10 СПОСОБОВ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Автор проекта:
Ефимов Егор Иванович ученик 9Б класс МАОУ СОШ №10
г. Альметьевска
Руководитель проекта:
Демидова Алёна Николаевна

Цель работы: Изучение 10 способов решения квадратных уравнений.

Задачи:

- \- изучить историю развития квадратных уравнений;
- \- рассмотреть стандартные и нестандартные методы решения квадратных уравнений;
- \- выявить наиболее удобные способы решения квадратных уравнений;
- \- научиться решать квадратные уравнения различными способами.

Гипотеза: любое квадратное уравнение можно решить всеми существующими способами.

Объект исследования: квадратные уравнения.

Предмет исследования: способы решения уравнений второй степени.

1 способ: Разложение левой части уравнения на множители.

Решим уравнение $x^2 + 10x - 24 = 0$. Разложим левую часть на множители:

$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2)$.

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$(x + 12)(x - 2) = 0$

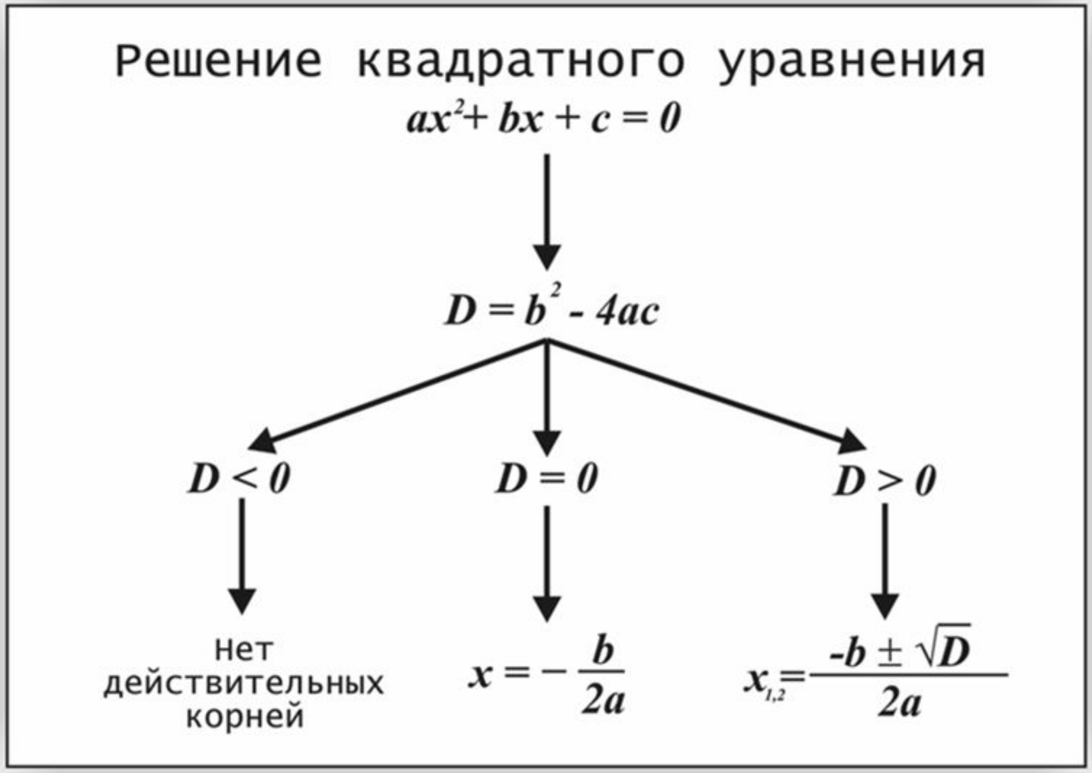
Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается нуль при $x = 2$, а также при $x = - 12$. Это означает, что число 2 и $- 12$ являются корнями уравнения $x^2 + 10x - 24 = 0$.

2 СПОСОБ: *Метод выделения полного квадрата.*

Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$. Выделим в левой части полный квадрат.
Для этого запишем выражение $x^2 + 6x$ в следующем виде:

$x^2 + 6x = x^2 + 2\,x\ \ 3.$
В полученном выражении первое слагаемое - квадрат числа x, а второе - удвоенное произведение x на 3. По этому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 3^2, так как
$x^2 + 2\,x\ \ 3 + 3^2 = (x + 3)^2.$
Преобразуем теперь левую часть уравнения
$x^2 + 6x - 7 = 0,$
прибавляя к ней и вычитая 3^2. Имеем:
$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2\,x\ \ 3 + 3^2 - 3^2 - 7 = (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16.$
Таким образом, данное уравнение можно записать так:
$(x + 3)^2 - 16 = 0,\ \ (x + 3)^2 = 16.$
Следовательно, $x + 3 - 4 = 0,\ x_1 = 1$, *или* $x + 3 = -4,\ x_2 = -7.$

<u>3 СПОСОБ: . РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕРЕЗ ДИСКРИМИНАНТ</u>



4 СПОСОБ: Решение квадратных уравнений по формуле.

