

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Школа №80»

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА ПО
МАТЕМАТИКЕ НА ТЕМУ:
**«10 СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ
КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ»**

Выполнила:
Ученик
Огнев Давид

.

Г. Новосибирск

2022 г.

Содержание проекта:

- Введение;
- Объект исследования;
- Предмет исследования;
- Задачи;
- Гипотезы;
- Основная часть;
- Заключение;

-

Введение:

Квадратные уравнения изучают в 8 классе. Актуальность этой темы выражена в том, что квадратные уравнения - это базовая тема школьного курса математики. Умение решать их нам пригодятся всегда, и особенно, при подготовке к ГИА и ЕГЭ, а так же к решению квадратных уравнений сводятся решения дробно-рациональных уравнений и текстовых задач в основной школе, показательных, тригонометрических и логарифмических уравнений в средней школе. В учебниках по алгебре в курсе школьной программы рассматриваются только два способа решения квадратных уравнений. Однако имеются и другие приёмы решения квадратных уравнений, которые позволяют очень быстро и рационально решать уравнения. Данные приёмы заслуживают особого внимания, поскольку они не отражены в школьных учебниках математики. Овладение данными приёмами поможет мне в экономии времени и повышении качества выполнения заданий ОГЭ.

Объект исследования: квадратные уравнения.

Предмет исследования: способы решения квадратных уравнений.

Цель исследования: выявить способы решения квадратных уравнения и рассмотреть применение данных способов на конкретных примерах.

Задача: описать технологии различных существующих способов решения квадратных уравнений;

Гипотеза: любое квадратное уравнение можно решить всеми способами.



1. СПОСОБ: Разложение левой части уравнения на множители.

Решим уравнение

$$x^2 + 10x - 24 = 0.$$

Разложим левую часть на множители:

$$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2).$$

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x + 12)(x - 2) = 0$$

Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается нуль при $x = 2$, а также при $x = -12$. Это означает, что число 2 и -12 являются корнями уравнения $x^2 + 10x - 24 = 0$.

2. СПОСОБ: Метод выделения полного квадрата.

Решим уравнение

$$x^2 + 6x - 7 = 0.$$

Выделим в левой части полный квадрат.

Для этого запишем выражение $x^2 + 6x$ в следующем виде:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3.$$

В полученном выражении первое слагаемое - квадрат числа x , а второе - удвоенное произведение x на 3 . По этому чтобы получить полный квадрат,

нужно прибавить 3^2 , так как

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2.$$

Преобразуем теперь левую часть уравнения

$$x^2 + 6x - 7 = 0,$$

прибавляя к ней и вычитая 3^2 . Имеем:

$$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 7 = (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16.$$

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$$(x + 3)^2 - 16 = 0, (x + 3)^2 = 16.$$

Следовательно, $x + 3 - 4 = 0$, $x_1 = 1$, или $x + 3 = -4$, $x_2 = -7$.

3. СПОСОБ: Решение квадратных уравнений по формуле.

Умножим обе части уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

на $4a$ и последовательно имеем:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$((2ax)^2 + 2ax \cdot b + b^2) - b^2 + 4ac = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Если дискриминант положительный, то уравнение имеет два различных корня.

Если дискриминант равен нулю, то уравнение

имеет единственный корень.

Если дискриминант отрицателен, то уравнение не имеет корней.

4. СПОСОБ: Решение уравнений с использованием теоремы Виета.

Приведенное квадратное уравнение имеет вид $x^2 + px + c = 0$.

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при $a = 1$ имеет вид

$$x_1 x_2 = q,$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

Можно сделать следующие выводы (по коэффициентам p и q можно предсказать знаки).

а) Если свободный член q приведенного уравнения положителен ($q > 0$), то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависит от второго коэффициента p . Если $p > 0$, то оба корня отрицательны, если $p < 0$, то оба корня положительны.

$$x^2 - 3x + 2 = 0; x_1 = 2 \text{ и } x_2 = 1, \text{ так как } q = 2 > 0 \text{ и } p = -3 < 0;$$

б) Если свободный член q приведенного уравнения (1) отрицателен ($q < 0$), то уравнение имеет два различных по знаку корня, причем больший по модулю корень будет положителен, если $p < 0$, или отрицателен, если $p > 0$.

$$x^2 + 4x - 5 = 0; x_1 = -5 \text{ и } x_2 = 1, \text{ так как } q = -5 < 0 \text{ и } p = 4 > 0.$$

5. СПОСОБ: Решение уравнений способом «переброски».

