Линейная алгебра

- матрицы
- определители
- обратная матрица
- ранг матрицы
- системы линейных уравнений

матрицы

- Определение матрицы
- Виды матрицы
- Равенство матриц
- Сложение матриц
- Умножение матрицы на число
- Умножение матриц

Определение матрицы

Общий вид записи матрицы из *m* x *n* чисел:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Прямоугольная таблица, составленная из *m* x *n* чисел, называется **матрицей**.

Для обозначения матрицы применяются круглые скобки и прописные буквы А, В, С …

Числа a_{11}, a_{12}, … , a_{mn}, составляющие матрицу, называются её элементами.

Горизонтальные ряды матрицы называются строками матрицы

вертикальные - столбцами.

Индексы i и j элемента a_{ij}, где i=1, 2, …, m, j=1,2, ..., n, означают, что этот элемент расположен в i-й строке и j-м столбце.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрица обозначается также в форме $A(a_{ij})_{mxn}$, где i=1, 2, …, m, j=1, 2, …, n.

Виды матриц

- Квадратная матрица
- Диагональная матрица
- Единичная матрица
- Матрица-строка и матрица-столбец
- Транспонированная матрица

Квадратная матрица

- Матрица, у которой число строк равно числу ее столбцов называется квадратной матрицей. При этом число ее строк (столбцов) называется порядком матрицы.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & a_{ij} & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Числа a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} образуют главную диагональ матрицы,

а числа a_{n1}, $a_{(n-1)2}$, …, a_{1n} побочную диагональ.

Диагональная матрица

- Квадратная матрица, у которой

  все числа, не стоящие на главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной матрицей.***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{mm} \end{pmatrix}$$

ЕДИНИЧНАЯ МАТРИЦА

- Диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется ***единичной матрицей.***
- Единичную матрицу обозначают прописной буквой E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица-строка

- Матрица, состоящая только
  из одной строки,
  называется
  матрицей-строкой.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

Матрица-столбец

- Матрица, состоящая только
  из одной строки,
  называется
  матрицей-столбцом.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Транспонированная матрица

- Матрица называется ***транспонированной*** по отношению к матрице А, если
  столбцы матрицы
  являются
  соответствующими
  строчками матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

РАВЕНСТВО МАТРИЦ

- Две матрицы А и В называются **равными** (А=В), если они имеют одинаковые размеры и равные соответствующие элементы.

СУММА МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

- ***Суммой матриц*** A=(a_{ij}) и B=(b_{ij}) одинаковой размерностью mxn называется матрица C=(c_{ij}) = A(a_{ij})+B(b_{ij}) тех же размеров , что и заданные матрицы, элементы которой определяются правилом для всех $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, для всех i=1, 2, … , m, и j=1, 2, … , n.

Сумма матриц подчиняется переместительному и сочетательному законам, т.е. A+B=B+A и (A+B)+C=A+(B+C).

СУММА МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на число

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \ldots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \ldots & ka_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \ldots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

- ***Произведением матрицы*** A=(a_{ij}) размеров mxn на число k называется матрица B=(b_{ij}) тех же размеров, что и матрица A, элементы, которой определяются правилом $b_{ij}=ka_{ij}$, для всех i=1, 2, … , m, и j=1, 2, … , n.

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

- Пусть заданы матрица А размеров mxn и матрица В размеров nxp, т.е. такие, что число столбцов первой равно числу строк второй матрицы. Выберем строку с номером i из матрицы А и столбец с номером j из матрицы В. Умножим каждый элемент a_{i1}, a_{i2}, …, a_{in} выбранной строки на соответствующий элемент b_{1j}, b_{2j}, …, b_{nj} выбранного столбца и сложим полученные произведения, т.е. составим сумму $\boldsymbol{c_{ij}= a_{i1}\, b_{1j}+ a_{i2}\, b_{2j}+\ldots+ a_{in}\, b_{nj}}$.

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

- ***Произведением матрицы*** А размеров mхn на матрицу В размеров nхp называется матрица размеров mхp , элементы которой определяются по формуле $c_{ij}= a_{i1} b_{1j}+ a_{i2} b_{2j}+\ldots+ a_{in} b_{nj}$ для всех i=1, 2, … , m, и j=1, 2, … , p.

