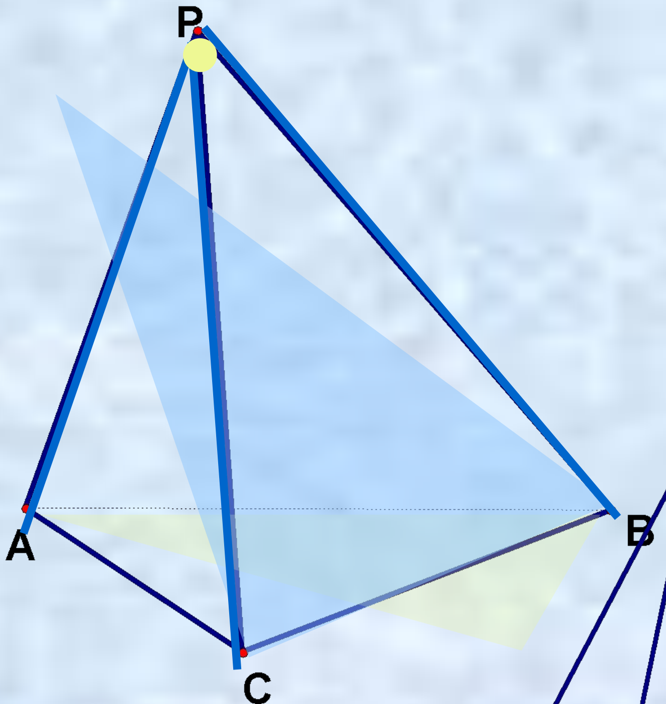
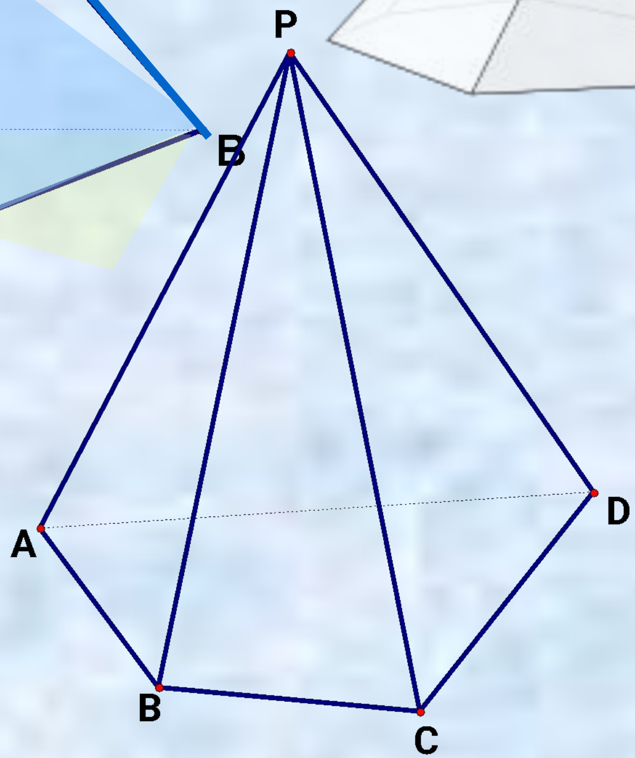
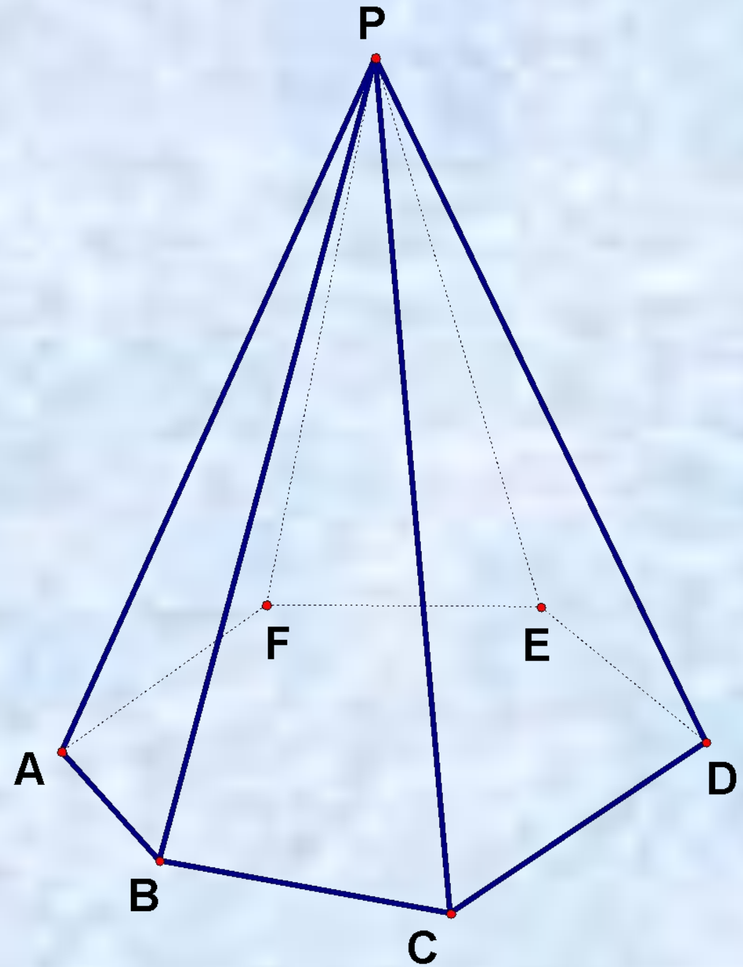


