Кубанский государственный аграрный университет

Землеустроительный факультет

дисциплина:

Современные методы статистического анализа кадастровых данных

к.э.н., профессор кафедры землеустройства и земельного кадастра

Яроцкая Елена Вадимовна

Этапы построения моделей

Постановочный

определяются конечные цели и задачи исследования и набор участвующих в модели факторных и результативных экономических переменных

Параметризация. Осуществляется выбор общего вида модели и выявление состава и формы входящих в нее связей, т. е. происходит непосредственно моделирование

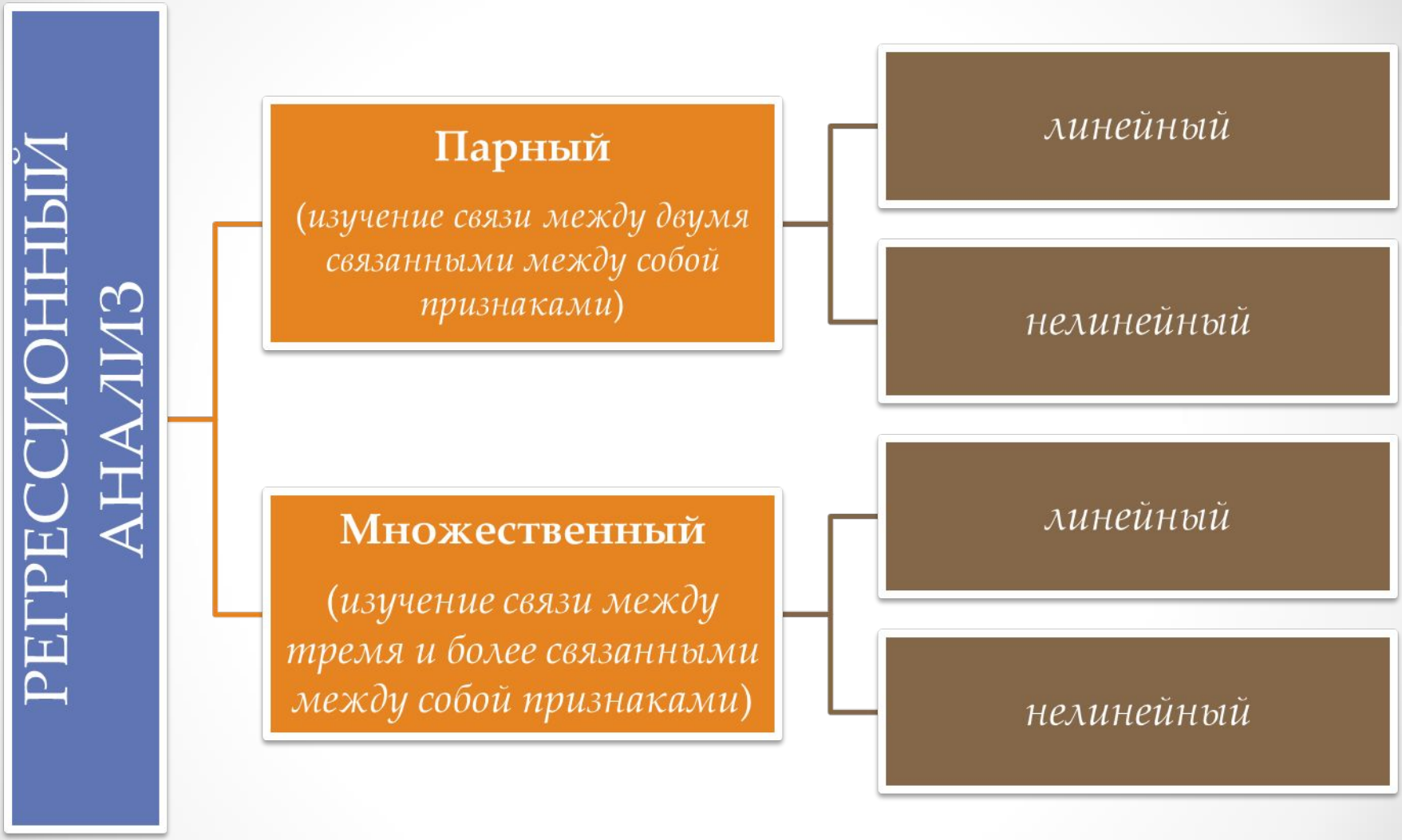
Идентификация модели. На данном этапе осуществляются статистический анализ модели и оценка ее параметров

Оценка качества модели. Проверяются достоверность и адекватность модели, т. е. определяется, насколько успешно решены задачи спецификации и идентификации модели, какова точность расчетов, полученных на ее основе

Интерпретация результатов моделирования

Регрессионный анализ заключается в определении аналитического выражения связи (в определении функции), в котором изменение одной величины (результативного признака) обусловлено влиянием независимой величины (факторного признака).

