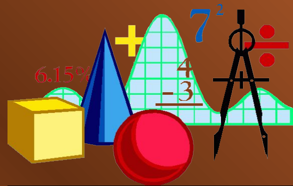
Способы решения квадратных уравнений

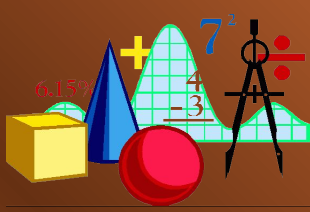


Квадратные уравнения

Когда уравнение решаешь, дружок,
Ты должен найти у него корешок,
Значение буквы проверить не сложно,
Поставь в уравненье его осторожно.
Коль верное равенство выйдет у вас,
То корнем значенье зовите тот час.

О.Севастьянова.

- Квадратные уравнения – это фундамент, на котором покоится величественное здание алгебры. Они находят широкое применение при решении огромного количества задач. Каждый уважающий себя человек должен научиться их решать.



В школьном курсе математики изучаются некоторые способы решения квадратных уравнений. Однако, существуют и другие, которые позволяют очень быстро и рационально найти корни уравнения и получить ответ. Напомним уже известные способы и разберём несколько новых.

1. Разложение на множители левой части уравнения

- Решим уравнение $x^2 + 10x – 24 = 0$.
  Разложим на множители левую часть: $x^2 + 10x – 24 = x^2 + 12x – 2x – 24 = x(x + 12) – 2(x + 12) = (x + 12)(x – 2)$.

  Уравнение примет вид: $(x + 12)(x – 2) = 0$;

  $x + 12 = 0$ <u>или</u> $x – 2 = 0$

  $x = -12$. $x = 2$.

  Ответ: -12; 2.

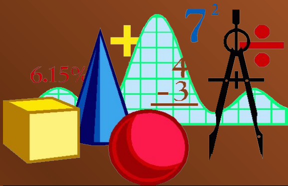
- Решите уравнения: $x^2 - x = 0$;

  $x^2 + 2x = 0$;

  $x^2 - 81 = 0$;

  $x^2 + 4x + 3 = 0$;

  $x^2 + 2x – 3 = 0$.



2. Метод выделения полного квадрата (1 случай)

- Решим уравнение $x^2 – 10x + 25 = 0$.

Заметим, что левая часть уравнения представляет собой полный квадрат двучлена.

Запишем уравнение в виде: $(x – 5)^2 = 0$;

$x – 5 = 0$;

$x = 5$.

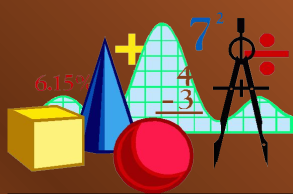
Ответ: 5.

- Решите уравнения: $x^2 + 4x + 4 = 0$;

$x^2 – 2x + 1 = 0$;

$36x^2 + 12x + 1 = 0$;

$x^2 – 6x + 9 = 0$.



3. Метод выделения полного квадрата (2 случай)

- Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$.

Выделим квадрат двучлена в левой части уравнения.

$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 - 7 = (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16.$

Уравнение примет вид: $(x + 3)^2 - 16 = 0;$

$(x + 3)^2 = 16;$

$x + 3 = 4$ <u>или</u> $x + 3 = -4$

$x = 1.$ $x = -7.$

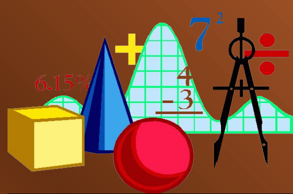
Ответ: 1; - 7.

