Решение нелокальных краевых задач для уравнения влагопереноса методами теории случайных процессов

Шекихачев И.З.

Научный руководитель: М.М.Тхабисимова

- В последние годы интенсивно развивается теория случайных процессов и его прикладные направления. Связано это с тем, что для описания некоторых стохастических процессов детерминированные математические модели явно недостаточны. Классические модели явлений теорий случайных процессов часто предполагают определенность параметров, входящий в дифференциальные уравнения и граничные условия. Фактически эти параметры определяются в результате многократных измерений или наблюдений и, естественно, не всегда могут считаться детерминированными. Если процесс нельзя считать стационарным, то очень часто изменения во времени одних параметров приводит к изменению остальных. Другими словами, существует корреляционная связь между входными параметрами математической модели. В этих условиях уместно поставить вопрос о вероятностных свойствах поведения математической модели в рамках корреляционной теории. Для многих явлений, в том числе и для рассматриваемых в этой работе, такой подход к изучению случайных процессов оказывается вполне достаточным. В настоящей работе исследуется уравнение Аллера в стохастических условиях.

Цель и основные задачи магистерской диссертации

Целью данной работы является работы: Исследование стохастической модели для модифицированного уравнения влагопереноса в рамках корреляционной теории случайных процессов.

Задачами работы являются:

1. Дать анализ математических моделей влагопереноса с детерминированными и нелокальными краевыми условиями.
2. В рамках корреляционной теории случайных процессов составить алгоритм определения математического ожидания и среднеквадратического отклонения решения указанного уравнения.
3. На основе метода итерации и метода прогонки разработать алгоритм численной реализации стохастической задачи.
4. Составить программу на одном из языков программирования ЭВМ для определения математического ожидания решения задачи модифицированного уравнения влагопереноса.

Постановка задачи

- Проблема определения математического ожидания и корреляционной функции решения уравнения Аллера сводится к последовательному решению шести однотипных задач вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right] + f(x,t),$$

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \qquad 0 \le t \le T \qquad (1)$$

$$u(l,t) = -\frac{1}{p}\int_0^l u(x,t)dx + \mu_2(t), \quad 0 \le t \le T$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l.$$

Решение каждой из этих задач осуществляется методом итерации с применением алгоритма прогонки. Выбор метода итерации обусловлен тем, что матрицы сеточных уравнений, соответствующих нелокальным задачам не являются трехдиагональными, поэтому применять непосредственно метод прогонки нельзя.

Постановка задачи

Метод итерации позволяет избавиться от нелокальности в граничном условии. При этом задача записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \overset{s+1u}{u}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,t)\frac{\partial \overset{s+1u}{u}}{\partial t}\right] + \eta(x,t)\frac{\partial^3 \overset{s+1u}{u}}{\partial x^2 \partial t} + f(x,t),$$

$$\overset{s+1u}{u}(0,t) = \mu_1(t), \qquad (2)$$

$$\overset{s+1u}{u}(l,t) = \frac{1}{p}\int_0^{l_s} u(x,t)dx + \mu_{21}(t), \quad 0 \le t \le T,$$

$$\overset{s+1}{u}(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le l.$$

Перейдем непосредственно к построению алгоритма численного определения математического ожидания решения модифицированного уравнения.

Построим на прямоугольнике $[0 \le \square \le \square], [0 \le \square \le \square]$ сетку $\{\square_{\square} = \square, \square_{\square} = \square, \square = \square\}$. Для удобства изложения алгоритма введем обозначения

$$\overset{s+1}{u}(ih, j\tau) = W_t^{j}, \quad \overset{s+1}{u}(ih(j+1\tau) = W_t^{j+1}, \qquad (3)$$

Решение задачи на s-ой итерации запишем в следующем виде: $\overset{s}{W}$.