Умножим обе части уравнения

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

на 4а и последовательно имеем:

$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$

$((2ax)^2 + 2ax\ b + b^2) - b^2 + 4ac = 0,$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$

$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$

$2ax = - b \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

5 СПОСОБ: Решение уравнений с использованием теоремы Виета.

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид

$x^2 + px + c = 0.$ (1)

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при $a = 1$ имеет вид

$x_1 x_2 = q,$

$x_1 + x_2 = - p$

Отсюда можно сделать следующие выводы (по коэффициентам p и q можно предсказать знаки корней).

а) Если сводный член q приведенного уравнения (1) положителен ($q > 0$), то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависти от второго коэффициента p. Если $p < 0$, то оба корня отрицательны, если $p < 0$, то оба корня положительны.

б) Если свободный член q приведенного уравнения (1) отрицателен ($q < 0$), то уравнение имеет два различных по знаку корня, причем больший по модулю корень будет положителен, если $p < 0$, или отрицателен, если $p > 0$.

6 СПОСОБ: Решение уравнений способом «переброски».

Рассмотрим квадратное уравнение
$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.
Умножая обе его части на а, получаем уравнение
$a^2x^2 + abx + ac = 0$.

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению
$y^2 + by + ac = 0$,
равносильно данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета.

Окончательно получаем $x_1 = y_1/a$ и $x_1 = y_2/a$. При этом способе коэффициент *а* умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют *способом «переброски»*. Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

7 СПОСОБ: Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

А. Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

1) *Если,* $a + b + c = 0$ *(т.е. сумма коэффициентов равна нулю), то*

$x_1 = 1,$

$x_2 = c/a.$

Доказательство. Разделим обе части уравнения на а ≠ 0, получим приведенное квадратное уравнение

$+ b/a\ \ x + c/a = 0.$

Согласно теореме Виета

$x_1 + x_2 = - b/a,$

$x_1 x_2 = 1\ c/a.$

По условию $a - b + c = 0$, откуда $b = a + c$. Таким образом,

$x_1 + x_2 = - a + b/a = -1 - c/a,$

$x_1 x_2 = - 1\ (- c/a),$

Т.е. $x_1 = -1$ и $x_2 = c/a$, что м требовалось доказать.

7 СПОСОБ: Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

Б. Если второй коэффициент $b = 2k$ – четное число, то формулу корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ıожно записать в виде

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \qquad (2)$$

7 СПОСОБ: Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

В. Приведенное уравнение

$x^2 + px + q = 0$

совпадает с уравнением общего вида, в котором $a = 1$, $b = p$ и $c = q$. Поэтому для приведенного квадратного уравнения фор

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{4a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \text{ или } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \qquad (3)$$

принимает вид:

Формулу (3) особенно удобно использовать, когда p — четное число.

$$\sqrt{49 + 15} = 7 \pm \sqrt{64} = 7 \pm 8.$$

8 СПОСОБ: Графическое решение квадратного уравнения.

Если в уравнении

$x^2 + px + q = 0$

перенести второй и третий члены в правую часть, то получим

$x^2 = - px - q.$

Построим графики зависимости $y = x^2$ и $y = - px - q$.

График первой зависимости - парабола, проходящая через начало координат. График второй зависимости -

прямая (рис.1). Возможны следующие случаи:

- прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;
- прямая и парабола могут касаться (только одна общая точка), т.е. уравнение имеет одно решение;
- прямая и парабола не имеют общих точек, т.е. квадратное уравнение не имеет корней.

8 СПОСОБ: Графическое решение квадратного уравнения. (риснки)

