



Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение  
Петрозаводского городского округа  
«Средняя общеобразовательная школа №9 имени И.С. Фрадкова»

# Разные способы решения квадратных уравнений

**Выполнила:** Калмычкова Лия  
Ученица 8«а» класса  
**Руководитель:** Гапонова М.А.

Петрозаводск-2019год

- **Актуальность темы:**

в основном государственном экзамене по математике есть задания, связанные с данной темой.

- **Объект исследования:**

квадратное уравнение.

- **Предмет исследования:**

различные способы решения  
квадратных уравнений.

- **Проблема:**

не всегда сразу виден наиболее удобный способ  
решения уравнений.

## Цель работы:

найти различные способы решения квадратных уравнений, провести сравнительный анализ решения.

## Задачи:

собрать информацию о различных способах решения квадратных уравнений;  
освоить найденные способы решения;  
решить уравнения с сайта [fipi](#).

**Гипотеза:**

**Квадратные уравнение можно  
решать разными способами.**

# Исторические сведения:

**III до н.э.** древнегреческий ученый Евклид

– решение квадратных уравнений графически;

**V в. н. э.** квадратное уравнение без обращения к геометрии решил великий Древнегреческий математик Диофант;

**XIII век** Европа, Леонардо Пизанский

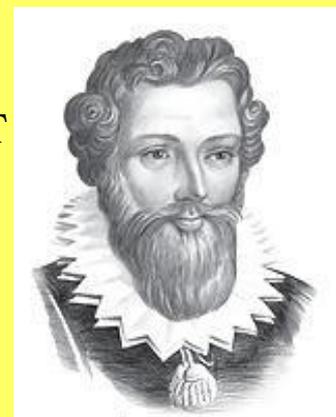
– формулы нахождения корней

квадратного уравнения;

**XVI век** французский математик Франсуа Виет

– вывод формулы корней квадратного

уравнения в общем виде.



# Задача про обезьян

(одна из задач, составленных Бхаскарой)

«На две партии разбившись,  
Забавлялись обезьяны,  
Часть восьмая их в квадрате  
В роще весело резвилась.  
Криком радостным двенадцать  
Воздух свежий оглашали.  
Вместе сколько, ты мне скажешь,  
Обезьян там было в роще»



$$x = (x/8)^2 + 12.$$

$$(1/64) x^2 - x + 12 = 0.$$

$$x_1 = 48, x_2 = 16.$$

# Квадратным уравнением

называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0$$

где  $x$ - переменная,  $a, b$  и  $c$ -некоторые числа, причем,  $a \neq 0$ .

Если  $a=1$ ,  $x^2 + px + q = 0$  - приведённое уравнение.

Если  $b=0$  или  $c=0$ :  $ax^2 + bx = 0$

$$ax^2 + c = 0$$

$$ax^2 = 0$$

неполные

квадратные

уравнения

# Квадратные уравнения

## Неполные квадратные

## Приведённые

## Квадратные уравнения:

Если  $c=0$ , то  
 $ax^2 + bx = 0$

Если  $b=0$ , то  
 $ax^2 + c = 0$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$x(ax+b)=0$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -b/a$$

$$ax^2 = -c$$
$$x^2 = -c/a$$
$$x_1 = \sqrt{-c/a}$$
$$x_2 = -\sqrt{-c/a}$$

$$x_1 + x_2 = -p,$$
$$x_1 \cdot x_2 = q,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

*По теореме,  
обратной теореме  
Виета.*

*По формуле корней  
полного квадратного  
уравнения*

*Разложение  
на  
множители*

*Выразить  
 $x^2$*

**Методы решения**

## Решите уравнения:

а)  $4x^2 - 9 = 0$  ; б)  $4x^2 + 9 = 0$ ; в)  $3x^2 - 4x = 0$ ; г)  $6x^2 = 0$ .

### Образец решения:

а)  $4x^2 - 9 = 0$

1. Перенесём свободный член в правую часть уравнения:  $4x^2 = 9$ .

2. Разделим обе части получившегося уравнения на 4:  $x^2 = 9/4$ .

