24.01. Классная работа.

Элементы комбинаторики. Размещения.

Что такое комбинаторика?

- Задачи , решая которые приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число комбинаций , называются **комбинаторными.**
- Раздел математики , в котором рассматриваются подобные задачи, называют **комбинаторикой.**
- Слово «комбинаторика» от латинского combinare - «соединять , сочетать».

Пример 1

Из группы теннисистов, в которую входят четыре человека - Антонов, Григорьев , Сергеев и Федоров, тренер выделяет пару для участия в соревнованиях. Сколько существует вариантов выбора такой пары?

АГ, АС, АФ

ГС, ГФ

СФ

Значит, всего существует шесть вариантов выбора.

Способ рассуждений , которым мы воспользовались , называют **перебором возможных вариантов.**

Пример 2

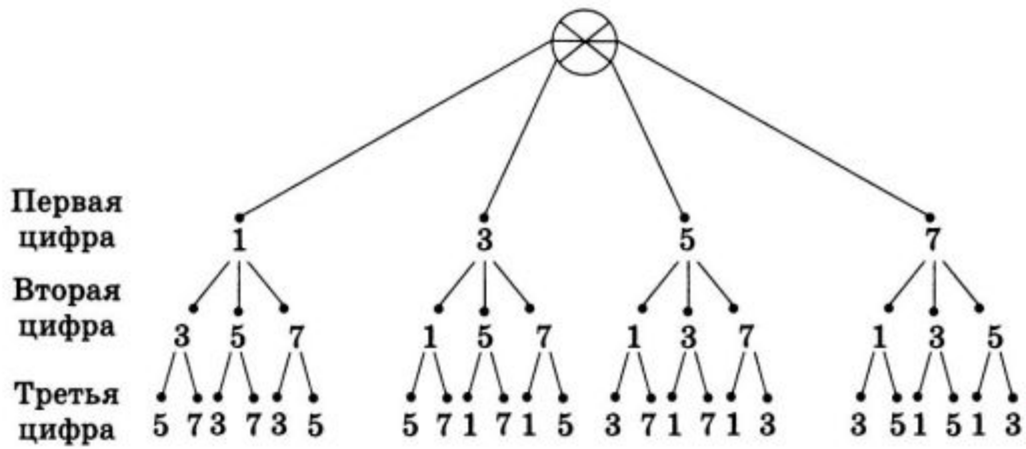
Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7,используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

Чтобы ответить на вопрос задачи , выпишем все такие числа . Полученные результаты запишем в четыре строки , в каждой из которых шесть чисел:

135	137	153	157	173	175
315	317	351	357	371	375
513	517	531	537	571	573
713	715	731	735	751	753

Пример 2 (второй способ)

Проведенный перебор вариантов проиллюстрирован на схеме



Такую схем

антов.

Пример 2 (третий способ)

Первую цифру можно выбрать четырьмя способами. Так как после выбора первой цифры останутся три , то вторую цифру можно выбрать уже тремя способами. Наконец , третью цифру можно выбрать двумя способами. Следовательно , общее число искомых чисел равно произведению $4*3*2$,т.е.24.

Использовалось **комбинаторное правило умножения.**

Комбинаторное правило умножения

Пусть имеется n элементов и требуется выбрать из них один за другим k элементов. Если первый элемент можно выбрать n_1 способами, после чего второй элемент можно выбрать n_2 способами из оставшихся, затем третий элемент можно выбрать n_3 способами из оставшихся и т. д., то число способов, которыми могут быть выбраны все k элементов, равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Перестановки

Первым можно поставить любой из n предметов, вторым – любой из $(n-1)$ оставшихся предметов, третьим любой из $(n-2)$ оставшихся предметов и т. д. В результате число перестановок будет равно произведению n множителей $n\,(n-1)\,(n-2)\,...\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.

Для произведения первых n натуральных чисел используют специальное обозначение: n! (читается n факториал).

$$P_n = 1\cdot 2\cdot ...\cdot n = n!$$

Задачи

Пример 1. Сколькими способами могут быть расставлены 8 участниц финального забега на восьми беговых дорожках?

ПОДСКАЗКА: НАЙТИ P_8

Пример 2. Сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?

ПОДСКАЗКА: ПРИМЕНИТЬ КОМБИНАТОРНОЕ ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ

Задача 3.
Решите уравнение: а) $n! = 7\cdot(n-1)!$;
б) $(k - 10)! = 77\cdot(k - 11)!$

$n! = 7\cdot(n-1)!$

Решение:

$(n-1)!\cdot n = 7\cdot(n-1)!$

$n = 7$

Ответ: 7.

$(k - 10)! = 77\cdot(k - 11)!$

Решение:

$(k - 11)! \cdot(k - 10)=77\cdot(k - 11)!$

$K - 10 = 77$

$K = 87$

Ответ: 87.

Сочетания

Сочетанием из n элементов по k называется комбинация, в которой из этих n элементов выбраны любые k без учета их порядка в комбинации.

Таким образом, для сочетания имеет значение только состав выбранных элементов, а не их порядок.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Задачи

Пример 4. Из 15 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

Подсказка: находим число сочетаний

Пример 5. Из вазы с фруктами, в которой лежит 9 яблок и 6 груш, надо выбрать 3 яблока и 2 груши. Сколькими способами можно сделать такой выбор?

Задача 6

- У Кате 4 шарика: красный, синий, зеленый, желтый. 3 шарика Катя решила подарить своим подружкам. Сколькими способами можно подарить шарики трем девочкам, если каждой девочке можно подарить только один шар?

Размещения

По первой букве французского слова arangement – размещение.

$$A_n^k$$

Размещения

Размещением из n элементов по k называется комбинация, в которой какие-то k из этих n элементов расположены в определенном порядке.

Размещения отличаются друг от друга не только порядком расположения элементов, но и тем, какие именно k элементов выбраны в комбинацию.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Различия между перестановками, размещениями и сочетаниями

- В случае **перестановок** берутся все элементы и изменяется только их местоположение.
- В случае **размещений** берётся только часть элементов и важно расположение элементов друг относительно друга.
- В случае **сочетаний** берётся только часть элементов и не имеет значения расположение элементов друг относительно друга.

Задача 8 (из ОГЭ):

Сколькими способами можно изготовить 3-хцветный флаг с горизонтальными полосами, если имеется материал 7-ми цветов.

Подсказка: находим число размещений

Задача № 9.

- На странице альбома 6 свободных мест для фотографий. Сколькими способами можно вложить в свободные места:
- а) 2 фотографии;
- Ответ: 30.
- б) 4 фотографии;
- Ответ: 360.
- в) 6 фотографий?
- Ответ: 720.

Задача № 10.

- Из 30 участников собрания надо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами можно это сделать?
- Ответ: 870.

Задача № 11.

- Сколькими способами могут занять первое, второе и третье места 8 участниц финального забега на дистанции 100 м?
- Ответ: 336.

Задача № 12.

- На станции 7 запасных путей. Сколькими способами можно расставить на них 4 поезда?
- Ответ: 840.

Задача № 13.

- Сколькими способами 6 учеников, сдающих экзамен, могут занять места в аудитории, в которой стоит 20 одноместных столов?
- Ответ: 27 907 200.

Домашнее задание:

- §36 (из учебника алгебры),
- №№ **36.1, 36.2, 36.3, 36.8** (во всех- г,д,е).