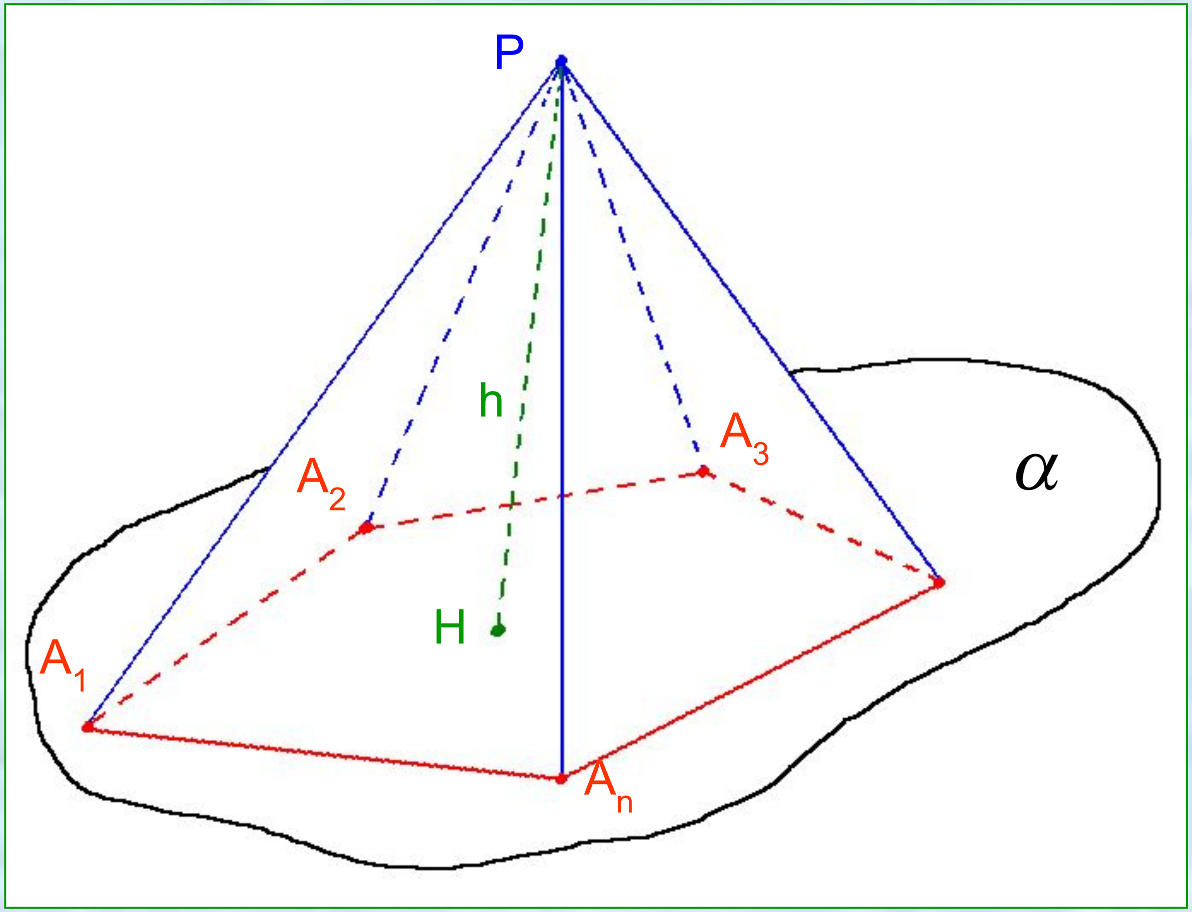




Пирамиды

Пирамида

– это многогранник, состоящий из n-угольника $A_1A_2A_3...A_n$ (основание) и n треугольников (боковые грани), имеющих общую вершину (P).