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Умножая обе его части на a , получаем уравнение $a^2x^2 + abx + ac = 0$.

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению $y^2 + by + ac = 0$,

равносильно данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета. Окончательно получаем $x_1 = y_1/a$ и

$$x_1 = y_2/a.$$

$$2x^2 - 11x + 15 = 0.$$

«Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение $y^2 - 11y + 30 = 0$.

Согласно теореме Виета

$$y_1 = 5 \quad x_1 = 5/2 \quad x_1 = 2,5 \quad y_2 = 6 \quad x_2 = 6/2 \quad x_2 = 3.$$

Ответ: 2,5; 3.

При этом способе коэффициент a умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют *способом «переброски»*.

6. СПОСОБ: Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

Пусть дано квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

1) Если, $a + b + c = 0$, то

$$x_1 = 1,$$

$$x_2 = c/a.$$

2) Если $a + c = b$, то

$$x_1 = -1,$$

$$x_2 = -c/a.$$



7. СПОСОБ: Графическое решение квадратного уравнения.

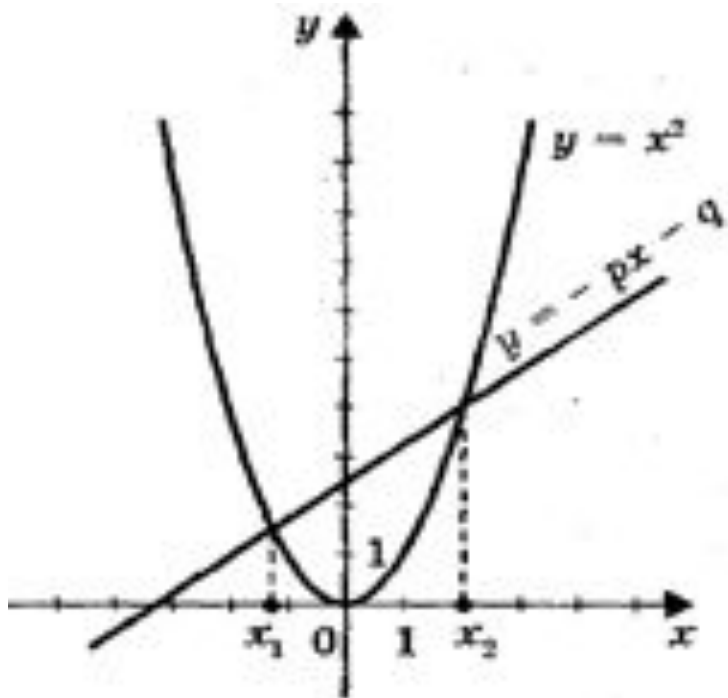


Рис. 1

Если в уравнении

$$x^2 + px + q = 0$$

перенести второй и третий члены в правую часть, то получим

$$x^2 = -px - q.$$

Построим графики зависимости

$$y = x^2 \text{ и } y = -px - q.$$

График первой зависимости - парабола, проходящая через начало координат. График второй зависимости - прямая (рис.1). Возможны следующие случаи:

- прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;

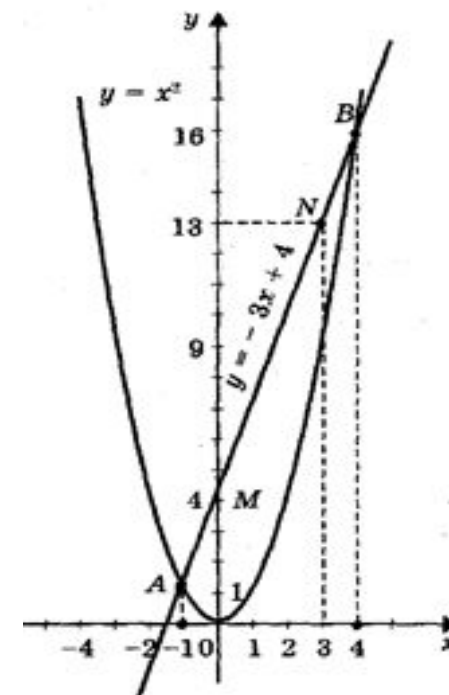


Рис. 2

- прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка), т.е. уравнение имеет одно решение;

- прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.