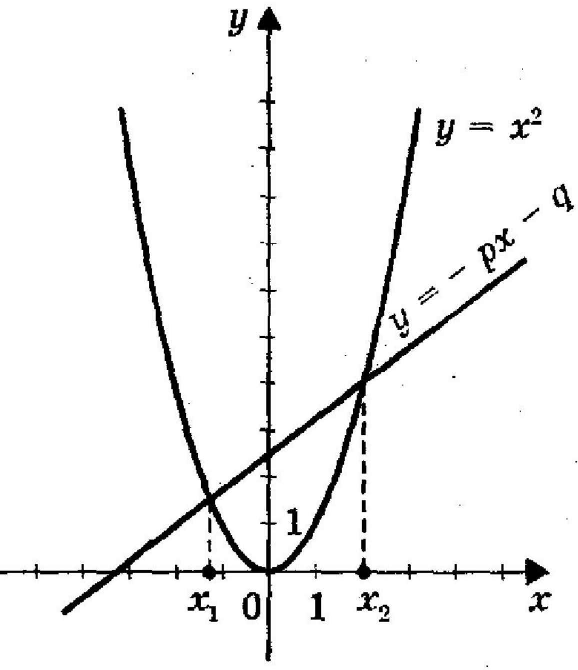


Рис. 1

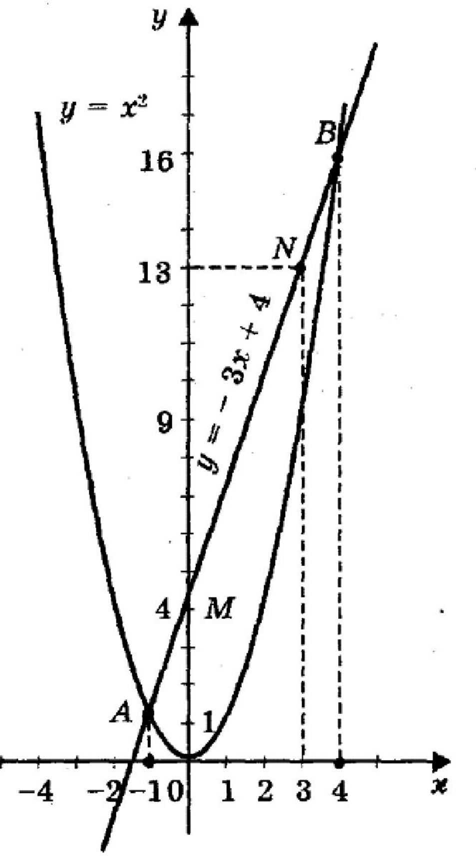


Рис. 2

9 СПОСОБ: Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.

Графический способ решения квадратных уравнений с помощью параболы неудобен. Если строить параболу по точкам, то требуется много времени, и при этом степень точности получаемых результатов невелика.

Предлагаю следующий способ нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с помощью циркуля и линейки (рис. 5).

Допустим, что искомая окружность пересекает ось абсцисс в точках $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, и проходит через точки $A(0; 1)$ и $C(0; c/a)$ на оси ординат. Тогда по теореме о секущих имеем $OB\ OD = OA\ OC$, откуда $OC = OB\ OD/OA = x_1x_2/1 = c/a$.

9 СПОСОБ: Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.

Центр окружности находится в точке пересечения перпендикуляров *SF* и *SK*, восстановленных в серединах хорд *AC* и *BD*, поэтому

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a},$$

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

$$S\left(-\frac{b}{2a}; \frac{a+c}{2a}\right)$$

1) … точки (центр окружности) и *A(0; 1)*;

2) проведем окружность с радиусом *SA*;

3) абсциссы точек пересечения этой окружности с осью *Ox* являются корнями исходного квадратного уравнения.

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a},$$

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

9 СПОСОБ: Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.

При этом возможны три случая.

1) Радиус окружности больше ординаты центра *(AS > SK, или R > a + c/2a)*, окружность пересекает ось Ox в двух точках (рис. 6,а) *B*$(x_1; 0)$ и *D*$(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения *ax* $\left(AS < SB, \text{ или } R < \dfrac{a+c}{2a}\right)$,

2) Радиус окружности равен ординате центра *(AS = SB, или R = a + c/2a)*, окружность касается оси Ox (рис. 6,б) в точке *B* $(x_1; 0)$, где x_1 - корень квадратного уравнения.

3) Радиус окружности меньше ординаты центра

окружность не имеет общих точек с осью абсцисс (рис.6,в), в этом случае уравнение не имеет решения.

9 СПОСОБ: Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.

Рисунки:

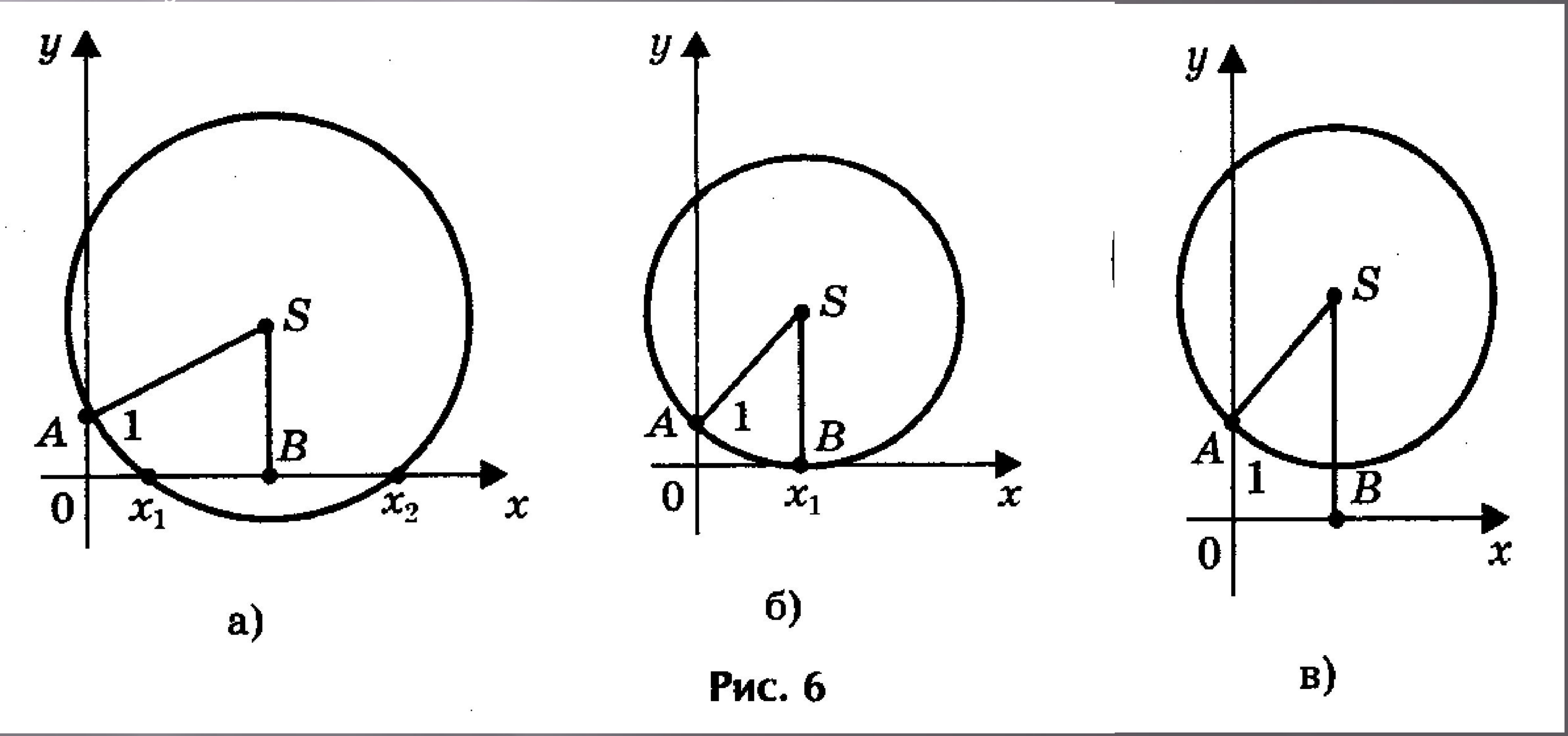


Рис. 6

10. СПОСОБ: Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.

Это старый и незаслуженно забыты способ решения квадратных уравнений,
помещенный на с.83 (см. Брадис В.М. Четырехзначные математические таблицы. - М., Просвещение, 1990).

Таблица XXII. Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$. Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициен-
там определить корни уравнения.

Криволинейная шкала номограммы п
роена
по формулам (рис.12):

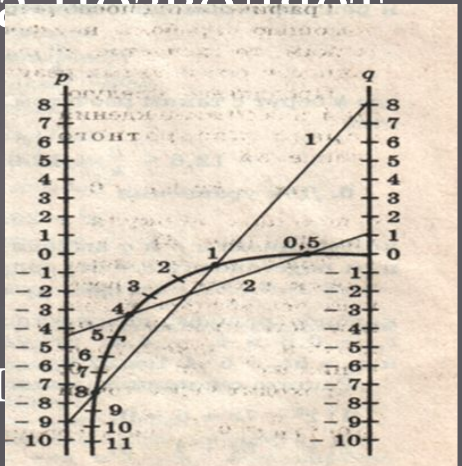


Рис. 12

Литература

- Глейзер, Г.И. История математики в школе/ Г.И. Глейзер.-М.: Просвещение, 1982.
- Гусев, В.А. Математика. Справочные материалы/ В.А. Гусев, А.Г. Мордкович - М.: Просвещение, 1988.
- Брадис, В.М. Четырехзначные математические таблицы для средней школы/ В.М, Брадис-М.: Просвещение, 1990