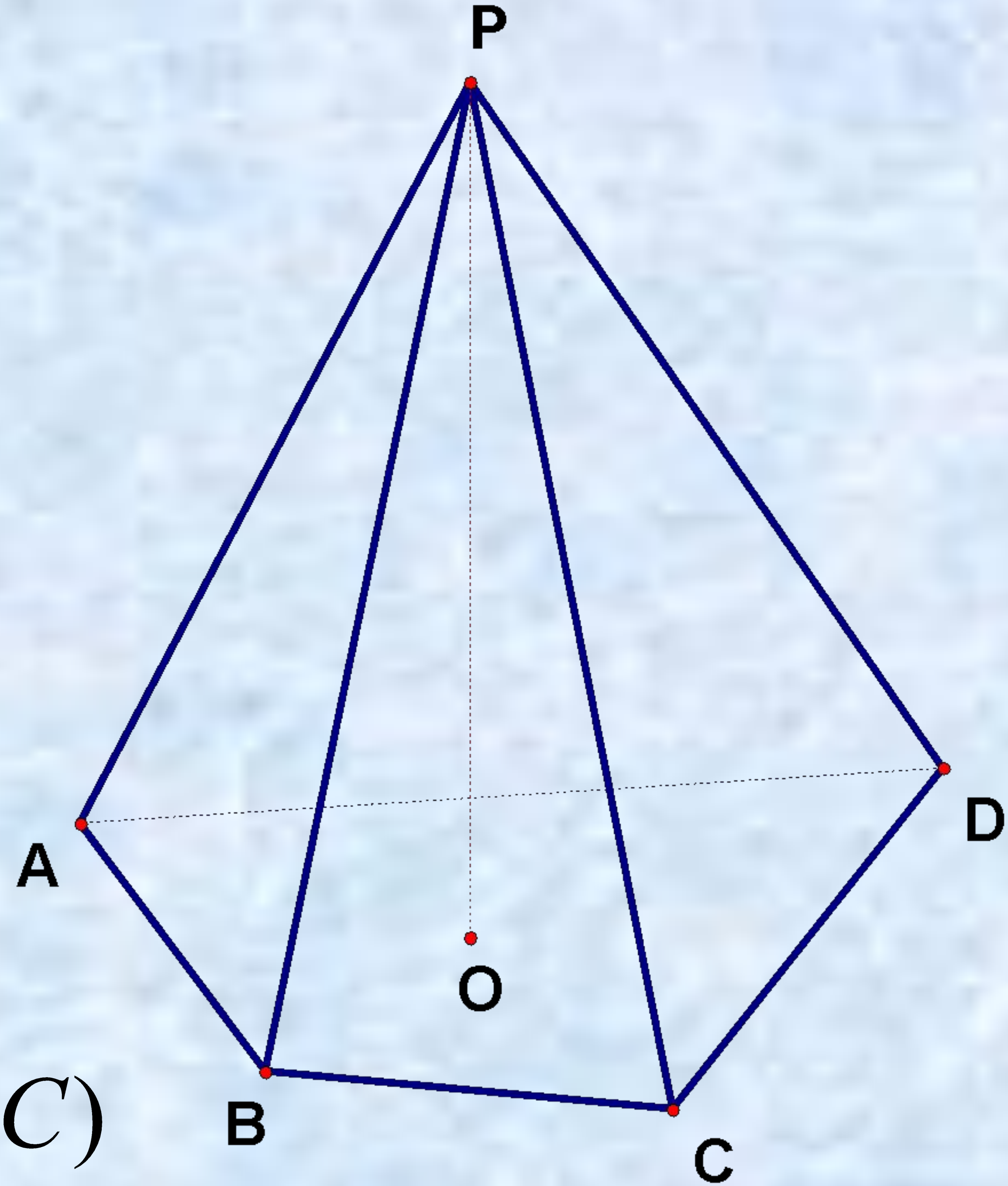
PA_1; PA_2; PA_3; ... ; PA_n – боковые ребра

A_1A_2; ... ;A_1A_n – ребра основания

PH – высота пирамиды - h

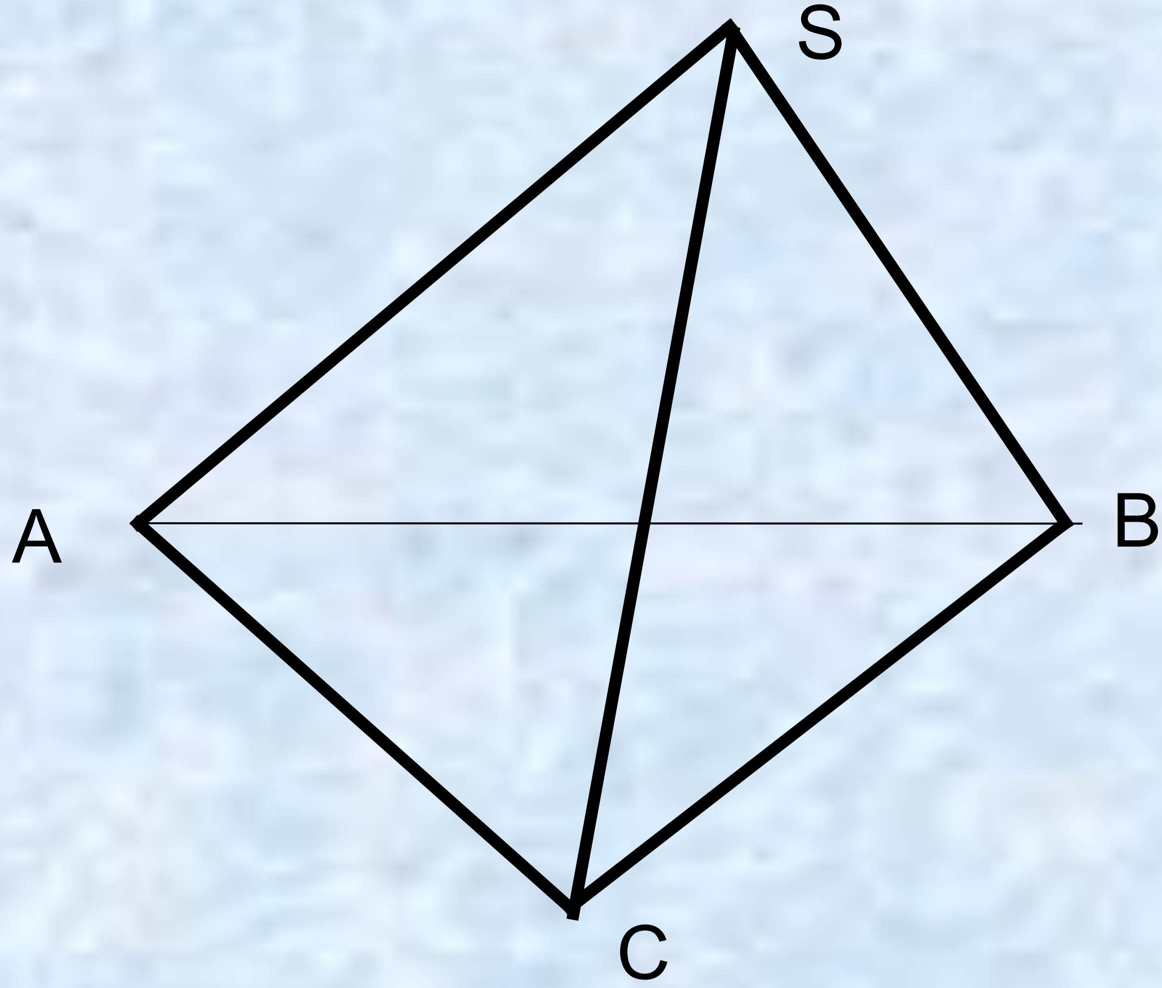
$$S_{п.п.} = S_{бок.} + S_{осн.}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$

