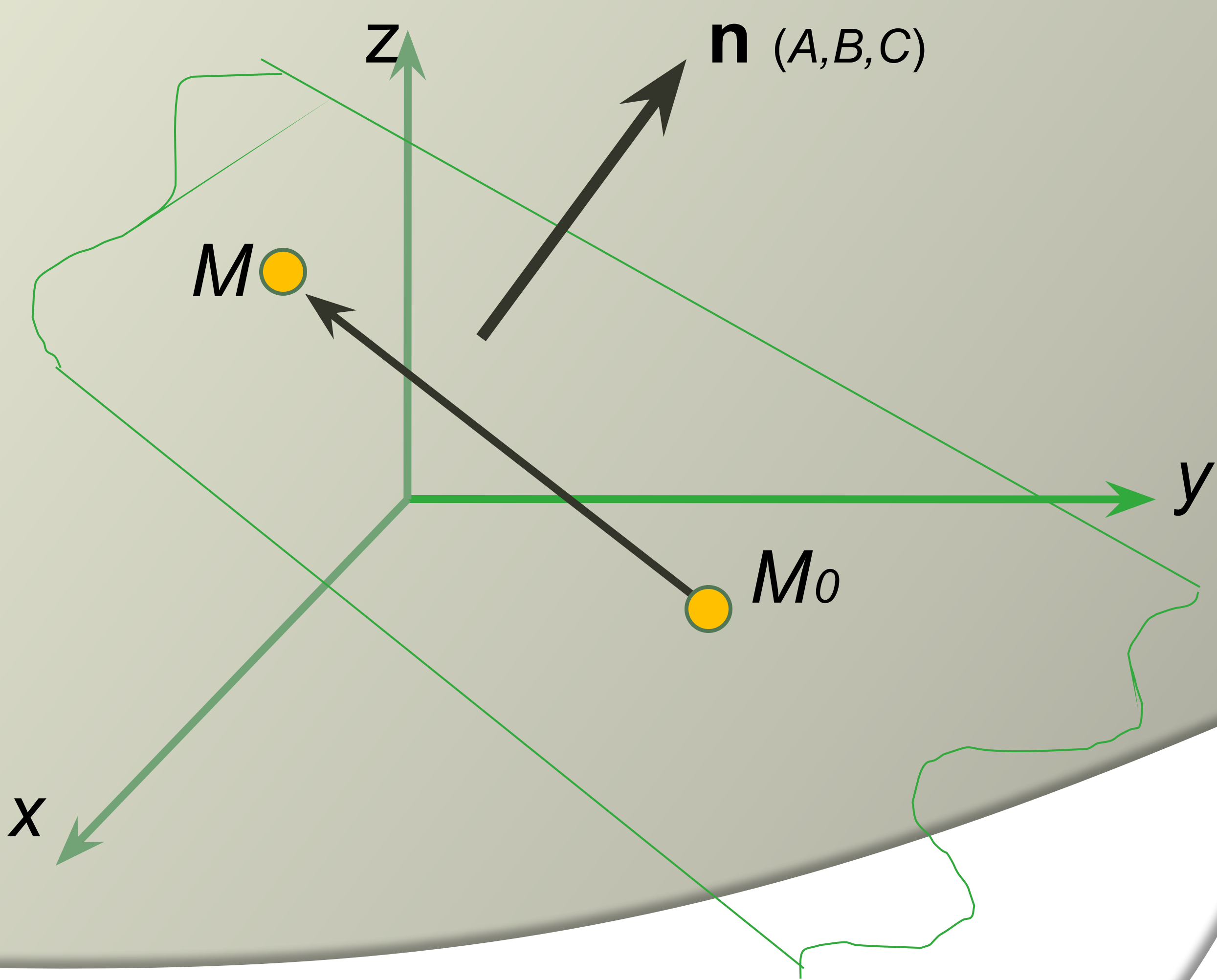
- **Уравнение поверхности**
- $F(x,y,z)=0$
- .

Плоскость. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору

- Положение плоскости в пространстве можно определить, задав какую-либо точку M_0 на плоскости и какой-либо нормальный вектор . Нормальным вектором плоскости называется любой вектор, перпендикулярный к этой плоскости.

- Пусть точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ лежит в плоскости. Введем в рассмотрение произвольную точку плоскости $M(x,y,z)$.



- Векторы $\overline{n}(A,B,C)$ и $\overline{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$
- ортогональны.

- $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

- Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору.

- *Пример* 1:
- Написать уравнение плоскости, проходящей через точку М(2,3,-1) перпендикулярно вектору $n(1,2,-3)$

