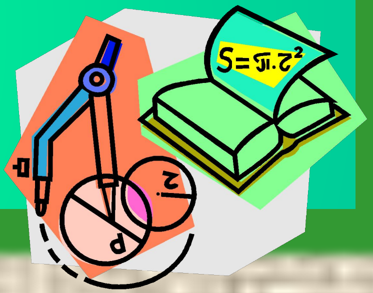
Материалы к урокам геометрии в 8 классе по теме:



«Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников»

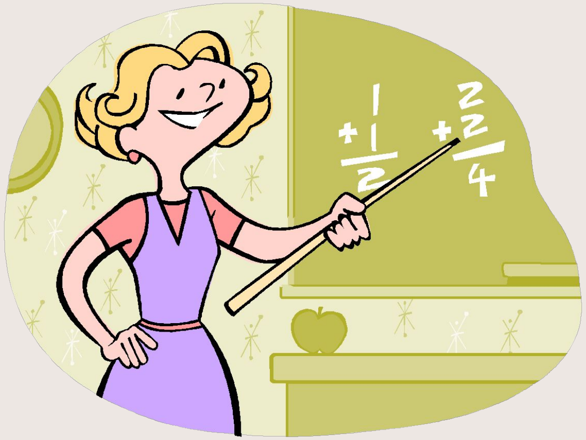
Содержание:

- Теоретический материал
- Признаки подобия треугольников
- Примеры решения задач
- Это интересно…
- Задачи для самостоятельного выполнения

Теоретический материал:

- Пропорциональные отрезки
- Определение подобных треугольников
- Отношение площадей подобных треугольников

Признаки подобия треугольников:

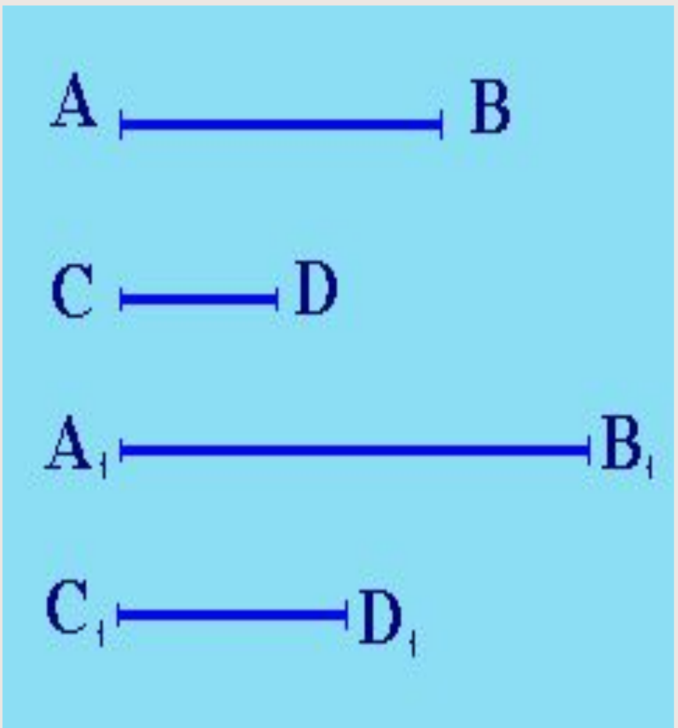


- II I признак
- IIII признак
- IIIIII признак
- Подобие прямоугольных треугольников

Примеры решения задач:

- Задача 1
- Задача 2
- Задача 3

Пропорциональные отрезки.