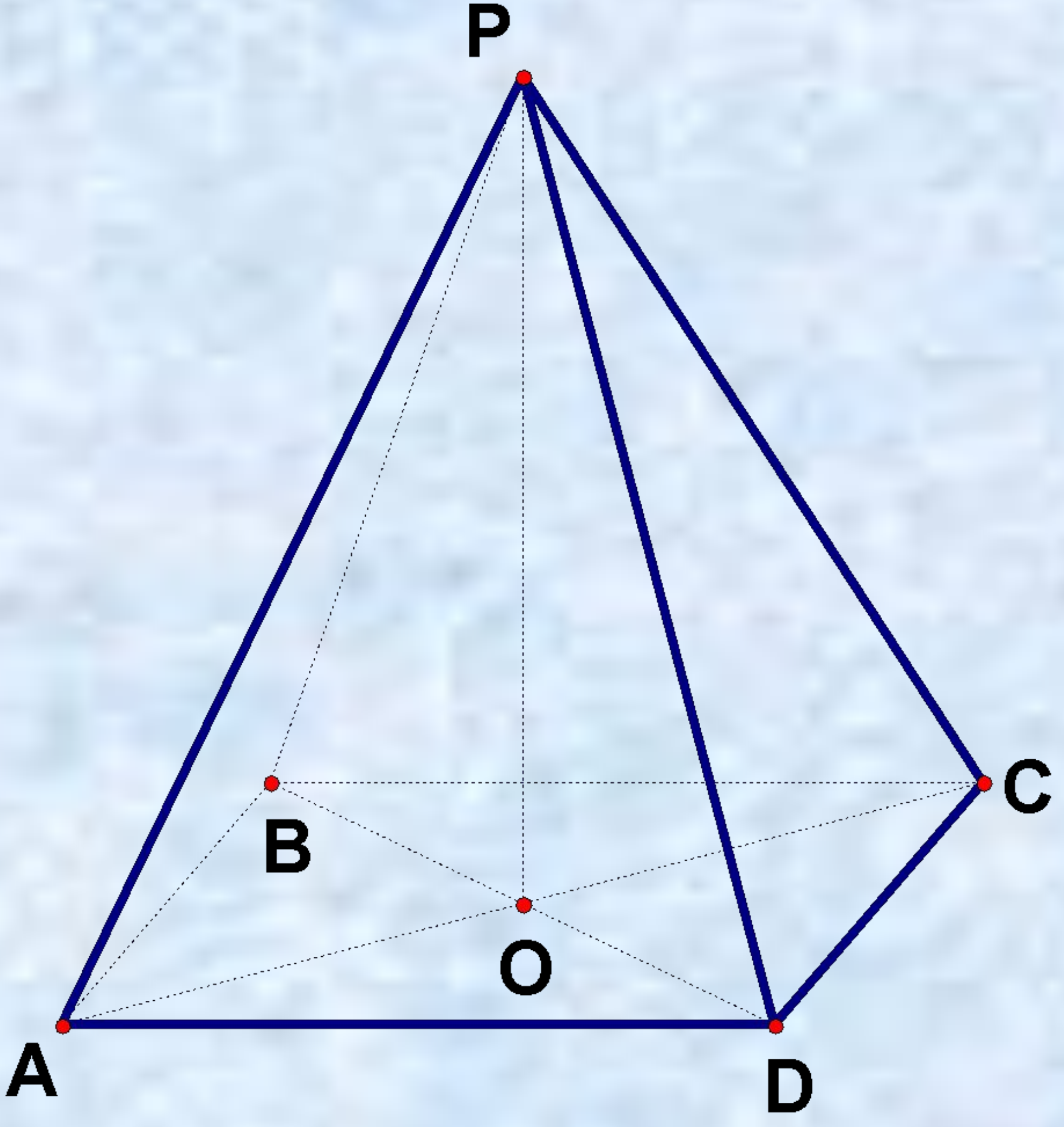


$$PO \perp (ABC)$$

SABC - тетраэдр

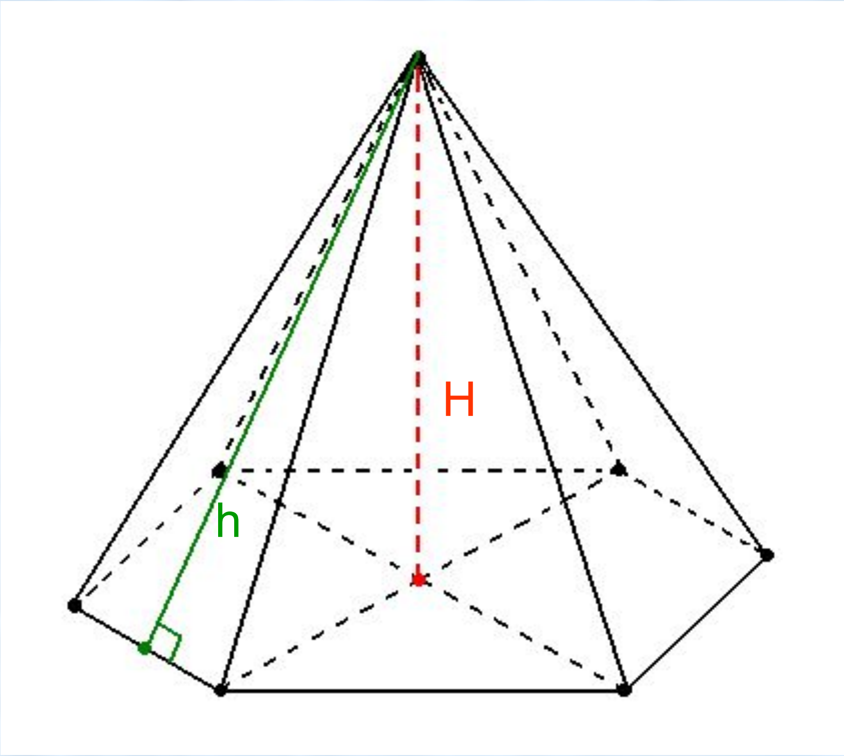


Правильная пирамида



Правильная пирамида

- основание – правильный многоугольник, вершина проецируется в центр основания;
- боковые ребра – равны;