8. СПОСОБ: Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки

Допустим, что искомая окружность пересекает ось абсцисс в точках $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, и проходит через точки

$A(0; 1)$ и $C(0; c/a)$ на оси ординат. Тогда по теореме о секущих имеем $OB \cdot OD = OA \cdot OC$, откуда $OC = OB \cdot OD / OA = x_1 x_2 / 1 = c/a$.

Центр окружности находится в точке пересечения перпендикуляров SF и SK , восстановленных в

поэтому

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2a},$$

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

$$S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{a + c}{2a}\right)$$

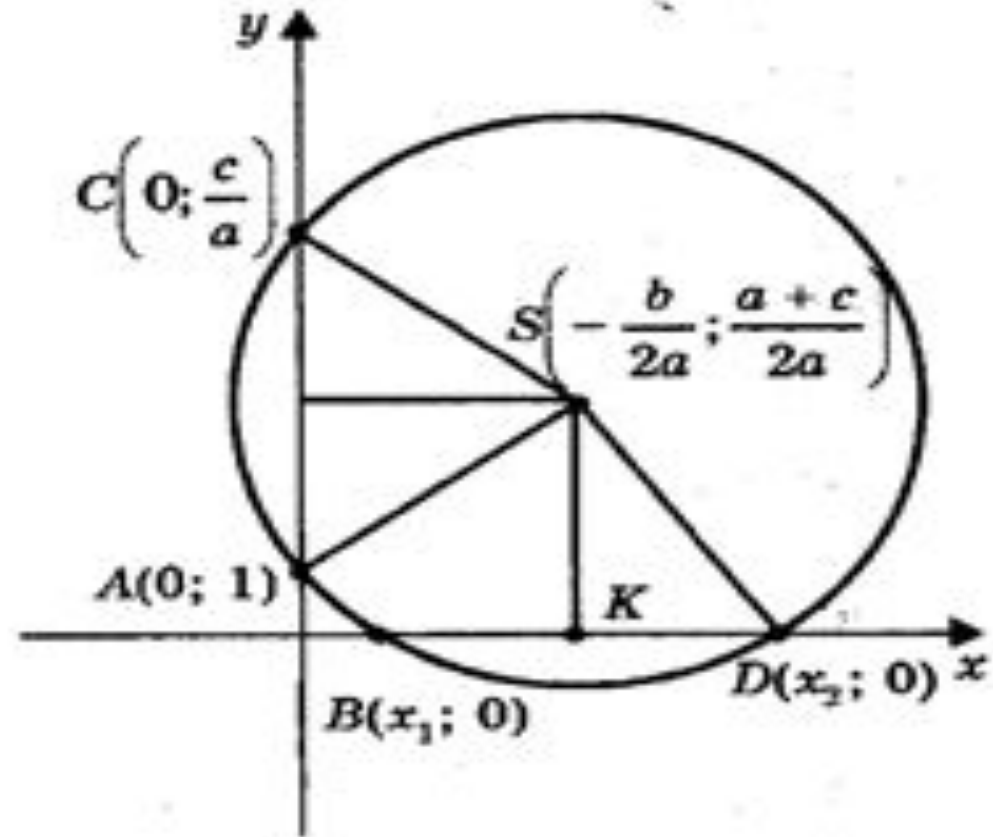


Рис. 5

9 СПОСОБ: Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.

Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$.
Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

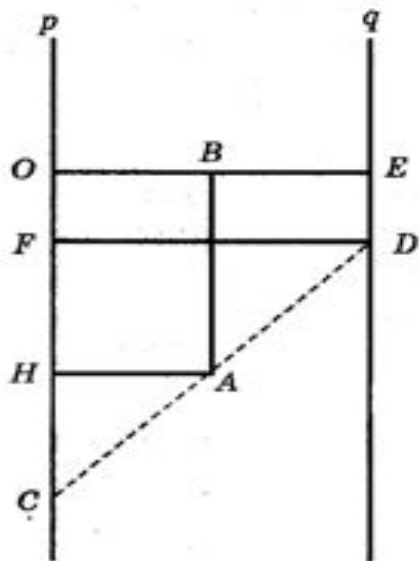


Рис. 11

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам (рис.11):

$$OB = \frac{a}{1+z}, \quad AB = \frac{-z^2}{1+z}.$$

Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$ (все в см.), из подобия треугольников CAH и CDF получим пропорцию

$$\frac{p - q}{p - AB} = \frac{a}{OB},$$

откуда после подстановок и упрощений вытекает уравнение

$$z^2 + pz + q = 0,$$

причем буква z означает метку любой точки криволинейной шкалы.

