

Лекция № 6

ПОСТОЯННЫЙ ТОК

ВОПРОСЫ

17. Электрический ток. Условия существования. Сила тока. Плотность тока. Уравнение непрерывности.

18. Электродвижущая сила. Закон Ома. Закон Ома в дифференциальной форме для однородного и неоднородного участка цепи. Закон Ома для замкнутой цепи.
19. Работа и мощность тока. КПД. Закон Джоуля-Ленца. Правила Кирхгофа.

17. Электрический ток.
Условия существования.
Сила тока.
Плотность тока.
Уравнение непрерывности.

Электрический ток – упорядоченное движение заряженных частиц.

Электрический ток – перенос электрического заряда через некоторую воображаемую поверхность.

Для того чтобы в проводнике длительное время существовал электрический ток необходимо:

- 1) наличие электрических зарядов;
- 2) наличие внутри проводника напряженности электрического поля (разности потенциалов на его концах).

Количественной мерой
электрического тока является
сила тока I .

Количество электричества (заряд),
протекающее через поперечное
сечение проводника в единицу
времени называют силой тока
(измеряется в Амперах), т. е.

$$I = \frac{dq}{dt}$$

Когда электрический ток распределен в проводнике неравномерно, то используют понятие вектора плотности тока, модуль которого равен

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}$$

здесь S_{\perp} – поверхность перпендикулярная движению электронов или силе тока.

Если известен вектор плотности тока в каждой точке некоторой поверхности S , то можно найти силу тока через эту поверхность как поток вектора плотности тока, т. е.

$$I = \int \left(\vec{j} \cdot dS \vec{n} \right)$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности.

За направление вектора \vec{j} принято направление упорядоченного движения положительных зарядов.

Если в проводящей среде, где течет ток, выделить замкнутую поверхность S , то интеграл

$$\oint_S \left(\vec{j} \cdot dS \vec{n} \right)$$

характеризует весь заряд, выходящий в единицу времени наружу из объема V , охваченного поверхностью S .

Заряд, который находится
в объёме V , охваченного
поверхностью S

$$q = \int_V \rho dV$$

На основании закона сохранения заряда этот интеграл равен убыли заряда в единицу времени внутри объема V , т. е.

$$\oint_S \left(\vec{j} \cdot dS \vec{n} \right) = -\frac{dq}{dt}$$

Согласно закону сохранения
электрического заряда

$$\oint_S \left(\vec{j} \cdot dS \vec{n} \right) = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Эту формулу называют
уравнением непрерывности
(интегральная форма).

По теореме Остроградского-Гаусса

$$\int_V \nabla \cdot \vec{j} \cdot dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

или

$$(\nabla \cdot \vec{j}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

*Это уравнением непрерывности
(дифференциальная форма).*

Для постоянного тока $I = \text{const}$, т. е.

$$\frac{dq}{dt} = 0.$$

Следовательно, уравнение непрерывности для постоянного тока принимает вид

$$\oint_S \left(\vec{j} \cdot dS \vec{n} \right) = 0 \quad (\nabla \cdot \vec{j}) = 0$$

Отсюда следует вывод, что вектор J не имеет источников, линии тока нигде не начинаются и нигде не заканчиваются, они всегда замкнуты.

18. Электродвижущая сила.