3. Найдём корни  $x = 1,5$  или  $x = -1,5$

Ответ:  $x_1 = 1,5$ ,  $x_2 = -1,5$ .

в)  $3x^2 - 4x = 0$

1. Разложим левую часть уравнения на множители:  $x(3x - 4) = 0$ .

2. Произведение  $x(3x - 4)$  равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю:  $x = 0$  или  $3x - 4 = 0$ .

3. Решаем уравнение  $3x - 4 = 0$

$$3x = 4 \quad x = 4/3.$$

Ответ:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 4/3$ .

# Сколько корней имеет квадратное уравнение?

Зависит от  $D$

- Если  $D > 0$  : 2 корня
- Если  $D < 0$  : нет корней
- Если  $D = 0$  : 1 корень

# **Рассмотрим различные способы решения уравнений**

- 1. Разложение левой части на множители;**
- 2. Метод выделения полного квадрата;**
- 3. Применение формул корней квадратного уравнения;**
- 4. С применением теоремы Виета;**
- 5. Способом «переброски» коэффициентов;**
- 6. Свойство делителя свободного члена;**
- 7. Свойство коэффициентов квадратного уравнения;**
- 8. Способ решения квадратных уравнений по теореме Безу;**
- 9. Графический способ;**
- 10. Геометрический способ;**
- 11. С помощью номограмм;**
- 12. Решения квадратного уравнения с помощью Excel.**

# 1. Разложение левой части на множители

Решим уравнение:  $x^2 + 2x - 3 = 0$ .

Разложим левую часть уравнения на множители применяя способ группировки:

$$x^2 + 2x - 3 = x^2 + 3x - x - 3 = x(x + 3) - 1(x + 3) = (x + 3)(x - 1).$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0.$$

$$x = -3, x = 1.$$

Ответ: -3; 1

## 2. Метод выделения полного квадрата

1) Решим уравнение  $x^2 + 2x - 3 = 0$

Выделим в левой части полный квадрат.

$$x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 3 = (x + 1)^2 - 1 - 3 =$$