- *Решение*:
- По формуле : $1(x-2)+2(y-3)-3(z+1)=0$
- или $x+2y-3z-11=0$

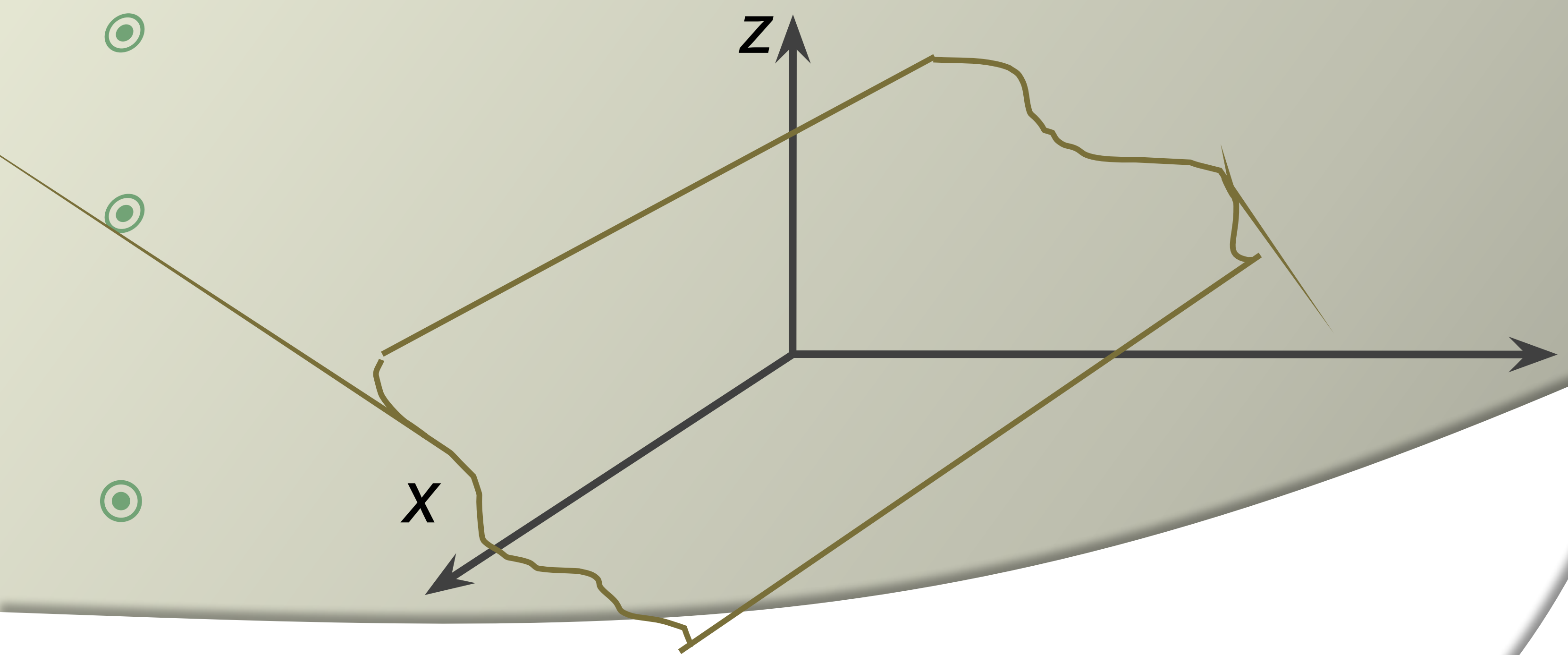
- *Пример 2*:
- Написать уравнение плоскости, проходящей через точку М(1,0,0) перпендикулярно вектору $\bar{n}(2,0,1)$.
- *Решение*:
- Получаем: $2(x-1)+0(y-0)+1(z-0)=0$
- или $2x+z-2=0$.

Общее уравнение плоскости

- $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, раскроем в нем скобки и обозначим $-Ax_0-By_0-Cz_0=D$. Приведем уравнение рассматриваемой плоскости к виду:
- $Ax+By+Cz+D=0$ -
- - общее уравнение плоскости. Коэффициенты *A,B,C* являются координатами нормального вектора плоскости.

Частные случаи общего уравнения плоскости

- 1. Пусть A=0, B,C,D≠0. Тогда : $By+Cz+D$=0.
- Нормальный вектор плоскости $\bar{n}(0,B,C)$ перпендикулярен оси OX и, следовательно, плоскость параллельна оси OX.