- Решите уравнения: $x^2 - 8x + 15 = 0;$

$x^2 + 12x + 20 = 0;$

$x^2 + 4x + 3 = 0;$

$x^2 + 2x - 2 = 0;$



4. Решение квадратных уравнений по формуле I

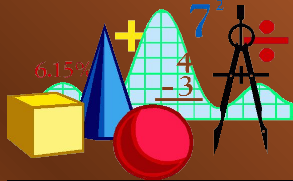
$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
Корней нет	$x = -\frac{b}{2a}$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

- Решите уравнения:

$2x^2 - 5x + 2 = 0;$
$6x^2 + 5x + 1 = 0;$
$4x^2 - 5x + 2 = 0;$
$2x^2 + 3x + 1 = 0.$



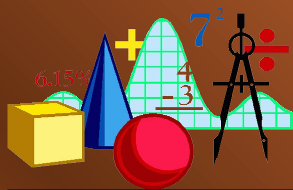
5. Решение квадратных уравнений по формуле II

$$ax^2 + bx + c = 0$$

b = 2k (четное число)

$$D_1 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac \qquad x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{a}$$

- Решите уравнения: $2x^2 - 6x + 4 = 0$;
  $x^2 - 18x + 17 = 0$;
  $3x^2 – 14x + 16 = 0$;
  $x^2 + 2x – 80 = 0$.



6. Решение уравнений с помощью теоремы, обратной теореме Виета

- Решим уравнение $x^2 + 10x – 24 = 0$.

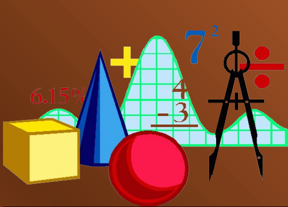
$a = 1$, это приведённое квадратное уравнение.

Заметим, что $D>0$ и $\begin{cases} x_1 x_2 = -24, \\ x_1 + x_2 = -10, \end{cases}$ значит $x_1 = -12$, $x_2 = 2$.

Ответ: $-12; 2$.

- Решите уравнения:

$$x^2 - 7x - 30 = 0;$$
$$x^2 + 2x - 15 = 0;$$
$$x^2 - 7x + 6 = 0.$$



7. Свойства коэффициентов квадратного уравнения (1 случай)

- Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = c/a$.

- Решим уравнение $x^2 + 6x – 7 = 0$, где $a = 1$, $b = 6$, $c = - 7$.

Заметим, что $D>0$ и $1 + 6 – 7 = 0$, значит $x_1 = 1$, $x_2 = - 7/1 = - 7$.

Ответ: - 7; 1.

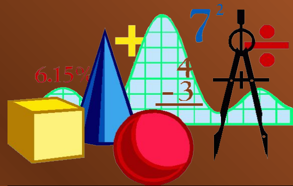
- Решите уравнения: $x^2 – 2013x + 2012 = 0$;

$345x^2 -137x -208 = 0$;

$3x^2 +5x – 8 = 0$;

$5x^2 + 4x – 9 = 0$;

$5x^2 - 7x +2 = 0$.



8. Свойства коэффициентов квадратного уравнения (2 случай)

- Если $a - b + c = 0$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -c/a$.

- Решим уравнение $3x^2 + 5x + 2 = 0$, где $a = 3$, $b = 5$, $c = 2$.

Заметим, что $D>0$ и $3 - 5 + 2 = 0$, значит $x_1 = -1$, $x_2 = -2/3$.

Ответ: -1; $-2/3$.

- Решите уравнения:

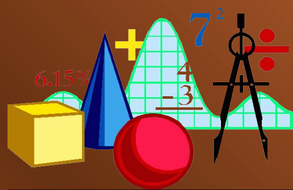
$x^2 + 2013x + 2012 = 0$;

$11x^2 + 25x + 14 = 0$;

$5x^2 + 4x - 1 = 0$;

$x^2 + 4x + 3 = 0$;

$5x^2 - 7x - 12 = 0$.