Отношением отрезков **AB и CD называется отношение их длин, т. е.**

$$\frac{AB.}{CD}$$

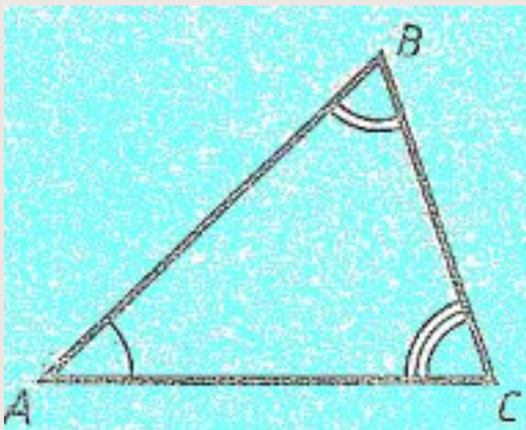
Говорят, что отрезки AB и CD *пропорциональны* отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если

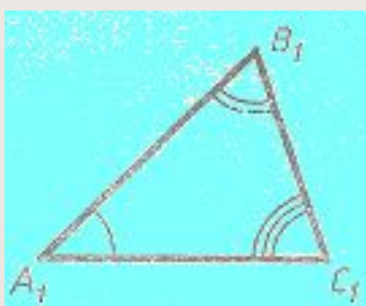
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD.}{C_1D_1}$$

Например, отрезки AB и CD, длины которых равны 2 см и 1 см, пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, длины которых равны 3 см и 1,5 см.

В самом деле, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{2.}{3}$

Определение подобных треугольников.





Пусть у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответствующие углы равны. В этом случае стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 называются *сходственными*.

Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

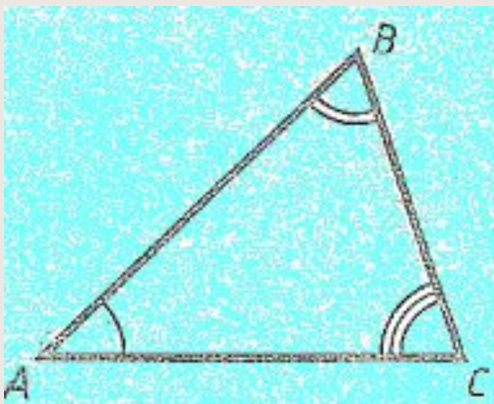
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$$

Число **k**, равное отношению сходственных сторон треугольников, называется ***коэффициентом подобия***.

Отношение площадей подобных треугольников.

Теорема: Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

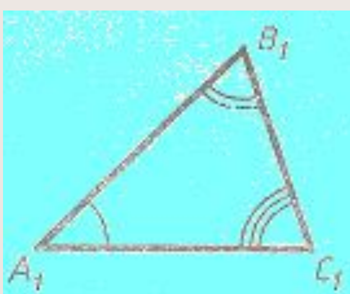
Дано: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Коэффициент подобия равен k.



Доказать: $\frac{S}{S_1} = k^2$

Доказательство: Пусть площадь ΔABC равна S, а площадь $\Delta A_1B_1C_1$ равна S_1.

Так как $\angle A = \angle A_1$, то $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$



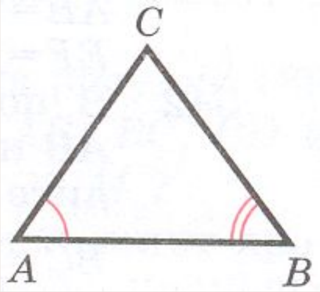
(по теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу). Так как $\frac{AB}{A_1B_1} = k$, $\frac{AC}{A_1C_1} = k$,

поэтому $\frac{S}{S_1} = k^2$. **Теорема доказана.**

Первый признак подобия треугольников.

Теорема: Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого , то такие треугольники подобны.

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$. $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$

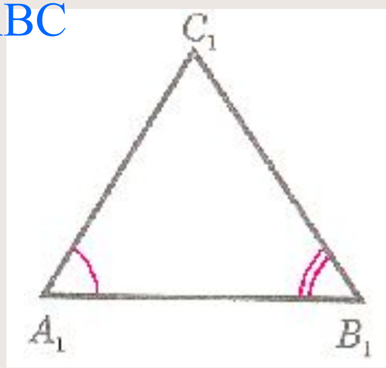


Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство: по теореме о сумме углов треугольника

$$\angle C = 180° - \angle A - \angle B, \quad \angle C_1 = 180° - \angle A_1 - \angle B_1,$$

и, значит, $\angle C = \angle C_1$. Таким образом, углы ΔABC соответственно равны углам $\Delta A_1B_1C_1$. Докажем, что стороны ΔABC пропорциональны сходственным сторонам $\Delta A_1B_1C_1$.