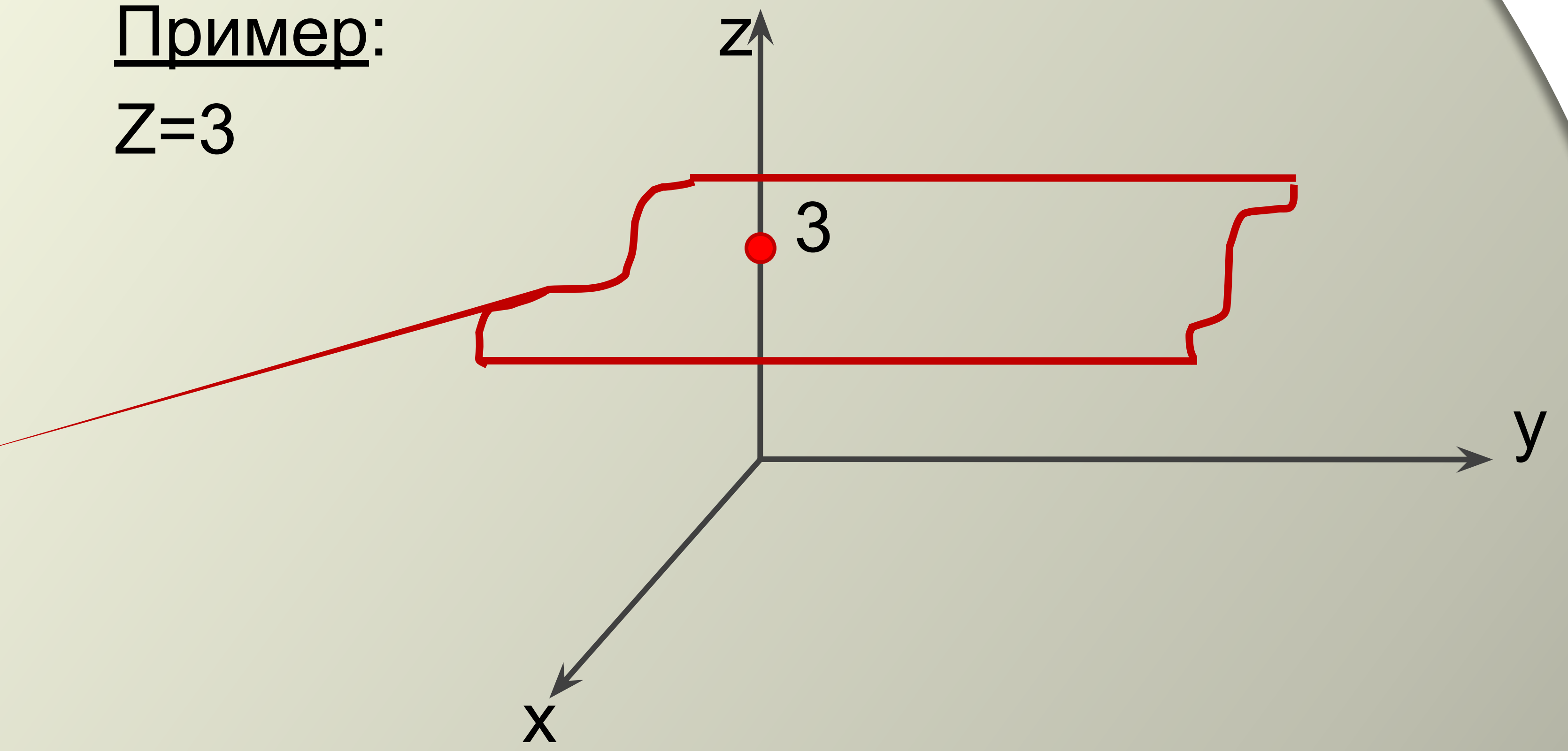


- Уравнения $Ax+Cz+D=0$ и $Ax+By+D=0$ выражают плоскости, параллельные осям *OY* и *OZ*.
- 2. $D=0$, $A,B,C\neq 0$. Уравнение плоскости: $Ax+By+Cz=0$. Точка $O(0,0,0)$ удовлетворяет уравнению плоскости. Уравнение задает плоскость, проходящую через начало координат.
- 3. $A=0$, $D=0$, $B,C\neq 0$. Уравнение плоскости: $By+Cz=0$. Плоскость одновременно параллельна оси *OX* и проходит через начало координат, т.е. проходит через ось *OX*.

- Аналогично уравнения $Ax+Cz=0$ и $Ax+By=0$ выражают плоскости, проходящие через оси *OY* и *OZ.*
- 4. $A=0$, $B=0$, $C,D\neq0$. Уравнение плоскости: $Cz+D=0$. Плоскость одновременно параллельна осям *OX* и *OУ*, т.е. координатной плоскости *OXУ*. Аналогично уравнения $By+D=0$, и $Ax+D=0$ выражают плоскости, параллельные координатным плоскостям OXZ и *OYZ*.

Пример:

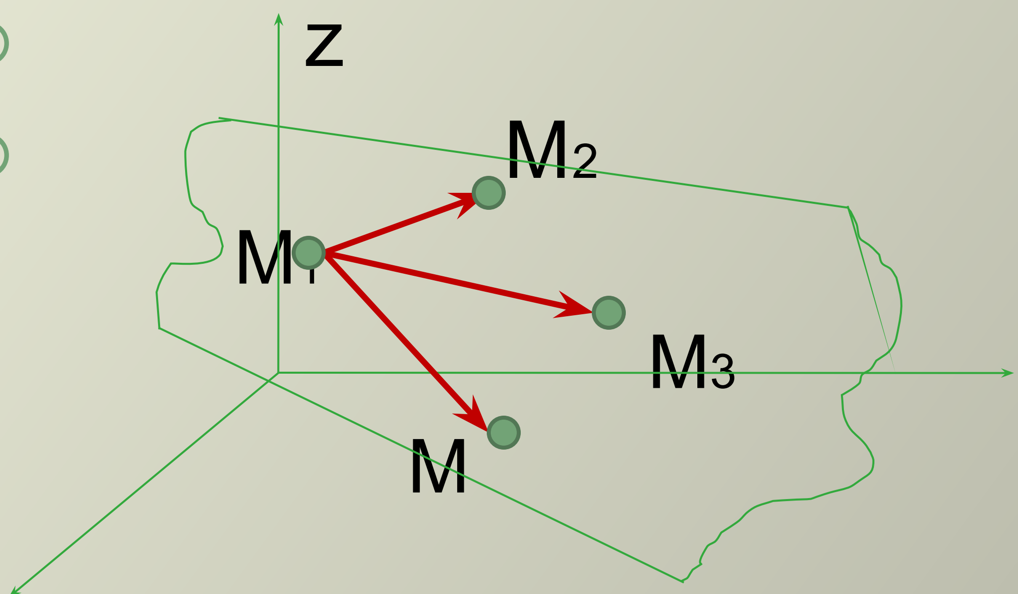
Z=3



- $A=0$, $B=0$, $D=0$, $C\neq0$.
- Уравнение плоскости: $Cz=0$ или $z=0$. Это плоскость одновременно параллельная координатной плоскости *ОХУ* , т.е. сама координатная плоскость *ОХУ*. Аналогично: $y=0$ и $x=0$ – уравнения координатных плоскостей *OXZ* и *OYZ*.

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

- Три точки, не лежащие на одной прямой- $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$.
- $M(x,y,z)$ – произвольная точка плоскости.



- Векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, компланарны. Их смешанное произведение равно нулю.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- Это искомое уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

- *Пример .* Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,2,1)$, $M_2(0,1,4)$, $M_3(-3,3,2)$.
- *Решение*: Используя полученное уравнение, имеем:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Или $4x+11y+5z-31=0$

Угол между плоскостями, условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

- Две плоскости: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Их нормальные векторы $\overline{n_1}(A_1, B_1, C_1)$, $\overline{n_2}(A_2, B_2, C_2)$
- Углом между двумя плоскостями называется угол между их нормальными векторами
- $Cos\omega = \dfrac{\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} = \dfrac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$

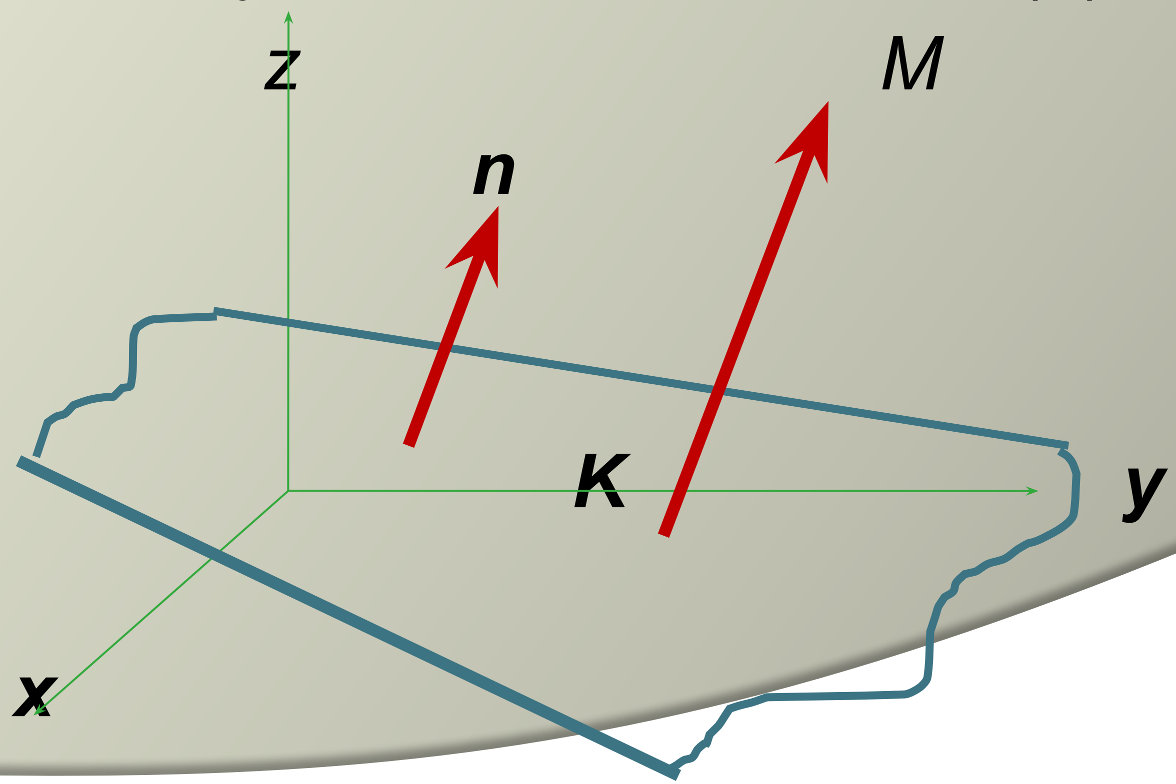
- Если плоскости перпендикулярны, то их нормальные векторы тоже перпендикулярны, и поэтому их скалярное произведение равно нулю:
- $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0.$
- Если плоскости параллельны, то параллельны их нормальные векторы, а значит, выполняются соотношения:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

- *Пример*: Написать уравнение плоскости, проходящей через точку М(0,1,4) параллельно плоскости $2x-4y-z+1=0$.
- *Решение*: Вектор нормали данной плоскости будет являться нормальным вектором и для искомой плоскости. Используем уравнение плоскости по точке и нормальному вектору:
- $2(x-0)-4(y-1)-(z-4)=0$ или $2x-4y-z+8=0$.

.Расстояние от точки до плоскости

- найти расстояние от точки $M(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости: $Ax+By+Cz+D=0$. Опустим из точки M перпендикуляр MK на плоскость (d).



- Пусть точка К имеет координаты x_1, y_1, z_1

$$\overline{n}\cdot\overline{KM} = \pm\left|\overline{n}\right|\cdot\left|\overline{KM}\right| = \pm d\cdot\left|\overline{n}\right|$$

$$\overline{n}\cdot\overline{KM} =$$

- Или $A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)=$
- $= Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1).$
- Точка К лежит в плоскости, ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости, то есть $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$.

- Учитывая это, получаем: $\overline{n} \cdot \overline{KM} =$
- $Ax_0+By_0+Cz_0+D-(Ax_1+By_1+Cz_1+D)= Ax_0+By_0+Cz_0+D.$
- Тогда: $Ax_0+By_0+Cz_0+D= \pm d \cdot |\overline{n}|$;

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- *Пример:*
- Найти расстояние от точки *M* (-1,2,3) до плоскости 2*x*-6*y*-3*z*+2=0.
- *Решение:*
- Воспользуемся формулой и подставим в уравнение плоскости координаты заданной точки:
- $$d = \frac{\left|2\cdot(-1)+(-6)\cdot 2+3\cdot(-3)+2\right|}{\sqrt{2^2+(-6)^2+3^2}} = \frac{21}{7} = 3$$

Общие уравнения прямой в пространстве

- Прямая в пространстве рассматривается как линия пересечения двух плоскостей.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