Заменим уравнение (3.3) его разностным аналогом

$$\frac{\square_{\square}^{\square+1} - \square_{\square}^{\square}}{\square} = \frac{1}{\square}\square\left(\square_{\square}^{\square}\frac{\square_{\square+1}^{\square} - \square_{\square}^{\square}}{\square} - \square_{\square-1}^{\square}\frac{\square_{\square}^{\square} - \square_{\square-1}^{\square}}{\square}\right) +$$

$$+ \frac{\square}{\square}\left(\frac{\square_{\square+1}^{\square+1} - 2\square_{\square}^{\square+1} + \square_{\square-1}^{\square+1}}{\square^{2}} - \frac{\square_{\square+1}^{\square} - 2\square_{\square}^{\square} + \square_{\square-1}^{\square}}{\square^{2}}\right) + \square_{1}(\square, \square). \qquad (4)$$

$$\square = 1,2,\ldots,\square - 1; \quad \square = 1,2,\ldots,\square - 1.$$

Граничные и начальные условия примут вид

$$\frac{\square_{\square}^{\square+1} - \square_{0}^{\square+1}}{\square} = \square_{\square}(\square),$$

$$\square_{\square}^{\square+1} = -\frac{1}{\square}\square_{0}^{\square}\square\square\,\square + \square_{2}(\square), \qquad (5)$$

$$\square_{\square}^{0} = \square_{0}.$$

Здесь $\square$, $\square$ — шаги по координате времени.

После несложных преобразований систему можно переписать в виде:

$$\square\square_{\square}^{\square+1} = \square\square_{\square}^{\square} + \frac{\square}{\square^{2}}\square\square\square_{\square-1}^{\square} - \frac{\square}{\square}\square\,\square\square_{\square-1}^{\square} + \square\frac{2\square}{\square} - \square\square_{\square-1}^{\square} - \square\square_{\square}^{\square}\square\,\square\square_{\square}^{\square} + \square\square\square_{\square}^{\square} - \frac{\square}{\square}\square\,\square\square_{\square+1}^{\square}\,\square +$$

$$+\frac{\square}{\square^{2}}\square\square\square_{\square+1}^{\square+1} - 2\square\square_{\square}^{\square+1} + \square\square_{\square-1}^{\square+1}\square + \square\square\square(\square\square, \square\square\square), \qquad (6)$$

$$\square = 1,2,\ldots,\square - 1;\ \square = 1,2,\ldots,\square\square - 1.$$

Систему (6) можно переписать в трехдиагональной форме, удобной для применения алгоритма прогонки :

$$\square\square\square_{\square-1}^{\square+1} - \square\square\square_{\square}^{\square+1} + \square\square\square_{\square+1}^{\square+1}. \qquad (7)$$

Здесь

$$\square\square = \frac{\square}{\square^{2}},\quad \square\square = \frac{\square}{\square^{2}} + 1, \qquad (*)$$

$$\square\square = \square\square_{\square}^{\square} + \frac{\square}{\square^{2}}\square\square\square_{\square-1}^{\square} - \frac{\square}{\square}\square\,\square\square_{\square-1}^{\square} + \square\frac{2\square}{\square} - \square\square_{\square-1}^{\square} - \square\square_{\square}^{\square}\square\,\square\square_{\square}^{\square} + \square\square\square_{\square}^{\square} - \frac{\square}{\square}\square\,\square\square_{\square+1}^{\square}\,\square + \square\square\square(\square\square, \square\square\square).$$

Согласно алгоритму прогонки решение (7) ищется в виде:

$$\square_{\square}^{\square+1} = \square_{\square+1}\square_{\square}^{\square+1} + \square_{\square+1}, \tag{8}$$

$$\square = 1,2,\dots,\square - 1;\ \square = 1,2,\dots,\square - 1.$$

Граничные условия представляются в форме

$$\square_0^{\square+1} = \square_1 \square_1^{\square+1} + \square_1, \qquad \square_{\square}^{\square+1} = \square_1 \square_1^{\square+1} + \square_2, \tag{9}$$

где

$$\square_1 = 1,\ \square_1 = \square_1 \square, \square\square,$$

$$\square_2 = 0,\ \square_2 = -\frac{1}{\square\square,\square\square}\sigma_{\square=0}^{\square}\frac{1}{\square}\square\square\square\square + \square_2\square,\square\square, \tag{10}$$

где $\square = \begin{cases} \frac{\square}{2}, & \text{если } \square = 0,\square \\ \square, & \text{если } \square = 1,\dots,\square - 1 \end{cases}$.