9. Графическое решение квадратного уравнения

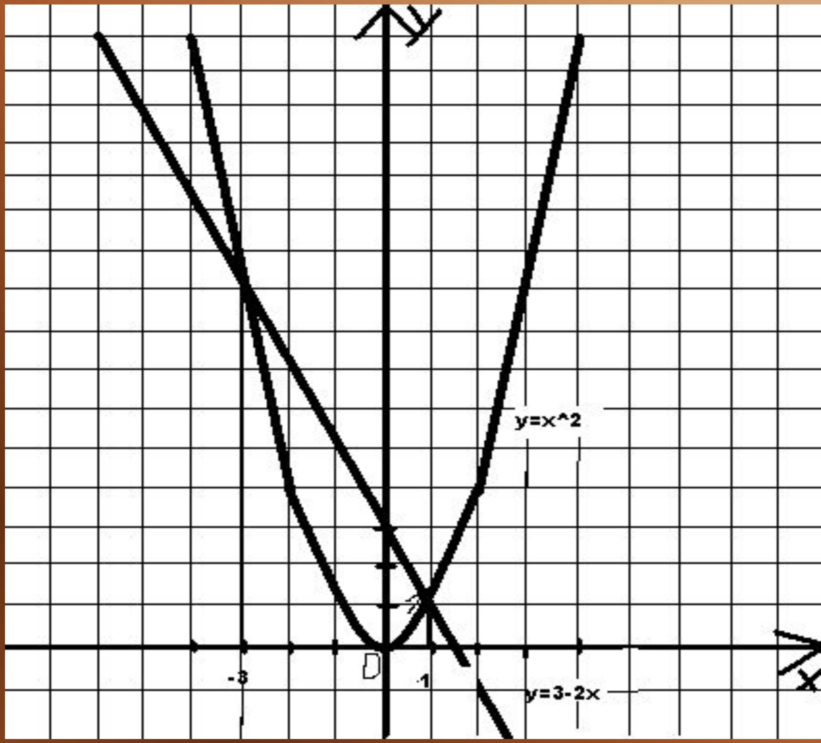
- Решим уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Запишем уравнение в виде $x^2 = 3-2x$.
В одной и той же системе координат построим графики функций

$y = x^2$ и $y = 3-2x$.

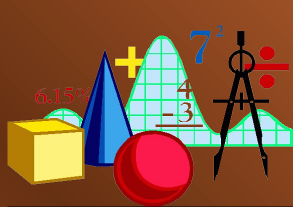
Найдём абсциссы точек пересечения графиков: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

Ответ: - 3; 1.



- Решите уравнение:

$x^2 - x - 6 = 0$;
$x^2 - 4x + 4 = 0$;
$x^2 + 4x + 6 = 0$;
$x^2 - 2x - 3 = 0$;
$x^2 + 2x - 3 = 0$.



10. Решение уравнений способом переброски

- Дано уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Умножим обе части уравнения на a, получим $a^2 x^2 + abx + ac = 0$.
Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$. Тогда $y^2 + by + ac = 0$.
Его корни y_1 и y_2 . Окончательно $x_1 = y_1 /a$, $x_1 = y_2 /a$.

- Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$.

Перебросим коэффициент 2 к свободному члену: $y^2 - 11y + 30 = 0$.
Согласно теореме, обратной теореме Виета $y_1 = 5$ и $y_2 = 6$.
Значит $x_1 = 5/2$ и $x_2 = 6/2$ или $x_1 = 2{,}5$ и $x_2 = 3$.

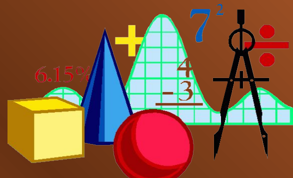
Ответ: 2,5; 3.

- Решите уравнение: $2x^2 - 9x + 9 = 0$;

$10x^2 - 11x + 3 = 0$;

$3x^2 + 11x + 6 = 0$;

$6x^2 + 5x – 6 = 0$.



11. Решение уравнений с помощью циркуля и линейки

- Решим уравнение $ax^2 + bx + c = 0$:

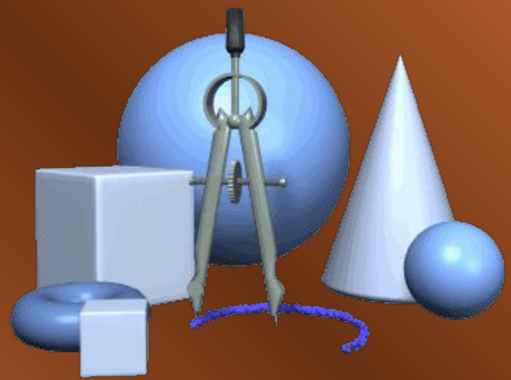
Отметим на координатной плоскости точку

$S(-b:2a; (a+c):2a)$ - центр окружности

и точку $A(0;1)$.