$$= (x + 1)^2 - 4. \quad (x + 1)^2 - 4 = 0, \text{ т.е. } (x + 1)^2 = 4.$$

$$x + 1 = 2, \quad x_1 = 1,$$

$$x + 1 = -2, \quad x_2 = -3.$$

Ответ: -3; 1

2) Решим уравнение

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 = 9 + 7$$

$$(x + 3)^2 = 16,$$

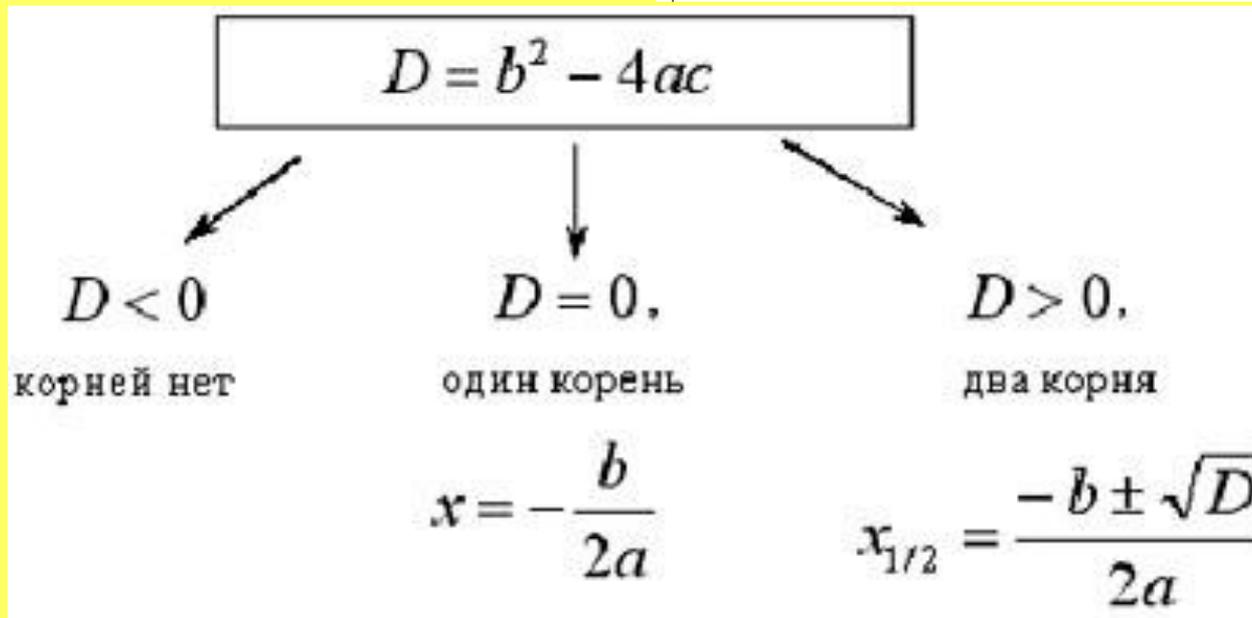
$$x + 3 = 4, \quad x + 3 = -4,$$

$$x = 1, \quad x = -7,$$

### 3. Применение формул корней квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Если  $b$  – чётное,  $k=b/2$ , то

$$\frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

# Приведённое квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

Если  
 $a = 1,$   
 $b = p,$   
 $c = q$

Р со знаком взяв обратным,  
На два мы его разделим.  
И от корня аккуратно  
Знаком минус, плюс  
отделим.

А под корнем, очень кстати,  
Половина Р в квадрате,  
минус q – и вот решенье  
небольшого уравнения.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

## 4. С применением теоремы Виета

$ax^2 + bx + c = 0$ , где  $x_1$  и  $x_2$  – корни уравнения:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\begin{cases} x_1 x_2 = q \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$$

Решить уравнение:

$$x^2 - 3x + 2 = 0; \quad p = -3, \quad q = 2$$

Попробуем найти два числа  $x_1$  и  $x_2$ , такие, что

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 2, \end{cases}$$

не трудно догадаться, что это числа  $x_1 = 2$  и  $x_2 = 1$

Ответ: 2; 1.

## 5. Способ «переброски» коэффициентов

Умножая обе части квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  на  $a$ ,

получаем уравнение  $a^2 x^2 + a bx + ac = 0$ .

Обозначим  $ax$  через  $y$ ,  $x = \frac{y}{a}$ , тогда приходим к уравнению  $y^2 + by + ac = 0$

Его корни  $y_1$  и  $y_2$  найдем с помощью теоремы Виета.

Получаем  $x_1 = \frac{y_1}{a}$  и  $x_2 = \frac{y_2}{a}$ .

Решим уравнение:  $2x^2 - 11x + 15 = 0$ .

«Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение  $y^2 - 11y + 30 = 0$ .

С помощью Теоремы Виета легко найти его корни

$$\begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6}{2} \\ x_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2,5 \end{cases}$$

*Ответ:* 2,5; 3.

## 6. Свойство делителя свободного члена

Корень уравнения, если он есть целое число, является делителем свободного члена.

$$x^2 + 5x - 14 = 0.$$

Находим делители числа -14 начиная с меньших чисел, это 1, 2, 7, 14. Подставляя делители в уравнение получаем верное равенство при делителе равном 2, значит 2 – первый корень уравнения.

По теореме Виета  $x_1 * x_2 = c$ , значит,  $x_2 = -14/2 = -7$ .

*Ответ: 2; -7*

## 7. Свойство коэффициентов квадратного уравнения

1. Если  $a + b + c = 0$ , то  $x_1 = 1, x_2 = c/a$

2. Если  $a - b + c = 0$ , или  $b = a + c$ , то  $x_1 = -1, x_2 = -c/a$

3. Если  $a = c$  и  $b = a^2 + 1$ , то  $x_1 = -a, x_2 = -1/a$ .

4. Если  $a = c$  и  $b = -(a^2 + 1)$ , то  $x_1 = a, x_2 = 1/a$

5. Если  $a = -c$  и  $b = a^2 + 1$ , то  $x_1 = -a, x_2 = 1/a$ .