Подставляя представление (7) в (6) и используя формулы (9-10) можно получить следующие рекуррентные формулы для вычисления значения влажности на любом временном слое:

$□□_{□□} = □□_{□□}, \qquad □□_{□□} = □□_{□□},$

$1)\ □□_{□□+1} = \dfrac{□□}{□□ - □□□□_{□□}}, \qquad □□_{□□□+1} = \dfrac{□□□□_{□}+□□}{□□ - □□□□_{□}},$

$□ = 1, \dots, □□ - 1.$

$2)\ □□_{□□} = \dfrac{□_2 + □_2 □□_{□□}}{1 - □_2 □□_{□□}},$

$□□_{□}^{□+1} = □□_{□+1} □□_{□+1}^{□+1} + □□_{□+1}, \quad □ = □□ - 1, □□ - 2, \dots 1, 0; \; □ = 1, 2, \dots, □□ - 1,$

$□□_0^{□+1} = □_1 □□_1^{□+1} + □□$

Метод прогонки устойчив, если $□□ > 0$ и $□□ \geq 2□□$, что выполняется согласно формулам (*).

Здесь $□□, □□$ – число разбиений по пространственной и временной координате, $□, □□$ – соответствующие шаги. Заметим, что при последовательном решении однотипных уравнений и вычислении корреляционной функции достаточно вести счет для каждых двух временных слоев, с интервалом $□□$, а не решать задачи для всех значений времени. Это обстоятельство позволяет существенно экономить время счета, оперативную память и постепенно продвигаться по времени до нужного значения Т.

Наряду с математическим ожиданием решения $\square(\square,\square)$ вычисляется также среднеквадратическое отклонение значения влажности от ее среднего значения по формуле:

$$\square\square(\square,\square) = \square\,\overline{\square\square(\square\square,\square\square\;\square\square,\square\square)}\,.$$

Эта величина характеризует вероятность колебания влажности в окрестности ее среднего значения и является наряду с математическим ожиданием второй важнейшей характеристикой случайного процесса.

На основе рассматриваемого в работе алгоритма разработана программа, реализованная в среде, проведены тестовые расчеты на ЭВМ. Для приведенных в программе значений случайных функций и просчитан контрольный пример.

<u>Контрольный пример.</u>

Значения исходных данных, входящих в стохастическую модель, ввиду отсутствия данных наблюдений выбирались произвольно.

$$\square(\square,\square) = \square^2 - 2\square - 1$$

$$\square_1(\square) = \square$$

$$\square_2(\square) = 0$$

$$\square = (\ell^3 + 3\ell)/(3\ell^2 + 3)$$

$$\square = 1$$

$$\square = 1$$

Точным решением уравнения Аллера при этих значениях исходных данных является функция ⊠ = ⊠^{2}⊠+ ⊠ Результатом работы программы являются десять значений математического ожидания влажности ⊠(⊠, ⊠), зависящие от координаты ⊠ в опеределенный момент времени. Наличие источника влаги на правом конце участка, растущего со временем, приводит к росту математического ожидания влажности при изменении координаты от ⊠ = 0 до ⊠ = 1.

Точное решение задачи

u[0,1]=0;

u[1,1]=0.0105;

u[2,1]=0.042;

u[3,1]=00945;

u[4,1]=0.168;

u[5,1]=0.2625;

u[6,1]=0.378;

u[7,1]=0.5145;