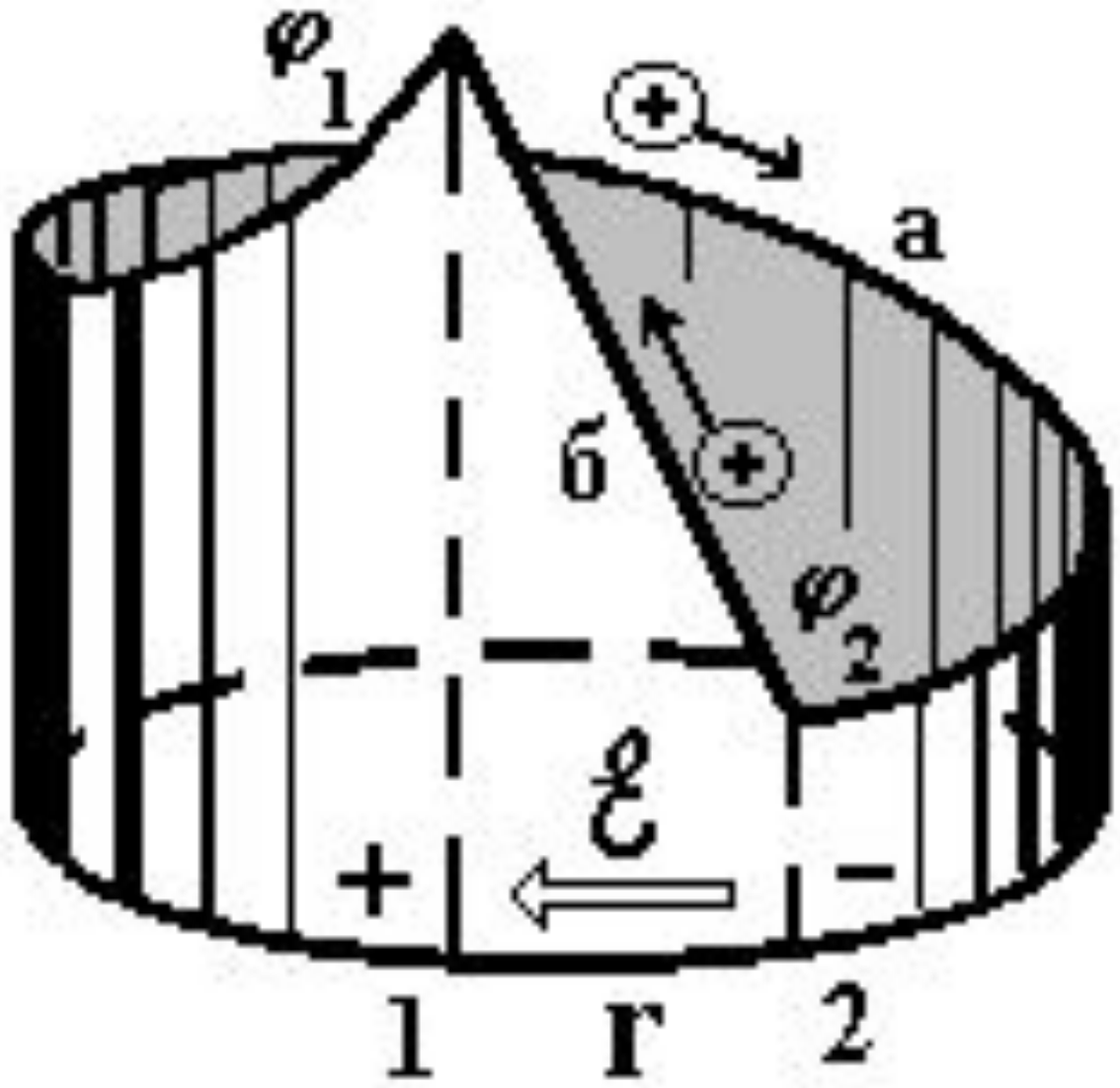
Закон Ома.

Закон Ома в дифференциальной
форме для однородного и
неоднородного участка цепи.

Закон Ома для замкнутой цепи.

Под действием кулоновских сил электростатического поля в проводниках происходит выравнивание потенциалов на концах проводников ($\Delta\phi = 0$) и ток прекращается.

Поэтому для поддержания
длительное время в цепи
постоянного тока, наряду с
участками, где положительные
носители тока движутся в сторону
уменьшения потенциала, должны
иметься участки, на которых перенос
этих зарядов происходит в сторону
возрастания потенциала, т. е. против
сил электрического поля.



Это возможно лишь под действием сил не электростатического происхождения.

Такие силы называют *сторонними*. Физическая природа сторонних сил может быть самой разнообразной: механической, химической, световой, магнитной и т. д.