6. Если  $a = -c$  и  $b = -(a^2 - 1)$ , то  $x_1 = a, x_2 = -1/a$ .

7. Если  $a + b = c$ , то корней нет

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

сумма коэффициентов:

$$a + b + c = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}.$$

$$x^2 + bx + c = 0,$$

$$a + b + c = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = c.$$

Решим уравнение:

$$2018x^2 - 2019x + 1 = 0.$$

Так как

$$2018 + (-2019) + 1 = 0,$$

то по свойству 1

$$x_1 = 1, x_2 = 1/2018.$$

*Ответ:*

*1; 1/2018.*

## 8. Способ решения квадратных уравнений по теореме Безу

Если число  $n$  является корнем многочлена  $P(x)$ , то этот многочлен делится на  $x - n$  без остатка.

Число  $n$  находим методом подбора делителя свободного члена и выполняя деление многочлена  $x - n$  на многочлен  $P(x)$ , получаем:  $(x - n)(x - m) = 0$ , где  $n$  и  $m$  - корни уравнения.

Решим уравнение:  $x^2 + 2x - 3 = 0$ ,

Меньший делитель свободного члена 1 является корнем уравнения.

Разделим многочлен  $x^2 + 2x - 3$  на двучлен  $x - 1$ :

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 2x - 3 & x - 1 \\ \underline{x^2 - 1x} & \\ \underline{-3x - 3} & \\ \underline{3x - 3} & \\ 0 & \end{array}$$

Уравнение принимает вид:  $(x - 1)(x + 3) = 0$

Левая часть уравнения обращается в нуль при  $x = -3$ ,

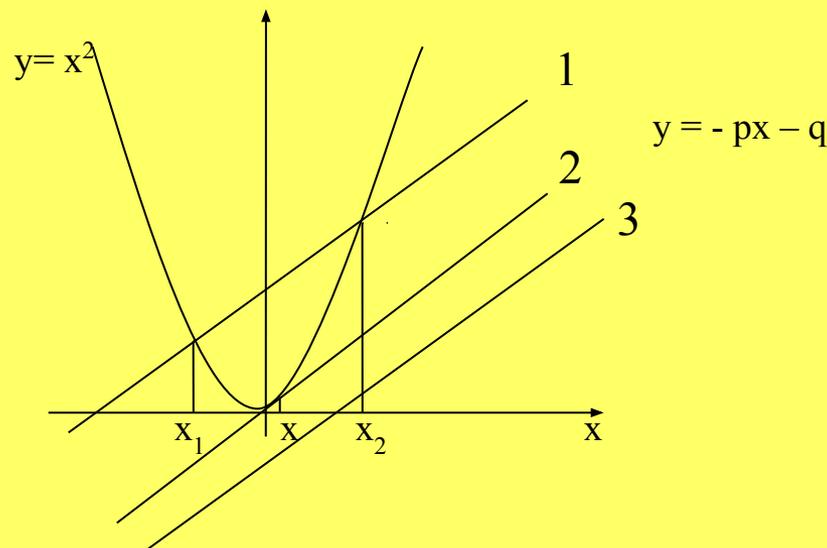
а также при  $x = 1$ , это означает, что числа  $-3$  и  $1$

являются корнями данного уравнения.

## 9. Графический метод

Если в уравнении  $x^2 + px + q = 0$  перенести второй и третий члены в правую часть, то получим  $x^2 = -px - q$ .

Построим графики  $y = x^2$  и  $y = -px - q$ .



1. Если прямая и парабола пересекаются в двух точках – 2 решения;
2. Если прямая и парабола касаются - 1 решение;
3. Если прямая и парабола не имеют общих точек – корней нет.