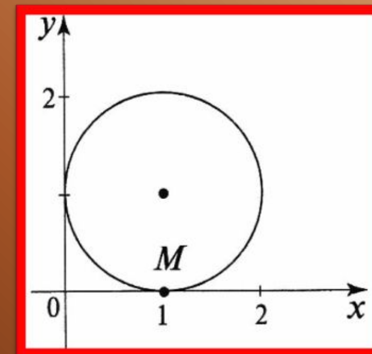
Построим окружность радиуса SA.

Абсциссы точек пересечения окружности с осью Ox и есть корни исходного уравнения.



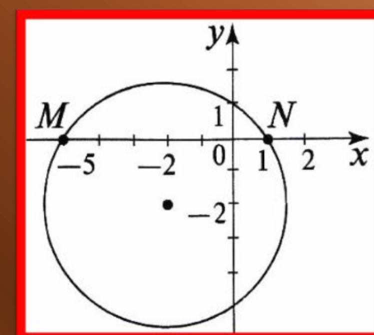
Рассмотрим примеры:

1. Решим уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$.
S(1; 1), A(0;1).



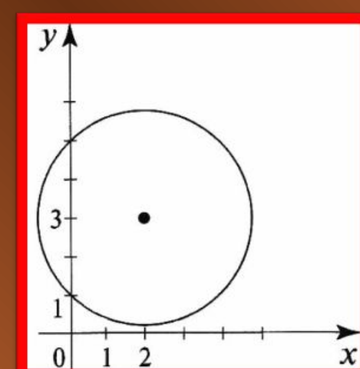
Ответ: 1.

2. Решим уравнение $x^2 + 4x - 5 = 0$.
S(- 2; - 2), A(0;1).



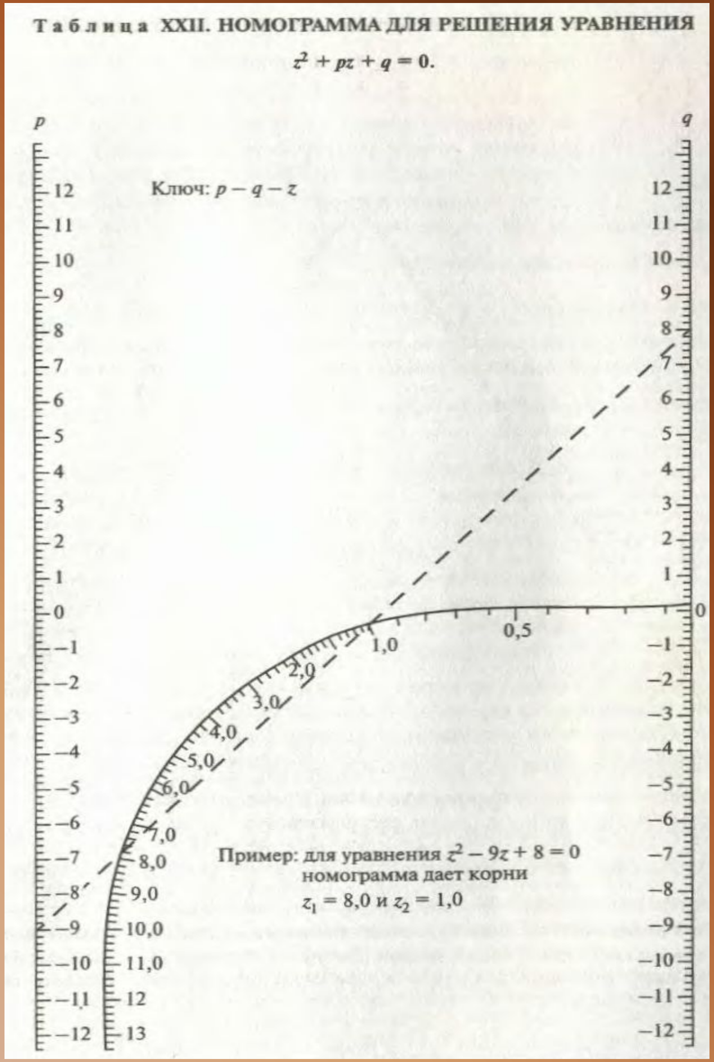
Ответ: -5; 1.