Величина, равная работе сторонних сил, по перемещению единичного положительного заряда по замкнутому контуру, называется электродвижущей силой (измеряется в Вольтах – В)

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q}$$

Найдём работу сторонних сил по перемещению положительного заряда

$$F_{\text{ст}} = E^* \cdot q,$$

здесь E^* – напряжённость поля сторонних сил, q – заряд.

$$A_{12} = \int_1^2 F_{\text{ст}} d\vec{r} = q \int_1^2 E^* d\vec{r} = q \mathcal{E}_{12}$$

Для электродвижущей силы
 получится следующее выражение
 для участка цепи 1-2 и для замкнутой
 цепи, соответственно:

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}^* \cdot d\vec{l} \quad \mathcal{E} = \oint \vec{E}^* \cdot d\vec{l}$$

Работа сил электростатического поля
по перемещению положительного
заряда

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Работа сил электростатического
поля по перемещению
положительного заряда по
замкнутому контуру равна нулю

$$A = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

Суммарно, работа по перемещению заряда на участке 1-2 складывается из работы сторонних сил и работы силы электростатического поля

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F} + \vec{F}_{\text{ст}}) \cdot d\vec{l} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\mathcal{E}$$

Величина, численно равная работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется падением напряжения или просто напряжением на данном участке цепи

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}$$

Участок с ЭДС называется
неоднородным.

Участок без ЭДС называется
однородным.

В случае однородного участка
говорят о разности потенциалов

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Закон Ома для однородного участка,
для неоднородного участка и для
замкнутой цепи, соответственно:
(r – внутреннее сопротивление
источника ЭДС)

$$I = \frac{\Delta\varphi}{R} = \frac{U}{R}$$

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

Закон Ома для однородного участка,
и для неоднородного участка в
дифференциальной форме,
соответственно:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \qquad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*)$$

здесь σ – удельная
электропроводность, удельная
электропроводимость равна $\sigma = 1/\rho$,
 ρ – удельное электросопротивление.

Сопротивление определяется через
удельное сопротивление, длину
проводника l и поперечное сечение
проводника S :

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

Величины измеряются:

Сопротивление R – Ом ;

Проводимость – Ом = 1/См ;

Удельная электропроводность

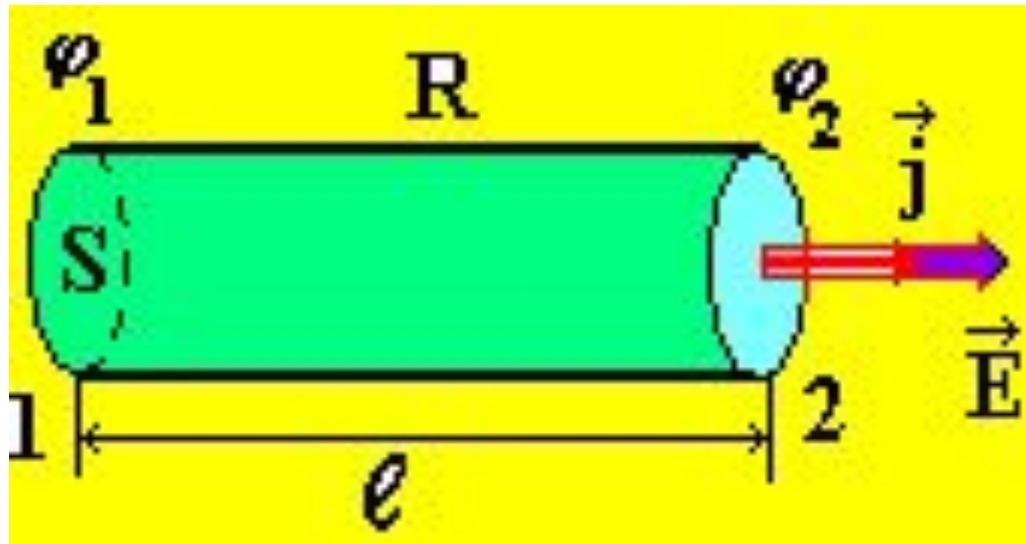
σ – См/м = 1/(Ом·м);

Удельное электросопротивление

ρ – м/См = Ом·м.