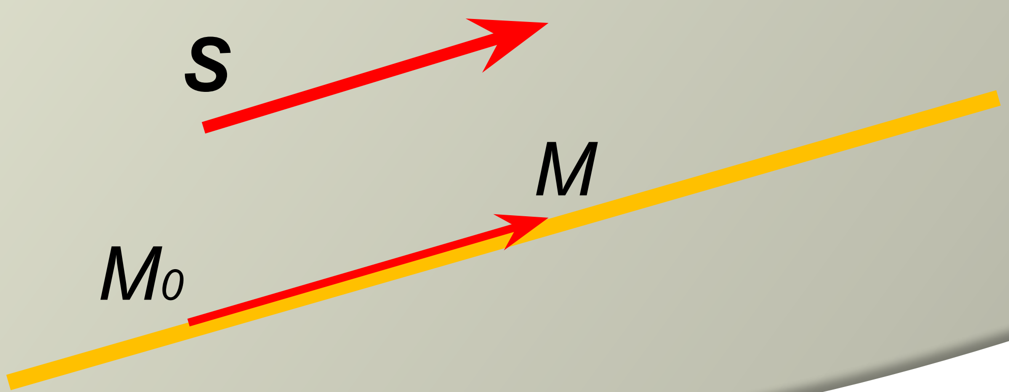
Система задает прямую в том случае, если плоскости не являются параллельными,

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

Канонические уравнения прямой в пространстве

- Положение прямой L в пространстве однозначно определено, если известна какая-нибудь точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, лежащая на прямой L, и задан направляющий вектор

$$\overline{S}(m,n,p)$$



- $M(x,y,z)$ – произвольная точка на этой прямой. Тогда векторы
- $\overline{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ и $\overline{S}(m,n,p)$
- будут коллинеарны:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

- \- канонические уравнения прямой в пространстве или уравнения прямой по точке и направляющему вектору.
-

- ***Пример 1:***
- Написать уравнение прямой *L*, проходящей через точку *M*(1,2,3), параллельно прямой

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+7}{5}=\frac{z}{3}$$

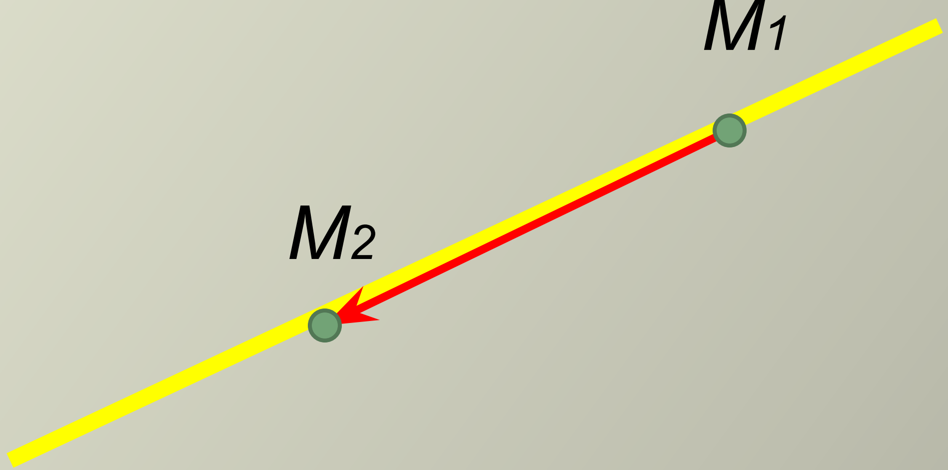
- ***Решение:***
- Так как прямые параллельны, то $\bar{S}(2,5,3)$ является направляющим вектором и искомой прямой. Следовательно:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{3}$$

- *Пример 2:*
- Написать уравнение прямой *L*, проходящей через точку М(1,2,3), и имеющей направляющий вектор $\overline{S}(2,0,5)$
- ***Решение:***
- Воспользуемся формулой:
- $$\frac{x-1}{2}=\frac{z-3}{5}$$ и y-2=0,
- то есть 5x-2z+1=0 и y=2. Это означает, что прямая лежит в плоскости y=2
-

Уравнения прямой в пространстве по двум точкам

- Заданы две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Написать уравнение прямой, проходящей через две точки.
-
-



- Прямая проходит через точку M_1 и имеет в качестве направляющего вектора $\overline{M_1M_2}$
- Уравнение имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

- ***Пример:*** Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1,4,-3)$ и $M_2(2,1,1)$.
- ***Решение:*** Воспользуемся формулой

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{4}$$

Параметрические уравнения прямой в пространстве

- Рассмотрим канонические уравнения прямой: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$
- Введем параметр t :

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

- $-\infty < t < +\infty$.

- Получим:

- $$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=t \\ \dfrac{y-y_0}{n}=t \\ \dfrac{z-z_0}{p}=t \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

- параметрические уравнения прямой в пространстве. В таком виде их часто используют в механике и физике, параметр t, обычно, время.

Приведение общих уравнений прямой в пространстве к каноническому виду

- Заданы общие уравнения прямой в пространстве
- $$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$
- Привести их к каноническому виду

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

- Для решения задачи нужно:
- 1. найти координаты (x_0, y_0, z_0) какой-либо точки, лежащей на прямой,
- 2. найти координаты (m, n, p) направляющего вектора этой прямой.
- Чтобы найти координаты точки M_0 придадим одной из координат произвольное численное значение, например полагаем $x=x_0$. Внеся его в систему (1), получаем систему двух уравнений с неизвестными y и z. Решаем ее. В результате на прямой найдена точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

- В качестве направляющего вектора примем вектор, который является результатом векторного произведения нормальных векторов двух плоскостей.

$$\overline{S} = (m, n, p) = \overline{n_1} \times \overline{n_2} =$$

$$= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \cdot \bar{k}$$

- Получаем координаты направляющего вектора:

$$m = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \qquad n = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \qquad p = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

- Общие уравнения прямой, записанные в каноническом виде:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

- *__Пример:__* Записать каноническое уравнение прямой

$$\begin{cases} x+2y-z+5=0 \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$$

- *__Решение:__* Положим z_0=0. Тогда:

$$\begin{cases} x+2y=-5 \\ x+y=1 \end{cases}$$

- Отсюда: : y_0=-6, x_0=7. Точка M_0, лежащая на прямой, имеет координаты : (7,-6,0).