3. Решите уравнение $x^2 - 4x + 5 = 0$.
S(2; 3), A(0;1).



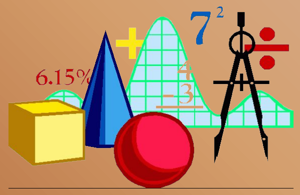
Ответ: нет корней.

12. Решение квадратных уравнений с помощью номограммы



Номограмма для решения уравнения $z^2 + px + q = 0$ даёт значения положительных корней. Если уравнение имеет корни разных знаков или оба корня отрицательны, то необходимо воспользоваться специальной методикой их вычисления, также, как и в случае, когда коэффициенты p и q выходят за пределы шкал.

13. Геометрический способ решения уравнения



- Решим уравнение $y^2 - 6y – 16 = 0$.

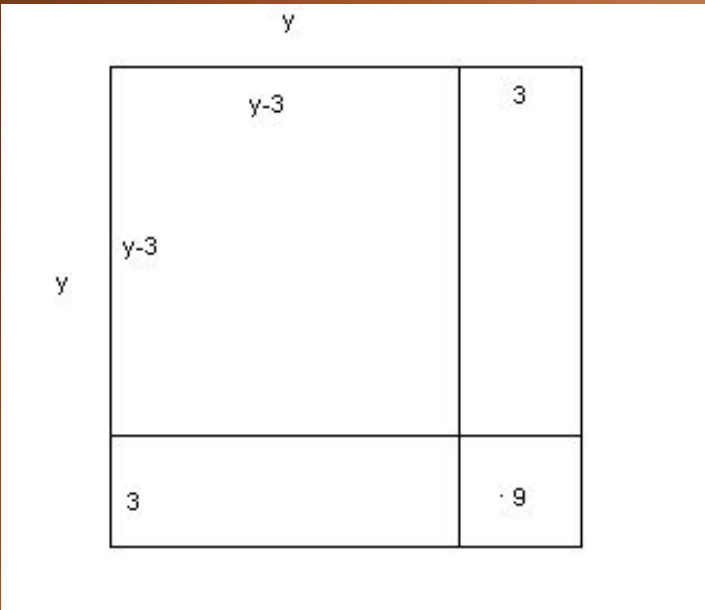
Представим уравнение в виде $y^2 - 6y = 16$.
На рисунке «изображено» выражение $y^2 - 6y$,
т.е. из площади квадрата со стороной у
дважды вычитается площадь квадрата со стороной 3.
Значит $y^2 – 6y + 9$ есть площадь квадрата со стороной у-3.
Выполнив замену $y^2 - 6y = 16$, получим

$(y-3)^2 = 16 + 9$;

у-3 = 5 <u>или</u> у-3 = - 5

у = 8 у = -2

Ответ: - 2; 8.



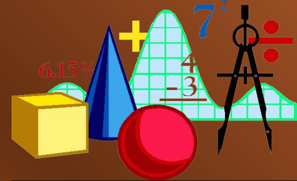
- Решить уравнение $y^2 + 6y – 16 = 0$.

Заключение

- В ходе данной исследовательской работы мною были изучены способы решения полных квадратных уравнений;
- Считаю, что работа помогла мне лучше подготовиться к ГИА по математике;
- Данная презентация была предложена на школьной предметной конференции старшеклассников;
- Я работала под девизом: «Научился сам – научи другого!».

УЧИТЬСЯ НЕЛЕГКО, НО ИНТЕРЕСНО!

Ян Амос Коменский (1592-1670),
чешский педагог, писатель.



Литература и источники

1. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К. И., Суворова С.Б. Алгебра 8. – М. : Просвещение, 2005.
2. Приложение «Математика» к газете «Первое сентября», №40 – 2000г.
3. Брадис В.М. Четырёхзначные математические таблицы. - Дрофа, 1996г.
4. Интернет-ресурсы: http://rus-sky.com/history/library/w/.