Возьмём закон Ома в дифференциальной форме для неоднородного участка

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*)$$



Проинтегрируем по длине с учётом того, что силу тока можно выразить следующим способом

$$I = j \cdot dS$$

и с учётом того, что удельную электропроводность можно заменить удельным сопротивлением $\sigma = 1/\rho$.

$$\int_1^2 \frac{\vec{j} \cdot \vec{d}\mathbb{A}}{\sigma} = \int_1^2 (\vec{E} \cdot \vec{d}\mathbb{A}) + \int_1^2 (\vec{E}^* \cdot \vec{d}\mathbb{A})$$

$$j \frac{l}{\sigma} = I\rho \frac{l}{S} = IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$$

Таким образом, из закона Ома для неоднородного участка цепи в дифференциальной форме получили закон Ома для неоднородного участка цепи.

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}$$

Если взять замкнутый участок
(точка «1» совпадает с точкой «2») φ_1
 $= \varphi_2$,
то получим Закон Ома для
замкнутого участка цепи:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

19. Работа и мощность тока.
КПД.
Закон Джоуля-Ленца.
Правила Кирхгофа.

Мощность электрического тока

$$P = \frac{A}{t} = UI = (\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12})I$$

$$P = \frac{A}{t} = UI = (\varphi_1 - \varphi_2)I$$

Удельная мощность электрического тока

(в дифференциальной форме для
неоднородного и
однородного участков)

$$P_{\text{уд}} = P/V = \vec{j}(\vec{E} + \vec{E}^*) = \rho j^2$$

$$P_{\text{уд}} = P/V = \vec{j}\vec{E} = \sigma E^2 = \rho j^2$$

Закон Джоуля-Ленца: в случае, когда проводник неподвижен и химических превращений в нём нет, работа тока идёт на нагревание:

$$Q = A = UI t = I^2 R t$$

Закон Джоуля-Ленца для
переменного тока:

$$Q = \int_0^t I^2(t) R dt$$

Удельная тепловая мощность
(в элементарном объёме в виде
цилиндра длиной $d\ell$ и поперечным
сечением dS), закон Джоуля-Ленца в
дифференциальной форме:

$$dQ = I^2 R t = \rho \frac{d\ell}{dS} (j dS)^2 dt = \rho j^2 dV dt$$

$$dQ_{\text{уд}} = \frac{dQ}{dV dt} = \rho j^2 = jE = \sigma E^2$$

С учётом законов Ома получим выражение для КПД источника тока

$$\eta = \frac{P_R}{P_{\text{полная}}} = \frac{I^2 R}{I^2 (R + r)} = \frac{R}{(R + r)}$$

Правила Кирхгофа.

При расчёте сложных электрических цепей значительно проще использовать правила Кирхгофа, чем законы Ома.

Первое правило Кирхгофа
*Алгебраическая сумма токов в узле
равна нулю,*

$$\sum_{k=1}^N I_k = 0$$

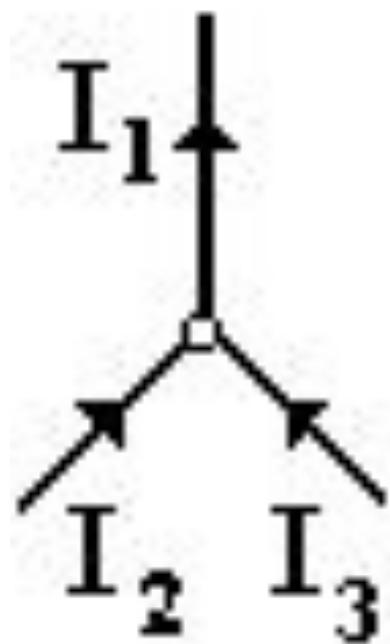
Узлом называют соединение не менее трех проводов.

Условились считать, токи подходящие к узлу положительными, а отходящие – отрицательными (или наоборот).