- Найдем направляющий вектор. Нормальные векторы плоскостей имеют координаты

$$\overline{n_1}(1,2,-1) \qquad \overline{n_2}(1,1,1)$$

- Тогда $$\overline{S} = \overline{n_1} \times \overline{n_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\overline{i} - 2\overline{j} - \overline{k}$$

- Канонические уравнения прямой имеют вид:

$$\frac{x-7}{3} = \frac{y+6}{-2} = \frac{z}{-1}$$

Угол между двумя прямыми в пространстве, условие перпендикулярности и параллельности прямых

- прямые L_1 и L_2 заданы в каноническом виде с направляющими векторами
- $\overline{S}_1(m_1, n_1, p_1)$ и $\overline{S}_2(m_2, n_2, p_2)$
- $$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

- Углом между двумя прямыми называется угол между их направляющими векторами.
- $$cos\,(\angle L_1, L_2) = \cos(\angle \overline{S_1}, \overline{S_2}) = \frac{\overline{S_1}\cdot\overline{S_2}}{|\overline{S_1}|\cdot|\overline{S_2}|}$$

$$\cos(\angle L_1, L_2) = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

- Прямые перпендикулярны, если перпендикулярны их направляющие векторы:
- То есть $\overline{S_1} \cdot \overline{S_2} = 0$, или

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

- Прямые параллельны, если параллельны их направляющие векторы:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

- *Пример*: Найти угол между прямыми

- $$\frac{x-2}{1}=\frac{y-7}{3}=\frac{z}{-2} \quad \text{и} \quad \frac{x+10}{4}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-5}{2}$$

- *Решение:* Направляющие векторы прямых имеют координаты: (1,3,-2) и (4,1,2). Следовательно,

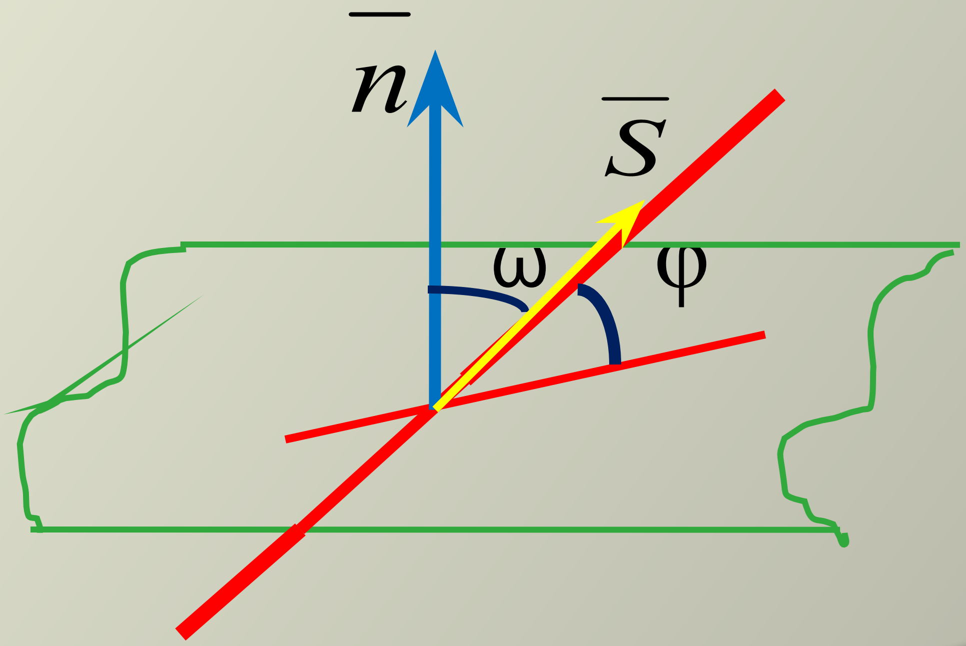
$$\cos(\angle L_1, L_2)=\frac{1\cdot 4+3\cdot 1+(-2)\cdot 2}{\sqrt{1+9+4}\cdot\sqrt{16+1+4}}=\frac{3}{7\sqrt{16}}$$

$$(\angle L_1, L_2)=\arccos\frac{3}{7\sqrt{16}}$$

Угол между прямой и плоскостью

- Задана плоскость *P*: $Ax+By+Cz+D=0$, и прямая *L*:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