10 СПОСОБ: Геометрический способ решения квадратных уравнений.

Решим уравнение $x^2 + 10x = 39$.

В оригинале эта задача формулируется следующим образом : «Квадрат и десять корней равны 39» (рис.15).

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной x , на его сторонах строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна $2,5$, следовательно, площадь каждого равна $2,5x$. Полученную фигуру дополняют затем до нового квадрата $ABCD$, достраивая в углах четыре равных квадрата, сторона каждого из них $2,5$, а площадь $6,25$.

Площадь S квадрата $ABCD$ можно представить как сумму площадей: первоначального квадрата x^2 , четырех прямоугольников ($4 \cdot 2,5x = 10x$) и четырех пристроенных квадратов ($6,25 \cdot 4 = 25$), т.е. $S = x^2 + 10x + 25$. Заменяя

$x^2 + 10x$ числом 39 , получим, что $S = 39 + 25 = 64$, откуда следует, что сторона квадрата $ABCD$, т.е. отрезок $AB = 8$. Для искомой стороны x первоначального квадрата получим:

$$x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3.$$

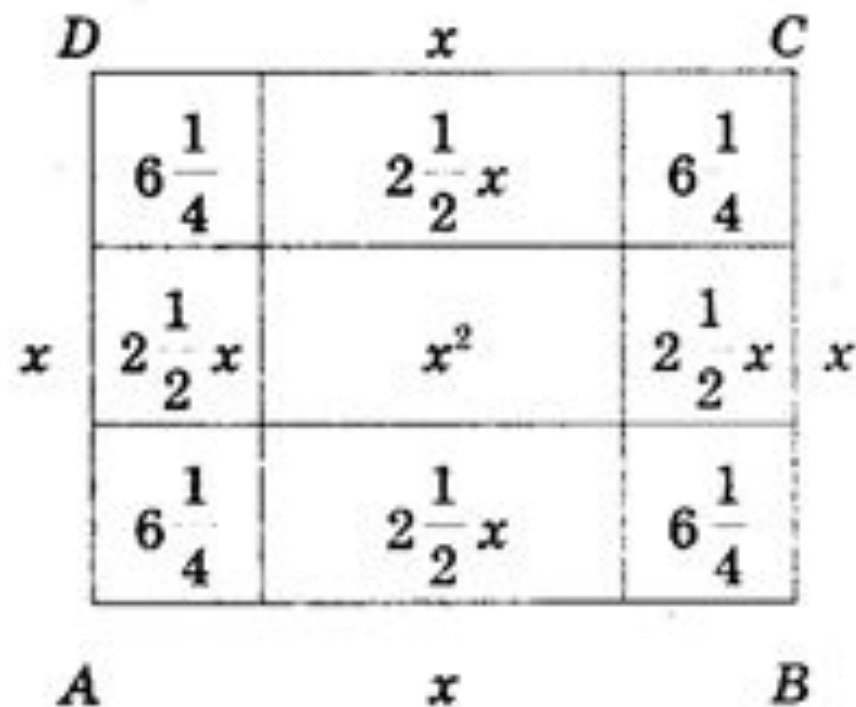


Рис. 15

Заключение

В данной работе рассмотрены способы решения квадратных уравнений.

Данные приёмы решения заслуживают внимания, поскольку некоторые из них не отражены в школьных учебниках математики. Овладение данными приёмами поможет мне экономить время и эффективно решать уравнения.

Таким образом, цель работы - выявить способы решения квадратных уравнения и рассмотреть применение данных способов на конкретных примерах - достигнута, а гипотеза - любое квадратное уравнение можно решить всеми способами - подтверждена.