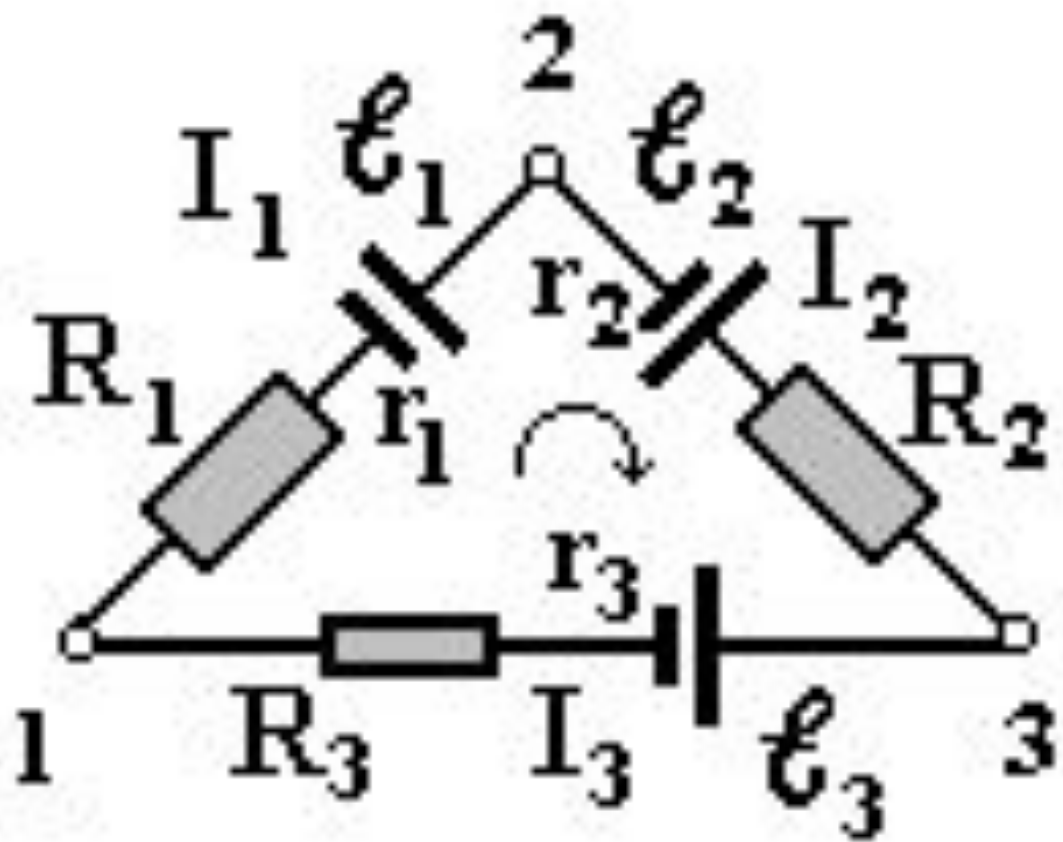
Например, на рисунке «а»,
уравнение, составленное
по первому правилу Кирхгофа,
запишется в виде:

$$I_2 + I_3 - I_1 = 0.$$

Первое правило Кирхгофа является
следствием условия непрерывности
для постоянного тока
(стационарных токов).



(a)

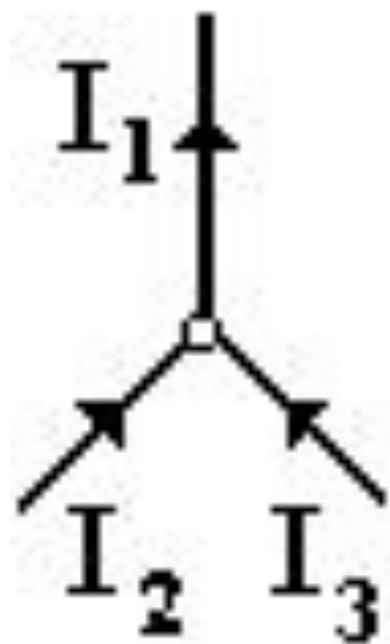


(b)