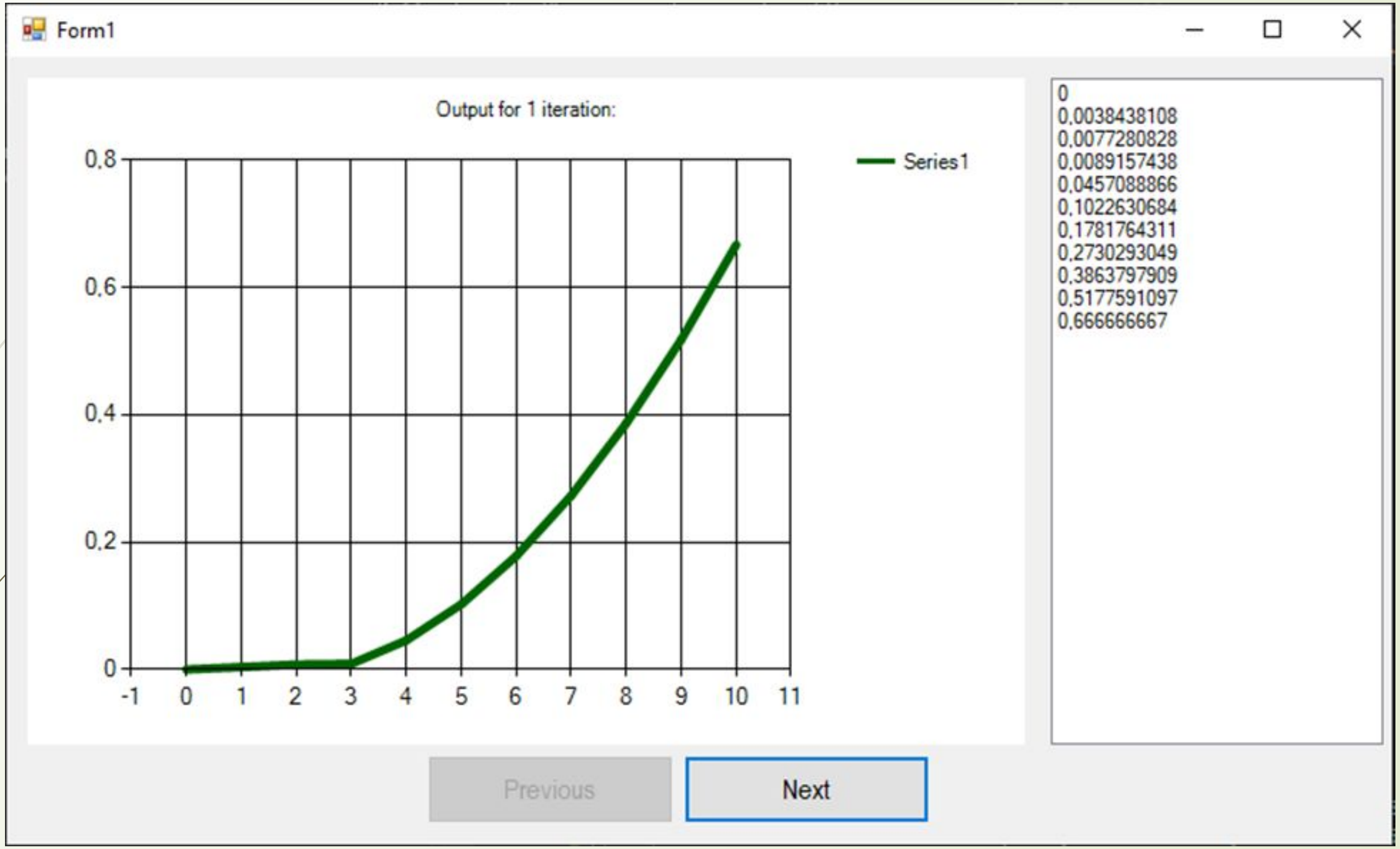
u[8,1]=0.672;