Т.к. $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1} \quad \text{и} \quad \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{CA \cdot CB}{C_1A_1 \cdot C_1B_1}$$

Из этих равенств следует, что $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$

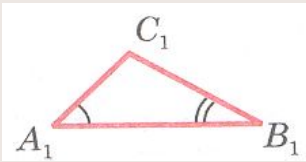
Аналогично, используя равенства $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, получаем $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$.

Итак, стороны ΔABC пропорциональны сходственным сторонам $\Delta A_1B_1C_1$.

Теорема доказана.

Второй признак подобия треугольников.

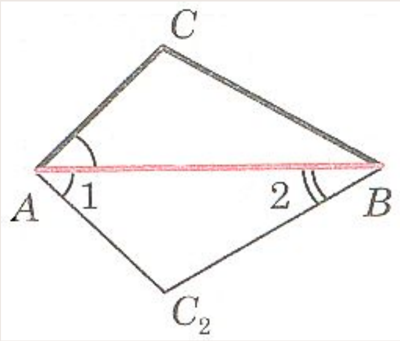
<u>Теорема:</u> Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.



<u>Дано:</u> ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$,, у которых $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$

<u>Доказать:</u> $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

<u>Доказательство:</u> Достаточно доказать, что $\angle B = \angle B_1$.



Рассмотрим ΔABC_2, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$

Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC_2}{A_1C_1}$.

С другой стороны, по условию $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$.

Из этих двух равенств получаем $AC = AC_2$.

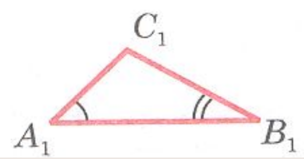
ΔABC и ΔABC_2 равны по двум сторонам и углу между ними (AB – общая сторона, $AC=AC_2$ и $\angle A = \angle 1$)

Отсюда следует, что $\angle B = \angle 2$, а так, как $\angle 2 = \angle B_1$, то $\angle B = \angle B_1$.

<u>Теорема доказана.</u>

Третий признак подобия треугольников.

Теорема: **Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.**



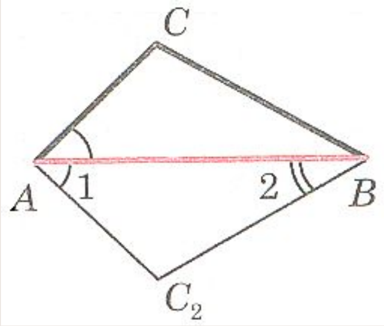
Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, у которых $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство: Достаточно доказать, что $\angle A = \angle A_1$.

Рассмотрим ΔABC_2, у которого $\angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$

Треугольники ABC_2 и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC_2}{B_1C_1} = \frac{C_2A}{C_1A_1}$.



Сравнивая эти равенства с равенствами, которые записаны в дано, получаем: $BC = BC_2$, $CA = C_2A$.

$\Delta ABC = \Delta ABC_2$ по трем сторонам. Отсюда следует, что $\angle A = \angle 1$,

а так как $\angle 1 = \angle A_1$, то $\angle A = \angle A_1$.

Теорема доказана.

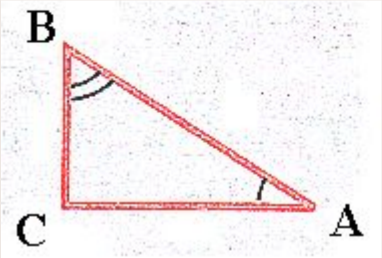
Подобие прямоугольных треугольников.