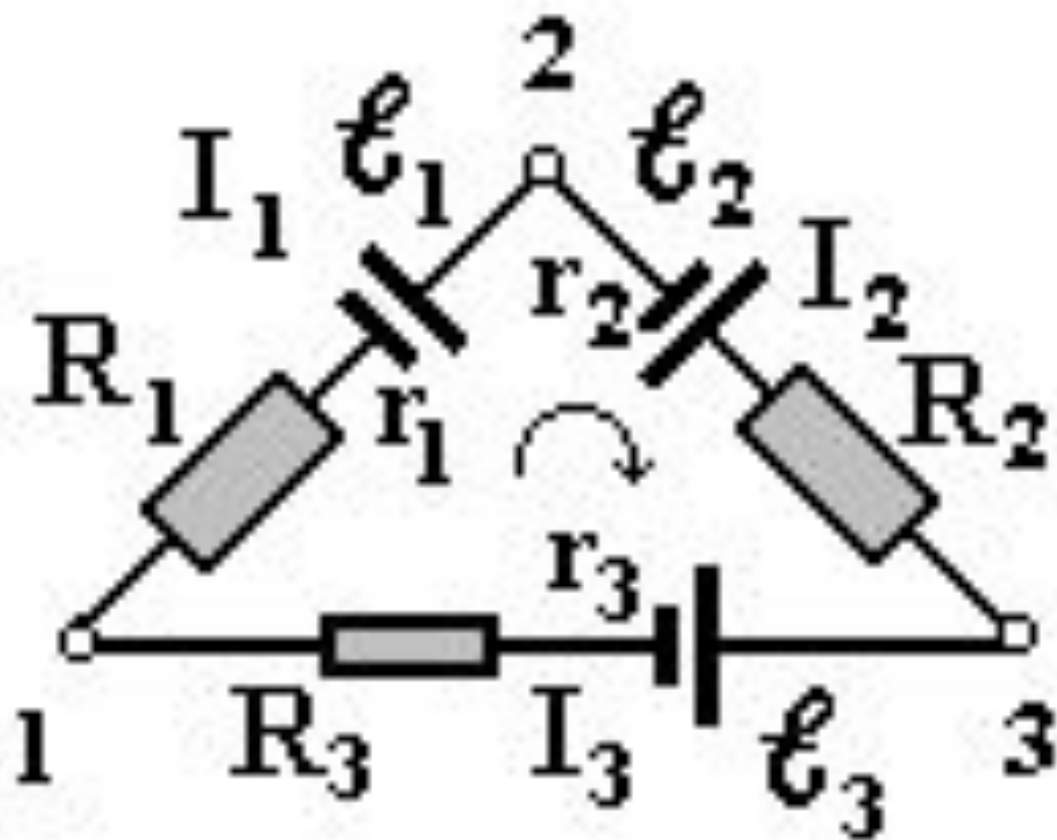
Второе правило Кирхгофа:
Алгебраическая сумма произведений
сил токов на сопротивление
отдельных участков произвольного
замкнутого контура (сумма падения
напряжения) равна алгебраической
сумме ЭДС, действующих на этих
участках в замкнутом контуре:

$$\sum_{k=1}^N I_k R_k = \sum_{m=1}^N \mathcal{E}_m$$

Второе правило Кирхгофа применимо к любому замкнутому контуру разветвленной цепи. Выделим замкнутый контур, состоящий, например, из трех неоднородных участков цепи (рисунок «б»).



(a)



(b)

При составлении уравнений по правилам Кирхгофа необходимо выполнить ряд простых условий.

1) выбрать направление обхода в разветвленной цепи общее для всех замкнутых контуров по часовой, или против часовой стрелки;

- 2) указать стрелками предположительное направление токов от узла до узла с соблюдением условия непрерывности;
- 3) указать полярность на зажимах источников ЭДС;
- 4) определить число узлов и замкнутых контуров;

5) если направление обхода контура совпадает с выбранным направлением тока, то произведение IR берут со знаком плюс; если же направление тока противоположно направлению обхода, то это произведение берут со знаком минус;

6) если ЭДС повышает потенциал в направлении обхода по контуру (внутри источника ток течет от клеммы минус к клемме плюс), то ее надо брать со знаком плюс; если ЭДС понижает потенциал, то ее берут со знаком минус;

7) если в разветвленной цепи имеется n узлов, то число независимых уравнений, составленных по первому правилу Кирхгофа равно: $n - 1$;

8) при числе замкнутых контуров равном m , число независимых уравнений, составленных по второму правилу Кирхгофа равно: $m - (n - 1)$, т. е. число независимых уравнений должно равняться наименьшему числу разрывов, которые следует сделать в цепи, чтобы нарушить все контуры;

9) если в результате вычислений после решения системы составленных уравнений окажется, что какой-то ток отрицательный, то его истинное направление в цепи противоположно выбранному направлению.

10) общее число составленных уравнений по первому и второму правилам Кирхгофа должно равняться числу неизвестных в данной задаче.