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+\dots+a_{1n}\cdot b_{m1} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22}+\dots+a_{1n}\cdot b_{m2} & \dots & a_{11}\cdot b_{1n}+a_{12}\cdot b_{2n}+\dots+a_{1n}\cdot b_{mn} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21}+\dots+a_{2n}\cdot b_{m1} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22}+\dots+a_{2n}\cdot b_{m2} & \dots & a_{21}\cdot b_{1n}+a_{22}\cdot b_{2n}+\dots+a_{2n}\cdot b_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}\cdot b_{11}+a_{m2}\cdot b_{21}+\dots+a_{mn}\cdot b_{m1} & a_{m1}\cdot b_{12}+a_{m2}\cdot b_{22}+\dots+a_{mm}\cdot b_{m1} & \dots & a_{m1}\cdot b_{1n}+a_{m2}\cdot b_{2n}+\dots+a_{mn}\cdot b_{mn} \end{pmatrix}$$

Определитель второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Определитель второго порядка,

соответствующий заданной матрице А –

число, равное

разности произведений элементов, расположенных на главной

и побочной его диагоналях.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Определитель не измениться, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

При перестановки местами двух строк определитель меняет свой знак на противоположный

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

При перестановки местами двух столбцов определитель меняет свой знак на противоположный

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0$$

Определитель , имеющий две одинаковые строки, равен нулю

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = 0$$

Определитель , имеющий два одинаковых столбца, равен нулю

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Если все элементы какой-либо строки определителя умножить на одно и то же число, то определитель умножится на это число

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\Delta_1$$

Если все элементы какого-либо стролбца определителя умножить на одно и то же число, то определитель умножится на это число

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} \\ ka_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\Delta_1$$

Общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ka_{11} & ka_{12} \end{vmatrix} = 0$$

Определитель, у которого элементы двух его строк пропорциональны, равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} \\ a_{21} & ka_{21} \end{vmatrix} = 0$$

Определитель, у которого элементы двух его столбцов пропорциональны, равен нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{11}^* & a_{12}+a_{12}^* \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}^* & a_{12}+a_{12}^* \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Если каждый элемент какой-либо строки определителя есть сумма двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у одного из них элементами соответствующей строки являются первые слагаемые, у другого – вторые. Оставшиеся элементы этих определителей те же, что и у данного.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a_{11}^* & a_{12} \\ a_{21}+a_{21}^* & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}^* & a_{12} \\ a_{21}^* & a_{22} \end{vmatrix}$$

Если каждый элемент какого-либо столбца определителя есть сумма двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей, у одного из них элементами соответствующего стролбца являются первые слагаемые, у другого – вторые. Оставшиеся элементы этих определителей те же, что и у данного.

- Определитель не изменится, если к элементам какой-либо его строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix}$$

- Определитель не изменится, если к элементам какого-либо его столбца прибавить соответствующие элементы другого столбца, умноженные на одно и то же число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица третьего порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Определитель третьего порядка

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}-$$
$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11}$$

Определитель третьего порядка, соответствующий квадратной матрице А третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11}$$

Вычислить с собственными знаками произведения элементов, лежащих на главной диагонали в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны этой диагонали.

Найти произведения элементов, лежащих на побочной диагонали и в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали, и взять их с противоположными знаками.

Найти общую сумму всех произведений.

Минор M_{ij} элемента a_{ij}, где i, j=1, 2, 3 определителя третьего порядка, называется определитель второго порядка, полученный из данного вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij}, где $i, j=1, 2, 3$, называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, где $i, j=1, 2, 3$.

Определитель равен сумме произведений элементов любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения.

$\Delta= a_{11}A_{11}+ a_{12}A_{12}+ a_{13}A_{13}=$

$= a_{21}A_{21}+ a_{22}A_{22}+ a_{23}A_{23}=$

$=\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots=$

$= a_{31}A_{31}+ a_{32}A_{32}+ a_{33}A_{33}=$