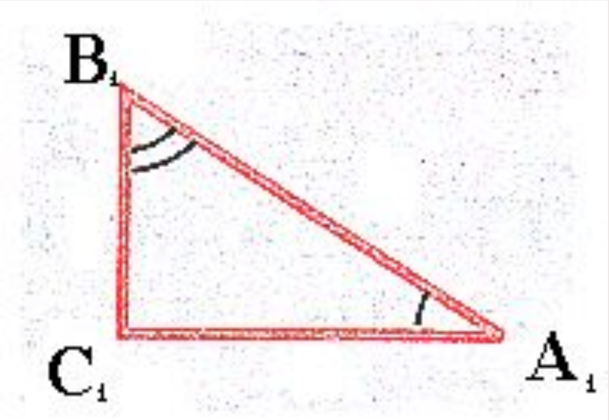
Два прямоугольных треугольника **подобны**, если

1) их **катеты** пропорциональны;

2) **катет и гипотенуза** одного треугольника пропорциональны **катету и гипотенузе** другого;

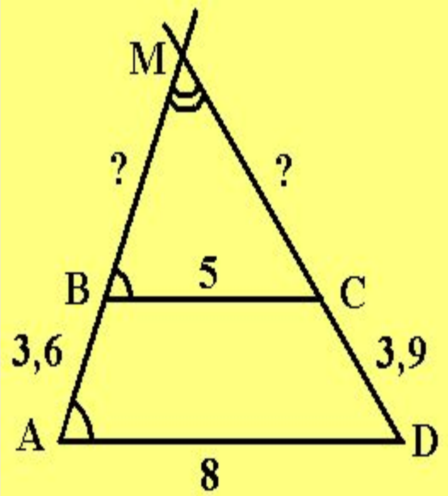
3) **два угла** одного треугольника равны **двум углам** другого треугольника.





Задача 1.

Основания трапеции равны 5 см и 8 см. Боковые стороны, равные 3,6 см и 3,9 см, продолжены до пересечения в точке М. Найдите расстояния от точки М до концов меньшего основания.



Дано: ABCD – трапеция. AD=8 см, BC=5 см, AB = 3,6 см, CD = 3,9 см. AB пересекает CD в точке М.

Найти: BM и CM.

Решение: Δ AMD ~ Δ BMC по I признаку подобия треугольников (угол М – общий, угол MAD = углу MBC как односторонние при параллельных прямых BC и AD и секущей AM). Значит их сходственные стороны пропорциональны.

Пусть BM = x, тогда AM = 3,6 + x. По определению подобных треугольников имеем $\frac{x}{3{,}6+x} = \frac{5}{8}$

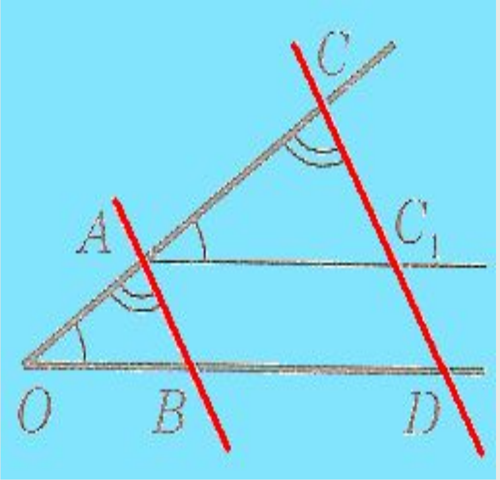
По свойству пропорций получим: 8x = 5(3,6 + x). Отсюда получаем, что x = 6. Значит BM = 6 см. Аналогично составим пропорцию для стороны MC:

$\frac{x}{3{,}9+x} = \frac{5}{8}$ По свойству пропорций получим: 8x = 5(3,9 + x). Отсюда получаем, что x = MC = 6,5 см.

Ответ: 6 см и 6,5 см.

Задача 2.