- боковые грани – равные равнобедренные треугольники.



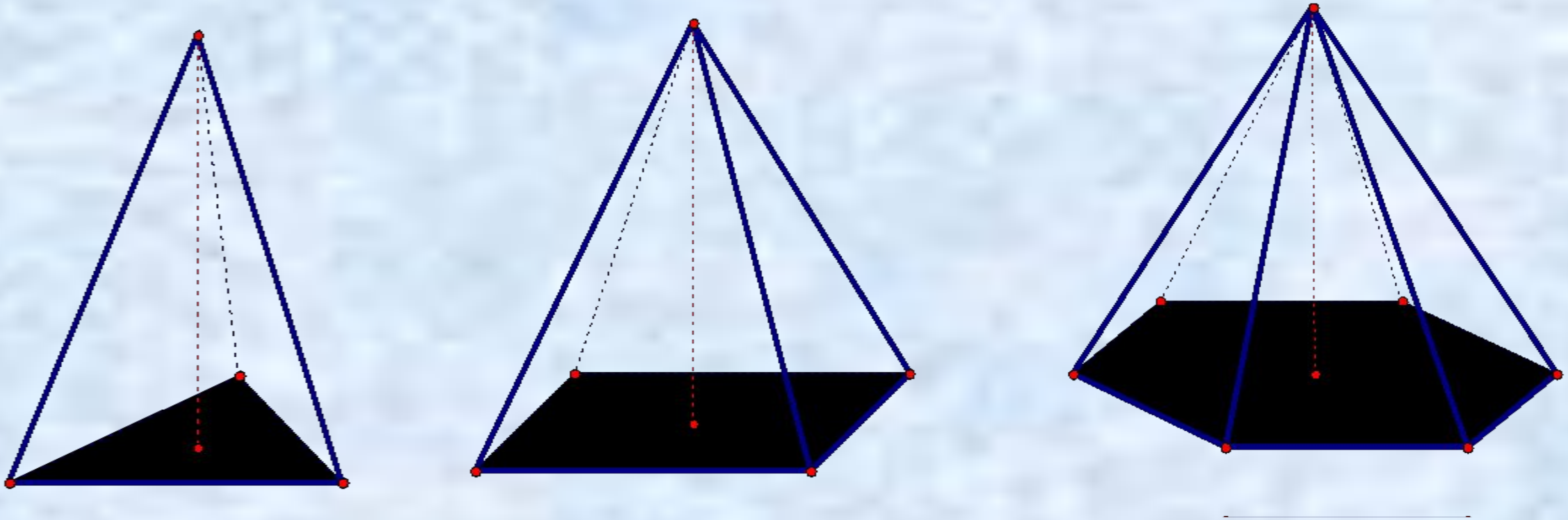
H – высота, h – апофема

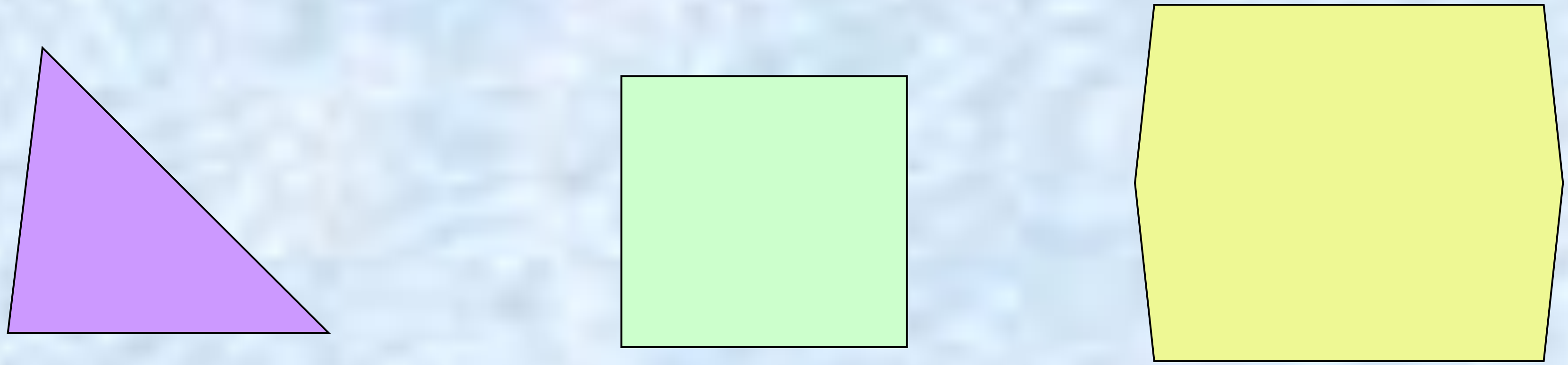
$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot P_{осн.} \cdot h$$

$$S_{п.п.} = S_{бок.} + S_{осн.}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$