Количественно оценить данную взаимосвязь можно с помощью построения уравнения регрессии или регрессионной функции.


РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ
Парный
(изучение связи между двумя связанными между собой признаками)
линейный
нелинейный
Множественный
(изучение связи между тремя и более связанными между собой признаками)
линейный
нелинейный

Задачи регрессионного анализа

Установление формы зависимости (линейная и нелинейная)

Определение функции регрессии в виде математического уравнения того или иного типа и установление влияния объясняющих переменных на зависимую переменную

Оценка неизвестных значений зависимой переменной. С помощью функции регрессии можно воспроизвести значения зависимой переменной внутри интервала заданных значений объясняющих переменных или оценить течение процесса вне заданного интервала

Линейная регрессия — используемая в статистике регрессионная модель зависимости одной (объясняемой, зависимой) переменной y от другой или нескольких других переменных (факторов, регрессоров, независимых переменных) x с линейной функцией зависимости.

Линейная парная модель наблюдений

$$y_i = (\alpha + \beta \cdot x_i) + \varepsilon_i, \; i = 1, \square \; , n.$$

если α *и* β — «истинные» значения параметров *линейной* модели связи, то

$$\varepsilon_i = y_i - (\alpha + \beta \cdot x_i)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ представляет собой случайный член или ***ошибку*** в *i*-ом наблюдении

Случайная величина ε

характеризует отклонение реального значения результативного признака от теоретического.

Влияет на не учтённые в модели факторы, случайных ошибок и особенностей измерений.

Причины возникновения случайной ошибки:

- ***Невключение объясняющих переменных***. Т.е. существуют другие факторы, влияющие на *y*, которые не учтены в уравнении. Влияние их приводит к тому, что точки не лежат на одной прямой.
- ***Агрегирование переменных***. Рассматриваемая зависимость является попыткой объединить некоторое число объектов, которые, возможно, обладают различными характеристиками.
- ***Неправильное описание структуры модели***. Т.е., если зависимость относится к данным о временном ряде, то значение *y* может зависеть не от фактического значения *x*, а от значения, которое ожидалось в предыдущем периоде. Если ожидаемое и фактическое значение тесно связаны, то будет казаться, что между *y* и *x* существует зависимость, но это будет лишь аппроксимация, и расхождение вновь будет связанно с наличием случайного члена.
- ***Неправильная функциональная спецификация***. Т.е. функциональное соотношение между *y* и *x* может быть определено неправильно.
- ***Ошибки измерения***. Если в измерении одной или более взаимосвязанных переменных имеются ошибки, то наблюдаемые значения не соответствуют такому соотношению, и существующие расхождения будут увеличивать значения остаточного члена.

Параметр ***β - коэффициент регрессии*** - на сколько в среднем изменится результативный признак ***y*** при изменении факторного признака ***x*** на единицу своего измерения.

Знак параметра β в уравнении парной регрессии указывает на направление связи.

Если, ***β > 0***, то связь между изучаемыми показателями прямая, т. е. с увеличением факторного признака ***x*** увеличивается и результативный признак, и наоборот.

Если ***β < 0***, то связь между изучаемыми показателями обратная, т. е. с увеличением фактора ***x*** результат уменьшается, и наоборот.

Значение ***параметра α*** в уравнении парной регрессии трактуется как среднее значение результативного признака y при условии, что факторный признак x равен нулю. Такая трактовка параметра α возможна только в том случае, если значение $x = 0$ имеет смысл.