## 10. С помощью номограмм

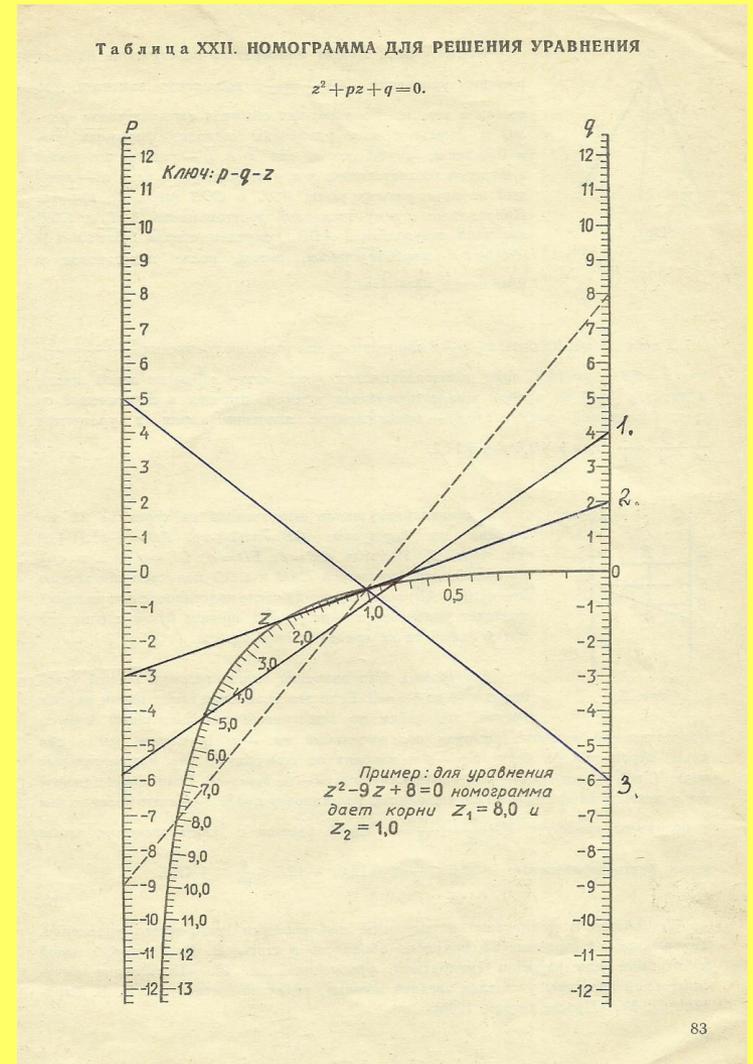
Номограмма для решения уравнения  $z^2 + pz + q = 0$ .

Эта номограмма позволяет,  
не решая квадратного уравнения,  
по его коэффициентам  
определить корни уравнения.

$$z^2 - 9z + 8 = 0$$

номограмма дает корни

$$z_1 = 8,0 \text{ и } z_2 = 1,0$$

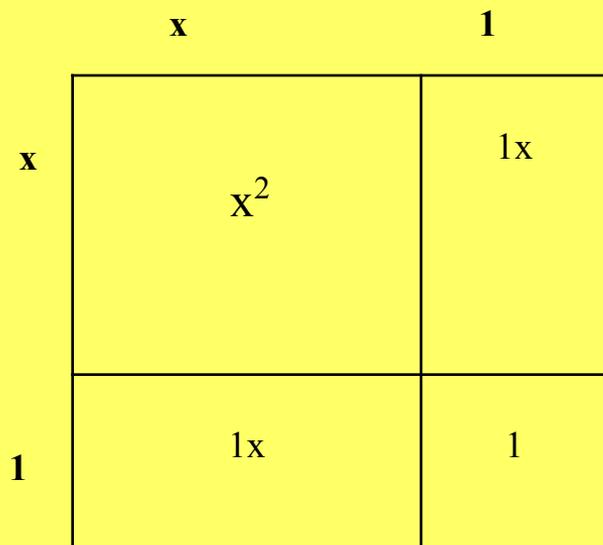


# 11. Геометрический способ

Решим геометрически уравнения  $x^2 + 2x - 3 = 0$ .

Преобразуя уравнение, получаем  $x^2 + 2x = 3$ .

На рисунке находим «изображения» выражения  $x^2 + 2x$ , т.е. к площади квадрата со стороной  $x$  два раза прибавляем площади прямоугольников со сторонами, равными 1 и  $x$ . К выражению  $x^2 + 2x$  добавился квадрат площадью 1.