Стороны угла O пересечены параллельными прямыми AB и CD. Докажите, что отрезки OA и AC пропорциональны отрезкам OB и BD.



Дано: угол O, AB ǁ CD.

AB пересекает угол O, CD пересекает угол O.

Доказать: $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$

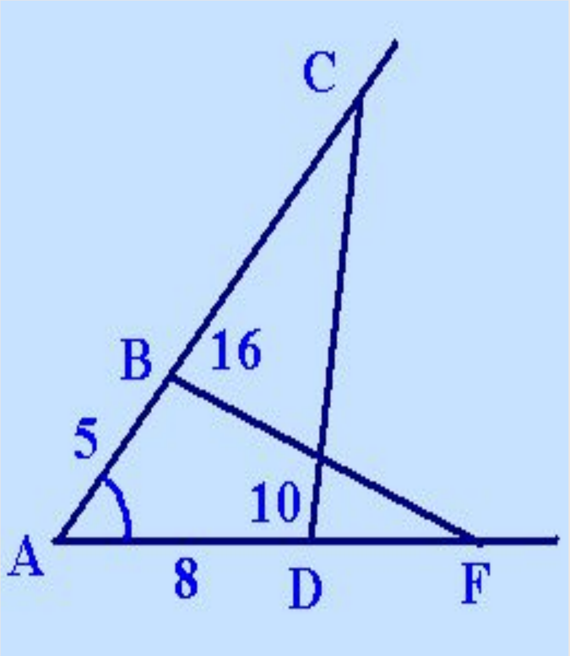
Доказательство: Проведем через точку A прямую AC_1 ǁ BD (C_1 – точка пересечения этой прямой с прямой CD). Тогда Δ OAB ~ Δ ACC_1 по первому признаку подобия треугольников ($\angle O = \angle CAC_1$ и $\angle OAB = \angle C$), следовательно, $\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{AC_1}$

Так как AC_1 = BD (по определению параллелограмма AC_1DB), то $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$

Что и требовалось доказать.

Задача 3.

На одной из сторон данного угла А отложены отрезки АВ = 5 см и АС = 16 см. На другой стороне этого же угла отложены отрезки AD = 8 см и AF = 10 см. Подобны ли треугольники ACD и AFB?



Дано: угол А. АВ = 5 см, АС = 16 см, AD = 8 см, AF = 10 см.

Проверить: $\Delta ACD \sim \Delta AFB$?

Решение: Используем II признак подобия треугольников. Угол А общий, значит нужно проверить пропорциональны ли сходственные стороны треугольников, заключающие этот угол А. По определению подобных треугольников должно выполняться следующее равенство:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AF}{AC}$$

Подставив данные мы получим верное равенство: $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$

Значит по второму признаку подобия треугольников $\Delta ACD \sim \Delta AFB$.

Ответ: да.

Это интересно…

История учения о подобии фигур.

Искусство изображать предметы на плоскости с древних времен привлекало к себе внимание человека. Попытки таких изображений появились значительно раньше, чем возникла письменность. Еще в глубокой древности люди рисовали на скалах, сосудах и прочих предметах быта различные орнаменты, растения, животных. При этом человек стремился к тому, чтобы изображение правильно отражало естественную форму предмета.

Идея отношения и пропорции зародилась в глубокой древности. Одинаковые по форме, но различные по величине фигуры встречаются в вавилонских и египетских памятниках. В сохранившейся погребальной камере отца фараона Рамзеса II имеется стена, покрытая сетью квадратиков, с помощью которой на стену перенесены в увеличенном виде рисунки меньших размеров.

Учение о подобии фигур на основе теории отношений и пропорции было создано в Древней Греции в V-IV вв. до н. э. трудами Гиппократа Хиосского, Архита Тарентского, Евдокса Книдского и др. Оно изложено в VI книге «Начала» Евклида.

Символ, обозначающий подобие фигур, есть не что иное, как повернутая латинская буква S-первая буква в слове similis, что в переводе означает подобие.