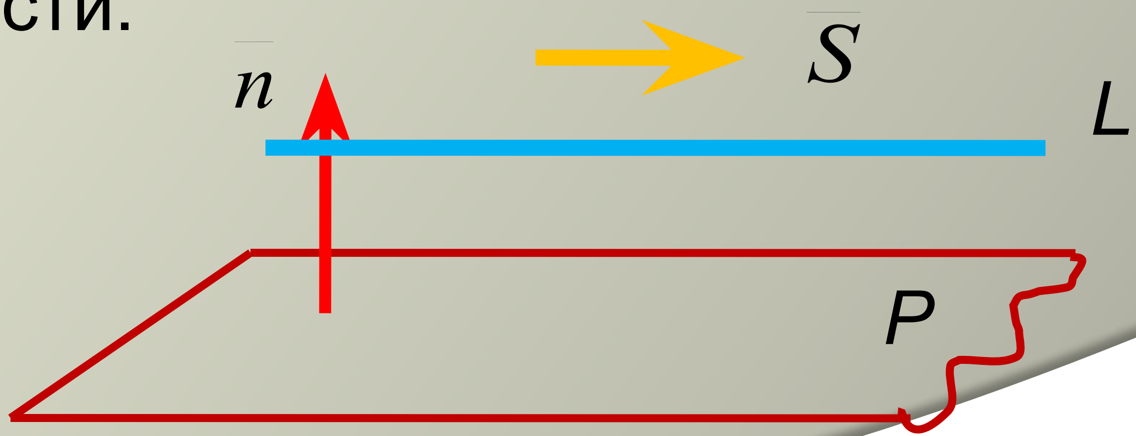
- 

- Углом между прямой и плоскостью называется угол *φ* между прямой и проекцией ее на плоскость.
- *ω* - угол между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой. *ω=π/2-φ*. Тогда *sinφ=cos(π/2-φ)*= =*cosω*. Но *cosω=cos*$(\angle \bar{n}, \bar{S})$
- Тогда
- *sinφ*= *cos*$(\angle \bar{n}, \bar{S}) = \dfrac{\left|\bar{n} \cdot \bar{S}\right|}{\left|\bar{n}\right| \cdot \left|\bar{S}\right|}$

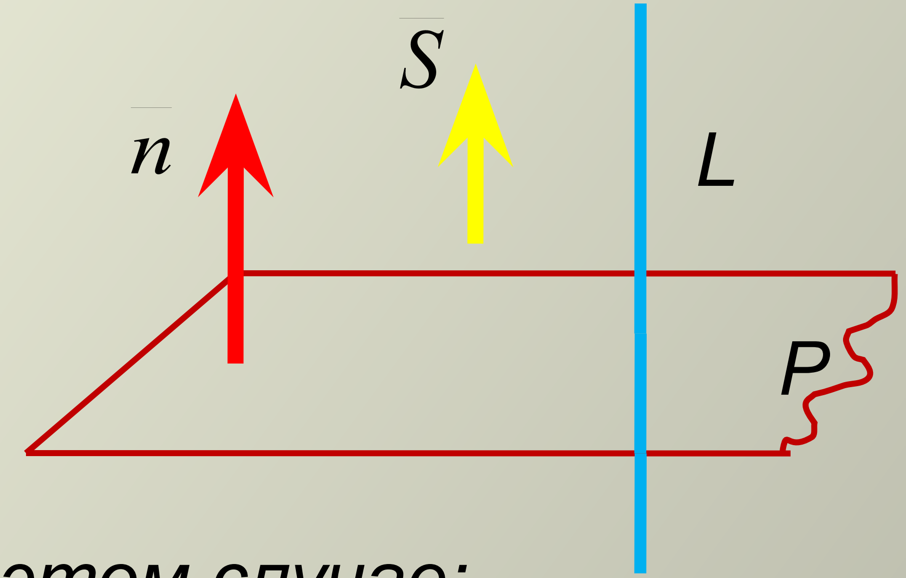
- $\sin\varphi = \dfrac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
- <u>*Пример*</u>: Найти угол между прямой:
- $$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-6}$$
- и плоскостью: $2x+y+2z-5=0$.
- <u>*Решение:*</u> Нормальный вектор плоскости имеет координаты: (2,1,2), направляющий вектор прямой имеет координаты: (3,2,-6).
- $$\sin\varphi = \frac{|6+2-12|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2} \cdot \sqrt{3^2+2^2+6^2}} = \frac{4}{21}$$

Условие перпендикулярности и параллельности прямой и плоскости.

- Задана прямая *L*: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$
- и плоскость *P*: $Ax+By+Cz+D=0$.
- Если прямая параллельна плоскости, то направляющий вектор прямой перпендикулярен нормальному вектору плоскости.



- Следовательно, их скалярное произведение равно нулю: $A{\cdot}m+B{\cdot}n+C{\cdot}p=0$.
- Если прямая перпендикулярна плоскости, то эти векторы параллельны.