Метод наименьших квадратов (МНК) - позволяет получить такие оценки параметров, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака y от теоретических $\widehat{y_x}$ минимальна

$$\sum (y - \hat{y}_x)^2 \to \min$$

Для линейных и нелинейных уравнений, приводимых к линейным, решается следующая система относительно ***a*** и ***b***.

$$\begin{cases} na + b\sum x = \sum y, \\ a\sum x + b\sum x^2 = \sum yx\,. \end{cases}$$

$$b = \frac{\overline{xy} - \overline{y} \cdot \overline{x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$$

$$a = \overline{y} - b\overline{x}$$

Нелинейная регрессия — это вид регрессионного анализа, в котором экспериментальные данные моделируются функцией, являющейся нелинейной комбинацией параметров модели и зависящей от одной и более независимых переменных

Классы нелинейных регрессий

нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам

полиномы разных степеней

$$y = a + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + b_3 \cdot x^3 + \varepsilon$$

равносторонняя гипербола

Метод наименьших квадратов (МНК) - позволяет получить такие оценки параметров, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака *y* от теоретических $\hat{y}_x$ минимальна

нелинейные по оцениваемым параметрам

степенная

$$y = a \cdot x^b \cdot \varepsilon$$

показательная

$$y = a \cdot b^x \cdot \varepsilon$$

экспоненциальная

$$y = e^{a+b \cdot x} \cdot \varepsilon$$

Оценка значимости построенной модели парной регрессии

Адекватность модели (качество)

Значимость коэффициентов уравнения регрессии

Адекватность модели (качество)

1) ***коэффициент апроксимации*** – среднее отклонение расчетных значений от фактических:

$$\overline{A} = \frac{1}{n}\sum\left|\frac{y-\hat{y}}{\hat{y}}\right|\cdot 100\%$$

Допустимый предел значений – не более 8-10%.

Адекватность модели (качество)

2) ***доля дисперсии,*** объясняемую регрессией, в общей дисперсии результативного признака y характеризует индекс детерминации R^2:

Метод наименьших квадратов (МНК) - позволяет получить такие оценки параметров, при которых сумма квадратов отклонений фактических значений результативного признака y от теоретических $\widehat{y_x}$ минимальна

чем ближе к 1, тем лучше качество модели

Адекватность модели (качество)

3) ***F-тест*** – оценивание качества уравнения регрессии – состоит в проверке гипотезы H_o о статистической незначимости уравнения регрессии и показателя тесноты связи.

Для этого выполняется сравнение фактического $F_{факт}$ и критического (табличного) $F_{табл}$ значений F-критерия Фишера.

$$F_{факт} = \frac{\sum(\hat{y} - y)^2 / m}{\sum(y - \hat{y})^2 / (n - m - 1)} = \frac{r_{xy}^2}{1 - r_{xy}^2}(n - 2)$$

где n – число единиц совокупности,
m – число параметров при переменных x.

$F_{табл}$ - это максимально возможное значение критерия под влиянием случайных факторов при данных степенях свободы и уровне значимости α

Уровень значимости α - вероятность отвергнуть правильную гипотезу при условии, что она верна. Обычно α принимается равной 0.05 или 0.01

$F_{табл}\ (\alpha; k_1; k_2)$ определяется по таблице и зависит от уровня значимости, числа степеней свободы $k_1 = m$ и числа степеней свободы $k_2 = n - m - 1$

Если $F_{табл} < F_{факт}$, то гипотеза H_o - гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик отклоняется и признается их статистическая значимость и надежность. В противном случае признается их статистическая не значимость и не надежность

Значимость коэффициентов уравнения регрессии

1) ***t-критерий Стьюдента.*** Выдвигается гипотеза о случайной природе показателей, т.е. о незначимом их отличии от нуля.

t-критерия Стьюдента рассчитываются для параметров линейной регрессии и коэффициента корреляции

$$t_a = \frac{a}{m_a} \qquad t_b = \frac{b}{m_b} \qquad t_r = \frac{r}{m_r}$$

Случайные ошибки параметров линейной регрессии и коэффициента корреляции

$$m_b = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y})^2 / (n-2)}{\sum (x - x)^2}} = \sqrt{\frac{S_{ост}^2}{\sum (x - x)^2}} = \frac{S_{ост}}{\sigma_x \sqrt{n}}$$

$$m_a = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y})^2 \cdot \sum x^2}{(n-2) \cdot n \cdot \sum (x - x)^2}} = \sqrt{\frac{S_{ост}^2 \cdot \sum x^2}{n^2 \sigma_x^2}} = \frac{S_{ост} \cdot \sqrt{\sum x^2}}{\sigma_x n}$$

$$m_{r_{xy}} = \sqrt{\frac{1 - r_{xy}^2}{n-2}}$$

Оценка значимости коэффициентов регрессии и корреляции с помощью t-критерия Стьюдента проводится путем сопоставления их значений с величиной случайной ошибки

Сравнивая фактическое и критическое (табличное) значения *t-статистики* $t_{табл}$ и $t_{факт}$ - принимаем или отвергаем гипотезу H_o

Если $t_{табл} < t_{факт}$, то H_o отклоняется, т.е. a, b, r_{xy} не случайно отличаются от нуля и сформировались под влиянием систематически действующего фактора x

Если $t_{табл} > t_{факт}$, то гипотеза H_o не отклоняется и признается случайная природа формирования a, b, r_{xy}.