Правильные пирамиды

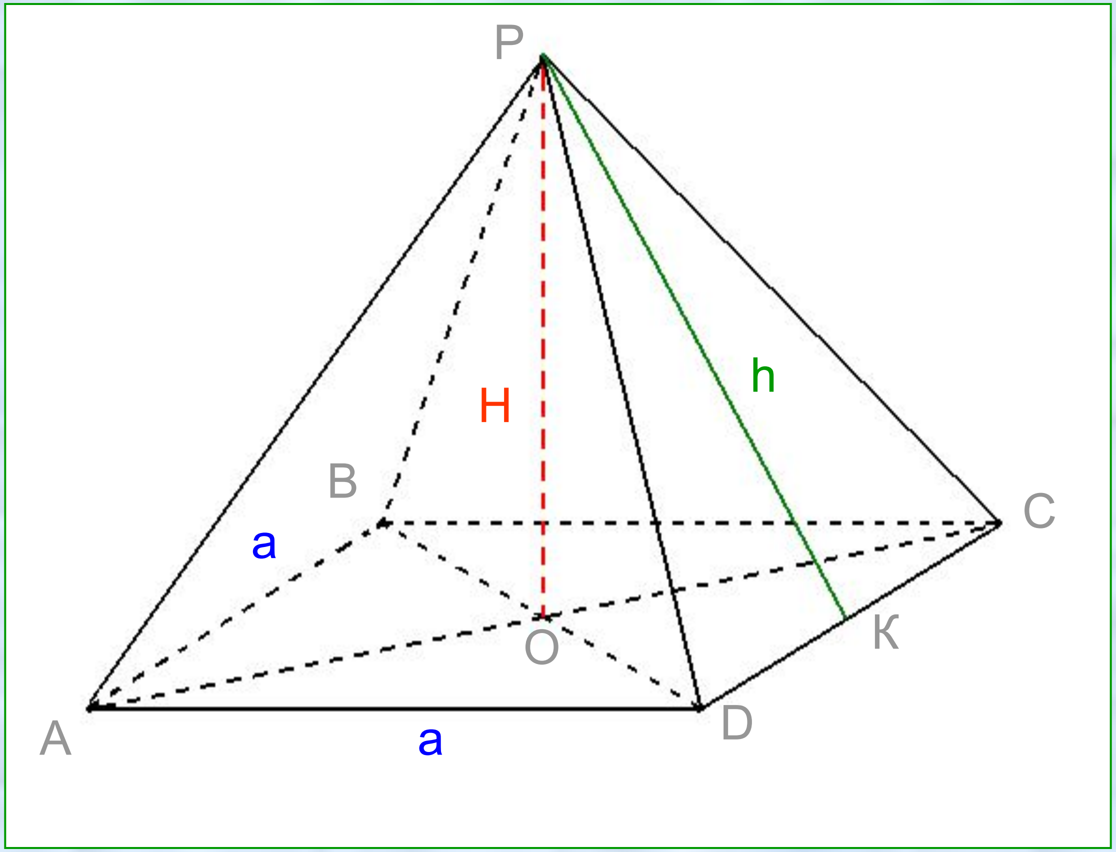




Правильная четырехугольная пирамида

H – высота, h – апофема, a – сторона основания

AB = BC = CD = DA = a (в основании – квадрат)



К – середина DC

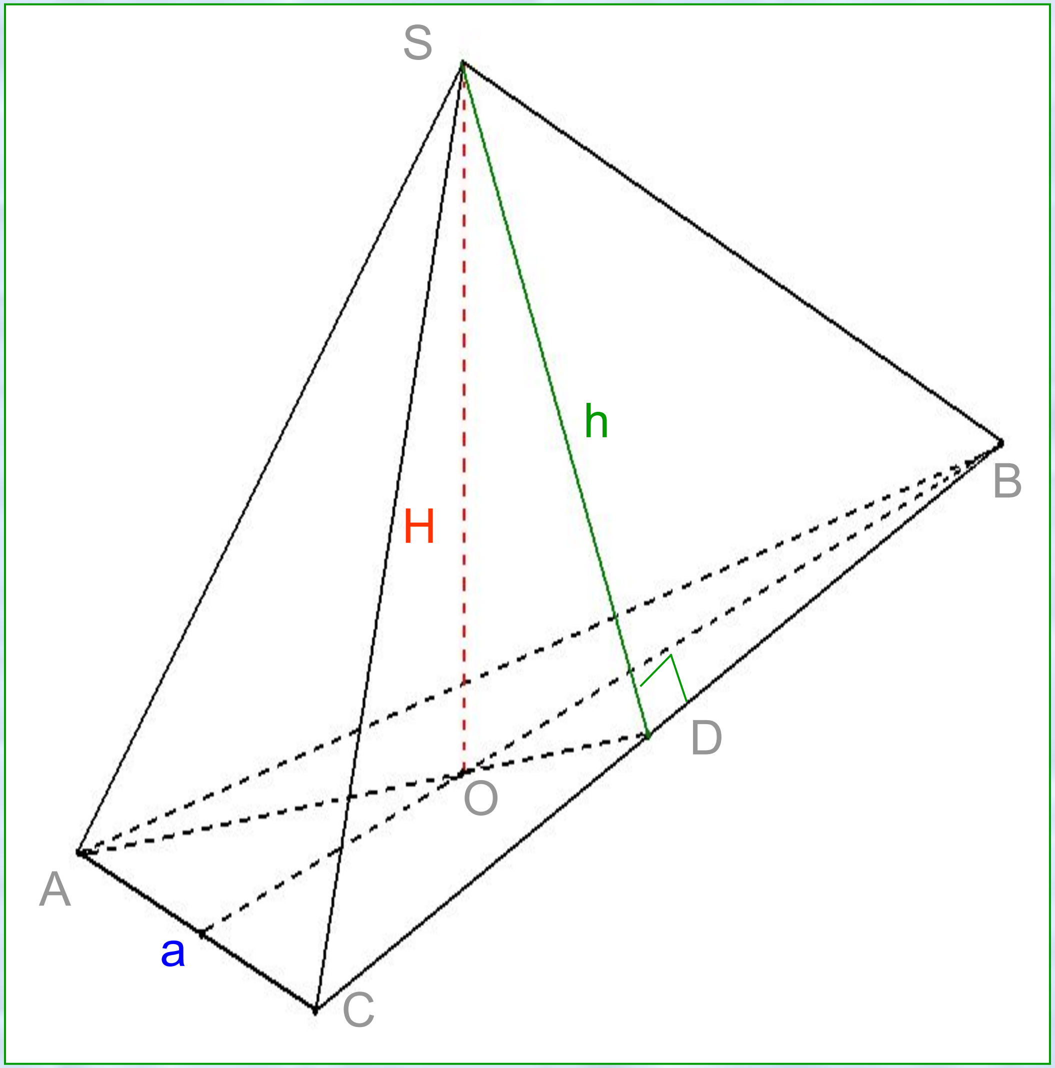
$$OK = \frac{1}{2} \cdot a \qquad BD = a \cdot \sqrt{2}$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot h = 2 \cdot a \cdot h$$