Получаем:

$$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1.$$

$$(x + 1)^2 = 4,$$

$$x + 1 = 2 \text{ и } x + 1 = -2,$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = -3$$

Ответ: - 3; 1

## 12. Решения квадратного уравнения с помощью таблицы Excel

В таблицу Excel в ячейки A, B и C вводятся коэффициенты квадратного уравнения. В ячейку D - формула дискриминанта, а в ячейки E и F - формулы корней, результате их значения получаем автоматически.

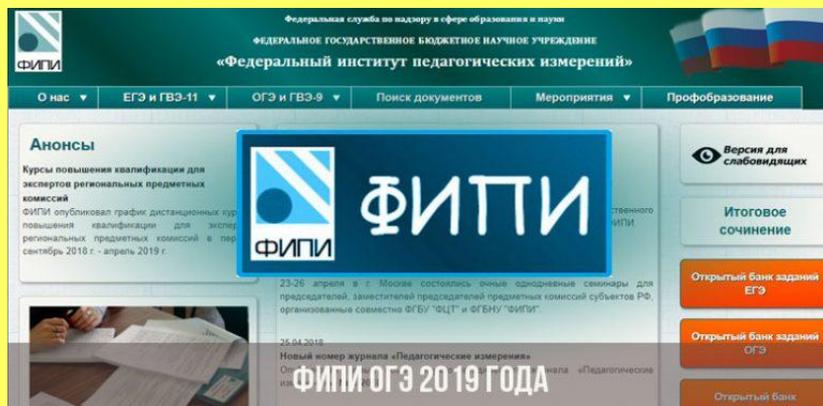
The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7	5	-8	3	4	1	0,6	
8							
9							
10							
11							
12							
13	3	-13	14	1	2,333333	2	
14							
15							
16							
17							

The formula bar at the top shows the formula for cell D7: `=СТЕПЕНЬ(B7;2)-4*A7*C7`.

# Открытый Банк Заданий

- квадратные уравнения;
- задачи на нахождение координат:  
координаты на прямой и плоскости;
- текстовые задачи, приводимые к квадратным уравнениям;
- уравнения , приводимые к квадратным.



# Сравнение разных способов решения квадратных уравнений

Способ	«+»	«-»
1. Разложение левой части уравнения на множители	Можно решить, не зная формул	Подходит не ко всем уравнениям
2. Метод выделения полного квадрата	быстрее находятся корни	Дробные коэффициенты
3. Формула корней квадратного уравнения	Для всех квадратных уравнений	Большие коэффициенты
4. С использованием теоремы Виета	Быстрота решения, экономия времени	Дробные коэффициенты уравнения
5. Способ «переборки»	Быстрота решения, если корни целые	Дробные коэффициенты уравнения
6. Свойство делителя свободного члена	Быстрота решения и экономия времени	Подходит не ко всем уравнениям, дробные коэффициенты уравнения
7. Свойства коэффициентов	Быстрота решения. Большие коэффициенты	Подходит только для некоторых уравнений
8. Следствие теоремы Безу	Быстрота решения	Подходит не ко всем уравнениям.
9. Графический способ	Наглядность.	Приближённость решения,
10. С помощью номограммы	Наглядность Быстрота решения	Неточность решения.
11. Геометрический способ	Наглядность	Подходит не ко всем уравнениям.
12. С помощью таблицы Excel	Автоматический расчёт	Приближённость решения

## **Умение решать квадратные уравнения разными способами позволяет:**

- экономить время, применяя быстрый способ решения;
- решать уравнения с большими коэффициентами;
- выполнять автоматические расчёты;
- наглядно представлять решение уравнения;
- решить любое квадратное уравнение по формуле.

# Заключение

- я получила подтверждение своей гипотезы, что существует множество способов решения квадратных уравнений;
- изучила разные виды квадратных уравнений и освоила разные способы их решения;
- научились использовать полученные знания в тестовых работах, применять их при решении задач;
- нашла на сайте ФИПИ задачи, содержащие квадратные уравнения.

*При решении задач, примеров  
надо искать рациональные подходы и  
применять разнообразные способы!*