- *В этом случае:*

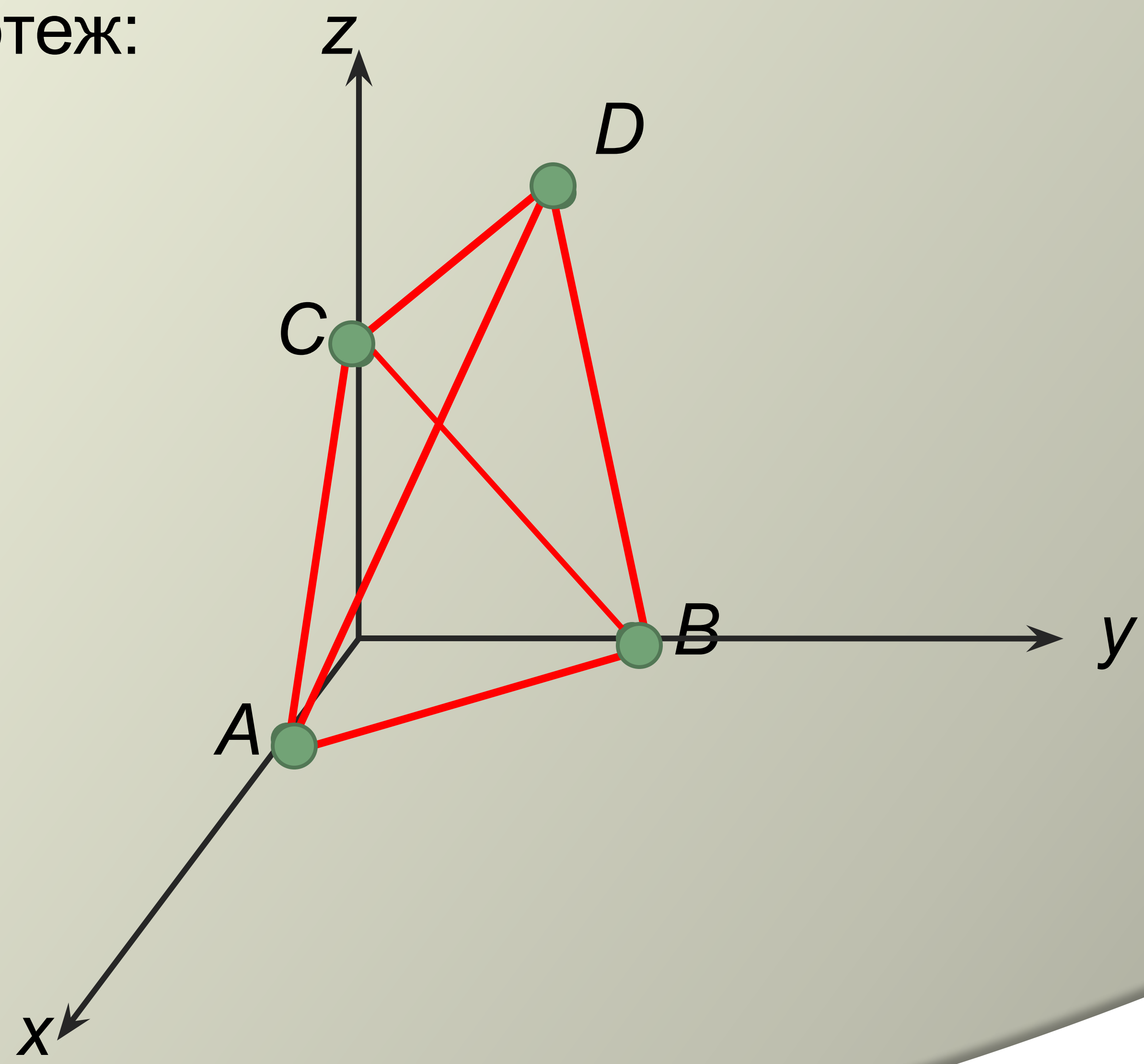
$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

- *Пример:*
- Написать уравнение прямой, проходящей через точку М(1,2,-3), перпендикулярно плоскости
- $4x+2y-z+5=0$.
- *Решение:*
- Так как плоскость перпендикулярна прямой, то нормальный вектор и направляющий вектор параллельны:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-1}$$

- Разберем типовую задачу.
- Даны вершины пирамиды *ABCD*: *A*(1,0,0); *B*(0,2,0); *C*(0,0,3), *D*(2,3,4). Найти:
- 1. Длину и уравнение ребра *AB*,
- 2. Уравнение и площадь грани *ABC*,
- 3. Уравнение и длину высоты, опущенной из вершины *D* на грань *ABC*,
- 4. Угол между ребром *AD* и гранью *ABC*,
- 5. Объем пирамиды.

Чертеж:



- 1. Введем в рассмотрение вектор $\overline{AB}$. Его координаты: (0-1;2-0;0-0), или (-1;2;0). Длина ребра *AB* равна модулю вектора .
- *AB*= $\sqrt{1+4+0}=\sqrt{5}$
- Уравнение прямой *AB (уравнение прямой по двум точкам)*:

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}$$

- Или 2*x*+*y*-2=0

- 2. Уравнение грани *ABC* (уравнение плоскости по трем точкам):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

- Отсюда: (x-1)·6-y·(-3)+z·2=0,
- или 6x+3y+2z-6=0.
- Площадь треугольника *ABC* найдем с помощью векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$

- Координаты вектора $\overline{AB}$ =(-1;2;0),
- вектора $\overline{AC}$ =(-1,0,3).
- $S_{\Delta_{ABC}} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$ кв.единиц.
- Векторное произведение:

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$$

- Тогда

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|6\bar{i}+3\bar{j}+2\bar{k}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{36+9+4}=\frac{7}{2}=3{,}5\ \textit{êâ.åä.}$$

- Уравнение высоты - уравнение прямой по точке *D*(2,3,4) и направляющему вектору. В качестве направляющего вектора – нормальный вектор грани *ABC*: $\overline{n} = (6,3,2)$

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{2}$$

- Для нахождения длины высоты используем формулу:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- Получим:

$$d=\frac{|6\cdot 2+3\cdot 3+2\cdot 4-6|}{\sqrt{36+9+4}}=\frac{27}{3}$$

- 4. Угол между ребром *AD* и гранью *ABC*. Уравнение грани *ABC*: 6*x*+3*y*+2*z*-6=0, нормальный вектор имеет координаты: (6,3,2). Напишем уравнения прямой, проходящей через точки *A*(1,0,0) и *D*(2,3,4):

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-0}{3-0}=\frac{z-0}{4-0}$$

- Эта прямая имеет направляющий вектор с координатами:(1,3,4). Тогда
- $$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$
- $$= \frac{|6\cdot 1 + 3\cdot 3 + 2\cdot 4|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{23}{\sqrt{26}\cdot 7} = \frac{23}{7\sqrt{26}}$$
- $$\varphi = \arcsin\frac{23}{7\sqrt{26}}$$

- 5. Объем пирамиды равен 1/6 объема параллелепипеда, построенного на векторах, как на сторонах. Используем смешанное произведение векторов. Координаты векторов: $\overline{AB}$ =(-1,2,0), $\overline{AC}$ =(-1,0,3), $\overline{AD}$ =(1,3,4)

  - $V_{\text{параллелепипеда}} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 23$

  - $V_{\text{пирамиды}}$=23/6 куб.ед.