$$S_{п.п.} = a^2 + 2 \cdot a \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H$$

Правильная треугольная пирамида



H – высота, h – апофема

AB = BC = AC = a

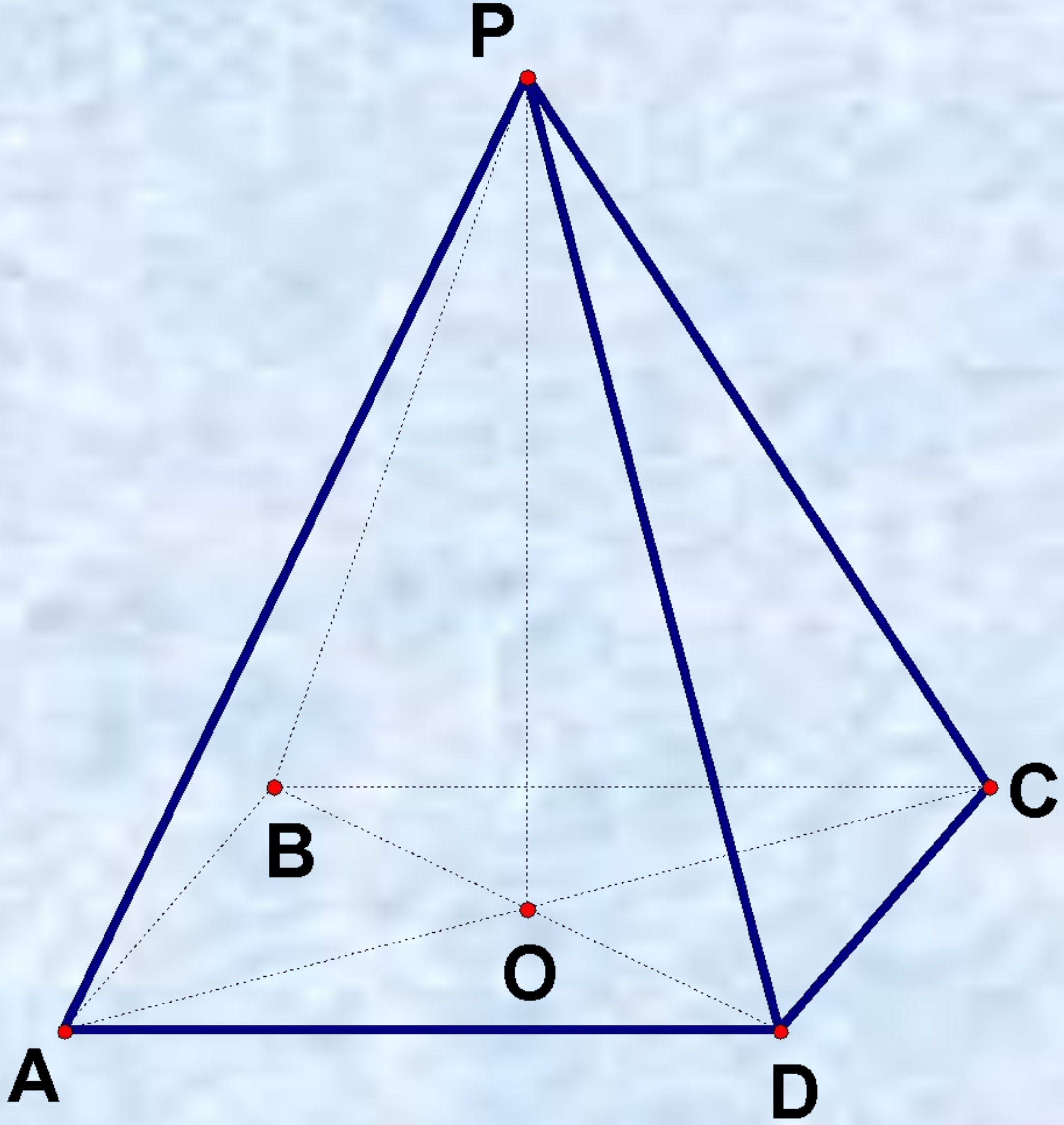
$$DO = \frac{1}{3} \cdot AD \qquad AO = \frac{2}{3} \cdot AD$$