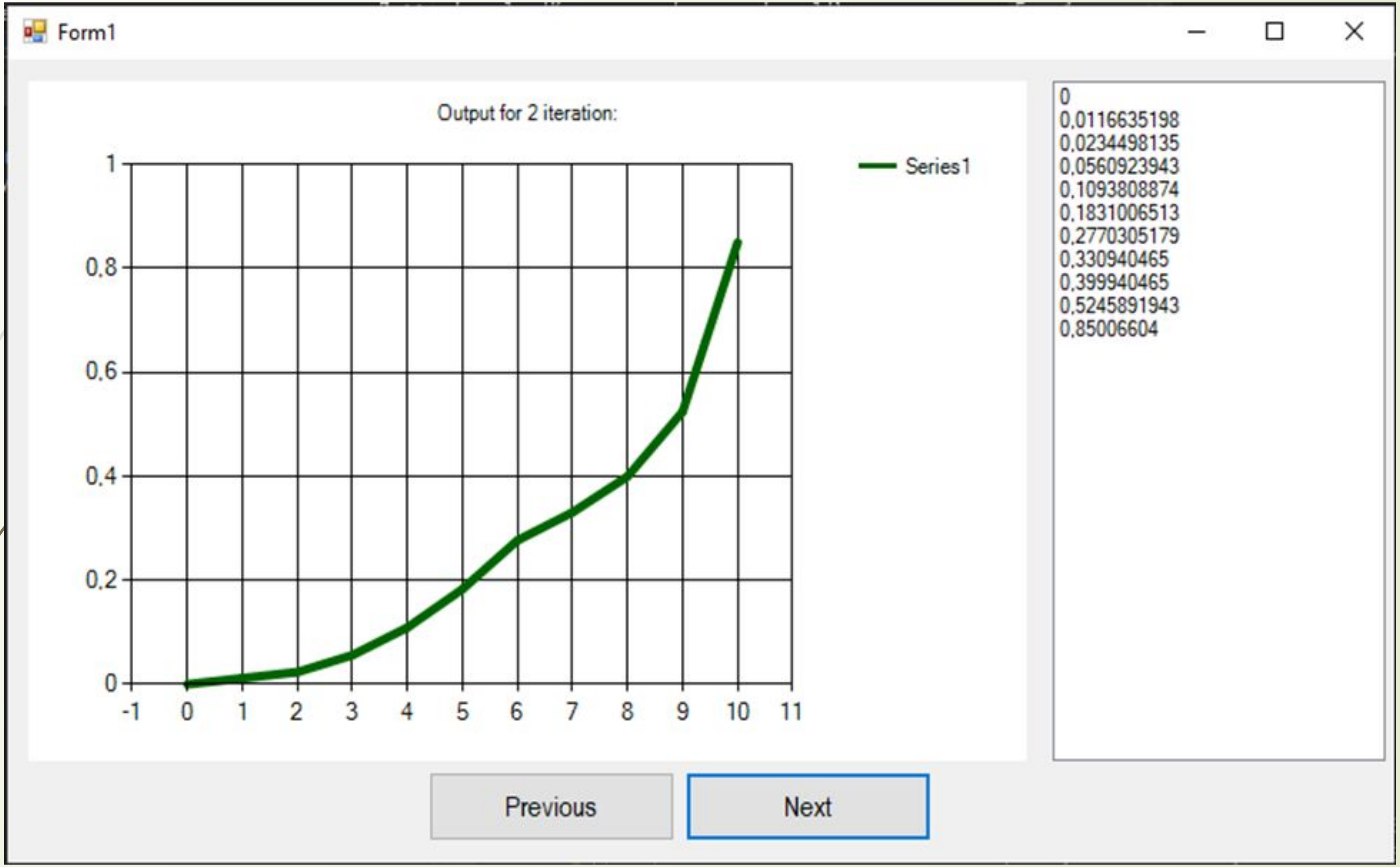
u[9,1]=0.9345;

