Сколькими различными способами это можно сделать?*
Решение:
На этот раз порядок людей неважен, поэтому необходимо вычислить число сочетаний из 25 *элементов по* 3*:*

$$C_{25}^{3}=\frac{25!}{3!\cdot(25-3)!}=\frac{25!}{3!\cdot 22!}=\frac{\cancel{22!}\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{3!\cdot\cancel{22!}}=\frac{23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{13800}{6}=2\,300 \text{ (способов).}$$

Обрати внимание!

Количество сочетаний меньше количества размещений.

Определение вероятности

Вероятностью события А называют отношение числа **m** благоприятствующих этому событию исходов к общему числу **n** всех равновозможных несовместимых событий, которые могут произойти в результате одного испытания или наблюдения:

$$P = \frac{m}{n}$$

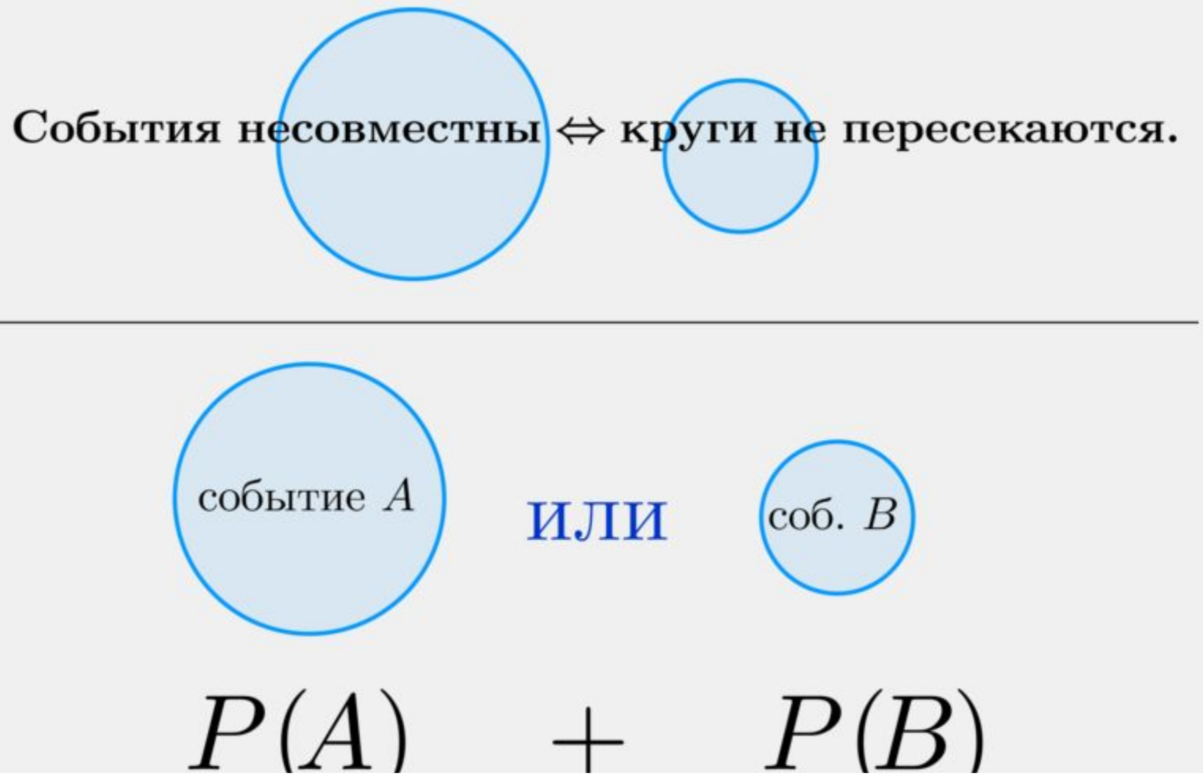
Пусть **k** – количество бросков монеты, тогда количество всевозможных исходов: $n = 2^k$.

Пусть **k** – количество бросков кубика, тогда количество всевозможных исходов: $n = 6^k$.

Задачи на сумму вероятностей несовместных событий

► Если для выполнения события C необходимо выполнение хотя бы одного из двух несовместных (которые не могут произойти одновременно) событий A и B ($C = \{A \text{ или } B\}$), то вероятность события C равна сумме вероятностей событий A и B.

► Каждое событие можно обозначить в виде круга. Тогда если события несовместны, то круги не должны пересекаться. Вероятность события C – это вероятность попасть в один из кругов.



Сложение вероятностей

- Вероятность появления одного из двух **несовместных** событий, равна **сумме** вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

- Пример

- В ящике лежат 10 шаров: 4 красных, 1 синий и 5 черных. Наугад выбирается один шар. Какова вероятность того, что шар красный или синий.

- Пусть событие А - выбран красный шар.
  - $P(A)=4:10=0,4$
- Событие В - выбран синий шар.
  - $P(B)=1:10=0,1$
- Тогда вероятность того, что выбранный шар красный или синий равна
  - $P(A+B)=0,4+0,1=0.5$

Пример

В денежно-вещевой лотерее на 100000 билетов разыгрывается 1200 вещевых и 800 денежных выигрышей. Какова вероятность какого-либо выигрыша?

- Событие А – вещевой выигрыш, В – денежный выигрыш, так как события несовместны Р= Р(А)+Р(В)
- Р(А)= 1200/100000=0,012
- Р(В)=800/100000=0,008
- Р= 0,012+0,008=0,02

В коробке лежат 4 синих, 7 красных, 6 зеленых и 3 желтых карандаша. Миша наугад достает один карандаш. Какова вероятность того, что этот карандаш синий или красный?

- Так как вероятности выбора любого карандаша из данного множества одинаковы, то искомая вероятность есть просто отношение суммарного количества синих и красных карандашей к общему количеству карандашей в коробке. Вероятность того, что наугад взятый карандаш окажется синим или красным равна

$$\frac{7+4}{7+4+6+3} = 0,55.$$