Значимость коэффициентов уравнения регрессии

2) ***Доверительный интервал*** – предельные значения статистической величины, которая с заданной доверительной вероятностью будет находится в этом интервале при выборке большего объема.

определяем предельную ошибку Δ для каждого показателя

$$\Delta_a = t_{табл} \cdot m_a$$

$$\Delta_b = t_{табл} \cdot m_b$$

Значимость коэффициентов уравнения регрессии

расчет доверительных интервалов

$$\gamma_a = a \pm \Delta_a$$

$$\gamma_{a_{\min}} = a - \Delta_a$$

$$\gamma_{a_{\max}} = a + \Delta_a$$

$$\gamma_b = b \pm \Delta_b$$

$$\gamma_{b_{\min}} = b - \Delta_b$$

$$\gamma_{b_{\max}} = b + \Delta_b$$

Значимость коэффициентов уравнения регрессии

Если в границы доверительного интервала попадает ноль, т. е. нижняя граница отрицательная, а верхняя положительна, то оцениваемый параметр принимается нулевым, так как он не может одновременно принимать и положительное, и отрицательное значения.

Множественная регрессия - изучение связи между тремя и более связанными между собой признаками. Требуется определить аналитическое выражение связи между признаком y и объясняющими переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в виде $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Этапы построения модели множественной регрессии

Выбор формы связи

Отбор факторных признаков

Обеспечение достаточного объема совокупности для получения несмещенных оценок

Линейная множественная модель наблюдений

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$$

α - значения параметров линейной модели связи

Оценка значимости построенной модели

1) ***Коэффициент множественной детерминации***

$$\tilde{R}^2 = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-m-1},$$

$R^2_{yx_1x_2\ldots x_p}$

квадрат индекса множественной корреляции

где ***n*** – число наблюдений,
m – число факторов

4) Мультиколлинеарность – понятие, которое используется для описания проблемы, когда нестрогая линейная зависимость между факторами приводит к получению ненадежных оценок регрессии

4) *F-критерий Фишера*

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m}$$

$F_{табл}$ - это максимально возможное значение критерия под влиянием случайных факторов при данных степенях свободы и уровне значимости α

Уровень значимости α - вероятность отвергнуть правильную гипотезу при условии, что она верна. Обычно α принимается равной 0.05 или 0.01

$F_{табл}$ $(\alpha; k_1; k_2)$ определяется по таблице и зависит от уровня значимости, числа степеней свободы $k_1 = m$ и числа степеней свободы $k_2 = n - m - 1$

Если $F_{табл} < F_{факт}$, то гипотеза H_o - гипотеза о случайной природе оцениваемых характеристик отклоняется и признается их статистическая значимость и надежность. В противном случае признается их статистическая не значимость и не надежность

Значимость коэффициентов уравнения регрессии

1) ***t-критерий Стьюдента.*** Выдвигается гипотеза о случайной природе показателей, т.е. о незначимом их отличии от нуля.

$$t_{b_i} = \frac{b_i}{m_{b_i}} = \sqrt{F_{x_i}}$$

где

m_{bi} - средняя квадратическая ошибка коэффициента регрессии b_i,

$$m_{b_i} = \frac{\sigma_y \cdot \sqrt{1 - R^2_{yx_1 \ldots x_p}}}{\sigma_{x_i} \cdot \sqrt{1 - R^2_{x_i x_1 \ldots x_p}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n - m - 1}}$$

Нелинейные множественные регрессионные модели

Степенная:

$$y = \alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

Показательная

$$y = e^{\alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n}$$

Параболическая:

$$y = \alpha_0 + \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2$$

Гиперболическая:

$$y = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x_1} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x_n}$$

Кубанский государственный аграрный университет

Землеустроительный факультет

Благодарю за внимание!