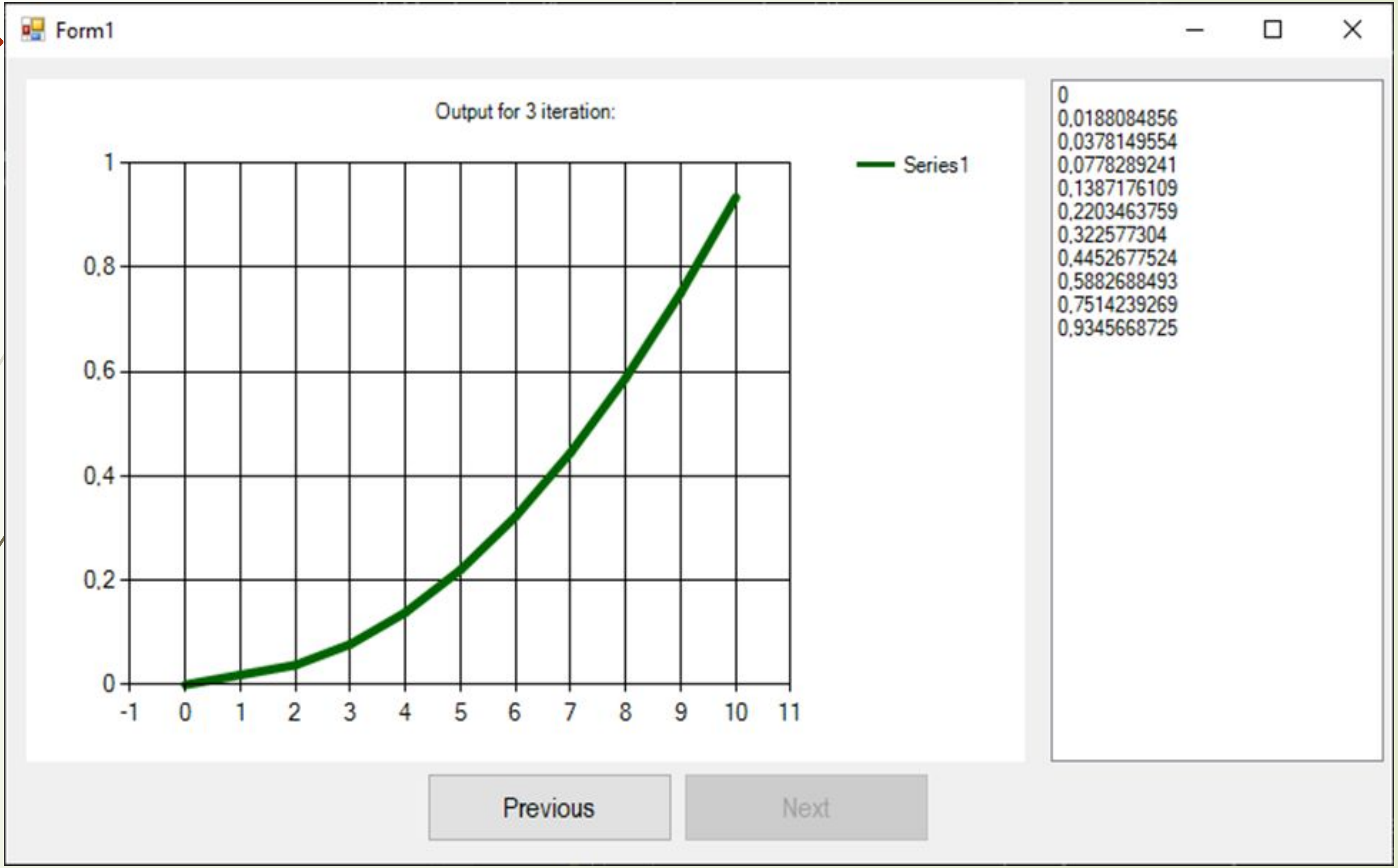
u[10,1]=1.05.

Описание программы

Предлагаемая вниманию программа реализована на языке программирования высокого уровня C# в среде разработки Microsoft visual studio 2019 в виде Windows-form приложения. Программа находит решение уравнения Аллера, значения исходных данных, входящих в стохастическую модель, выбираются произвольно, ввиду отсутствия данных наблюдений. Результатом программы являются значения математического ожидания влажности $y(x, t)$, зависящие от координаты x в определенный момент времени. Наличие источника влаги на правом конце участка, растущего со временем, приводит к росту математического ожидания влажности при изменении координаты от $x = 0$ до $x = 1$. Есть возможность посмотреть результаты вычислений на каждой итерации – значения выводятся в виде списка, и сразу же показывается график на основании полученных результатов.


Form1
Output for 1 iteration:
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
Series1
0
0,0038438108
0,0077280828
0,0089157438
0,0457088866
0,1022630684
0,1781764311
0,2730293049
0,3863797909
0,5177591097
0,666666667
Previous
Next


Form1
Output for 2 iteration:
Series1
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
0
0,0116635198
0,0234498135
0,0560923943
0,1093808874
0,1831006513
0,2770305179
0,330940465
0,399940465
0,5245891943
0,85006604
Previous
Next


Form1
Output for 3 iteration:
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
Series1
0
0,0188084856
0,0378149554
0,0778289241
0,1387176109
0,2203463759
0,322577304
0,4452677524
0,5882688493
0,7514239269
0,9345668725
Previous
Next

Выводы

1. Дан анализ математических моделей влагопереноса с детерминированными и нелокальными краевыми условиями.
2. Предложены итерационные методы решения нелинейной задачи Аллера.
3. Построена и исследована стохастическая модель для модифицированного уравнения влагопереноса. В рамках корреляционной теории случайных процессов составлен алгоритм определения математического ожидания решения указанного уравнения. При построении модели использовались идеи, изложенные в работах [2], [8].
4. На основе метода итерации и метода прогонки предложен алгоритм численной реализации стохастической задачи.
5. Составлена программа определения математического ожидания решения задачи типа (0.3) - (0.6) для модифицированного уравнения влагопереноса.

- Спасибо за внимание!