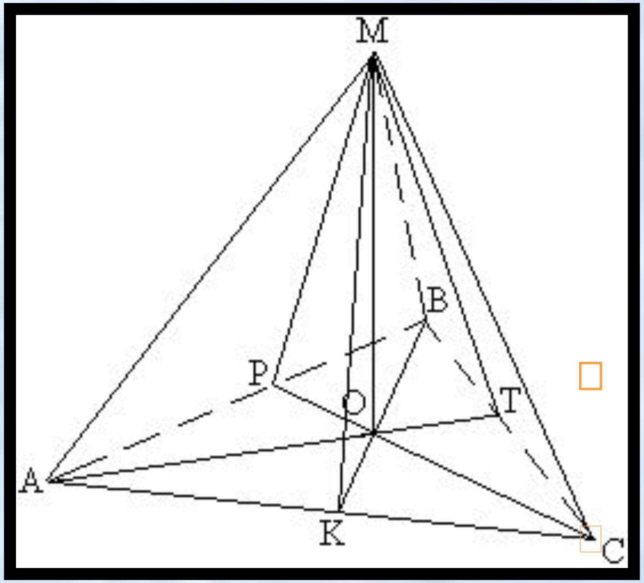
$$S_{бок.} = \frac{3}{2} \cdot a \cdot h$$

$$S_{п.п.} = \frac{3}{2} \cdot a \cdot h + \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot H$$

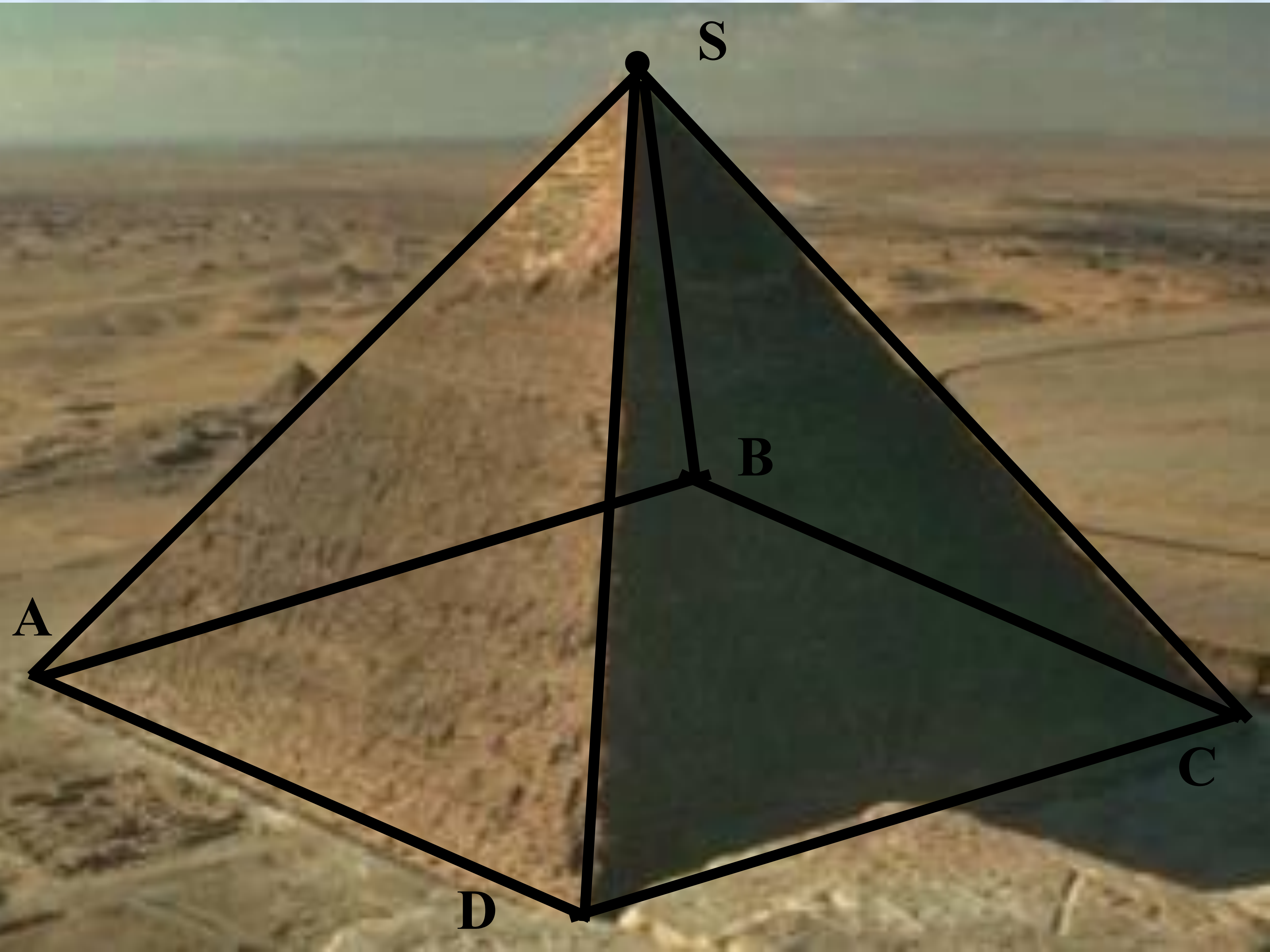
Свойства боковых ребер и боковых граней правильной пирамиды

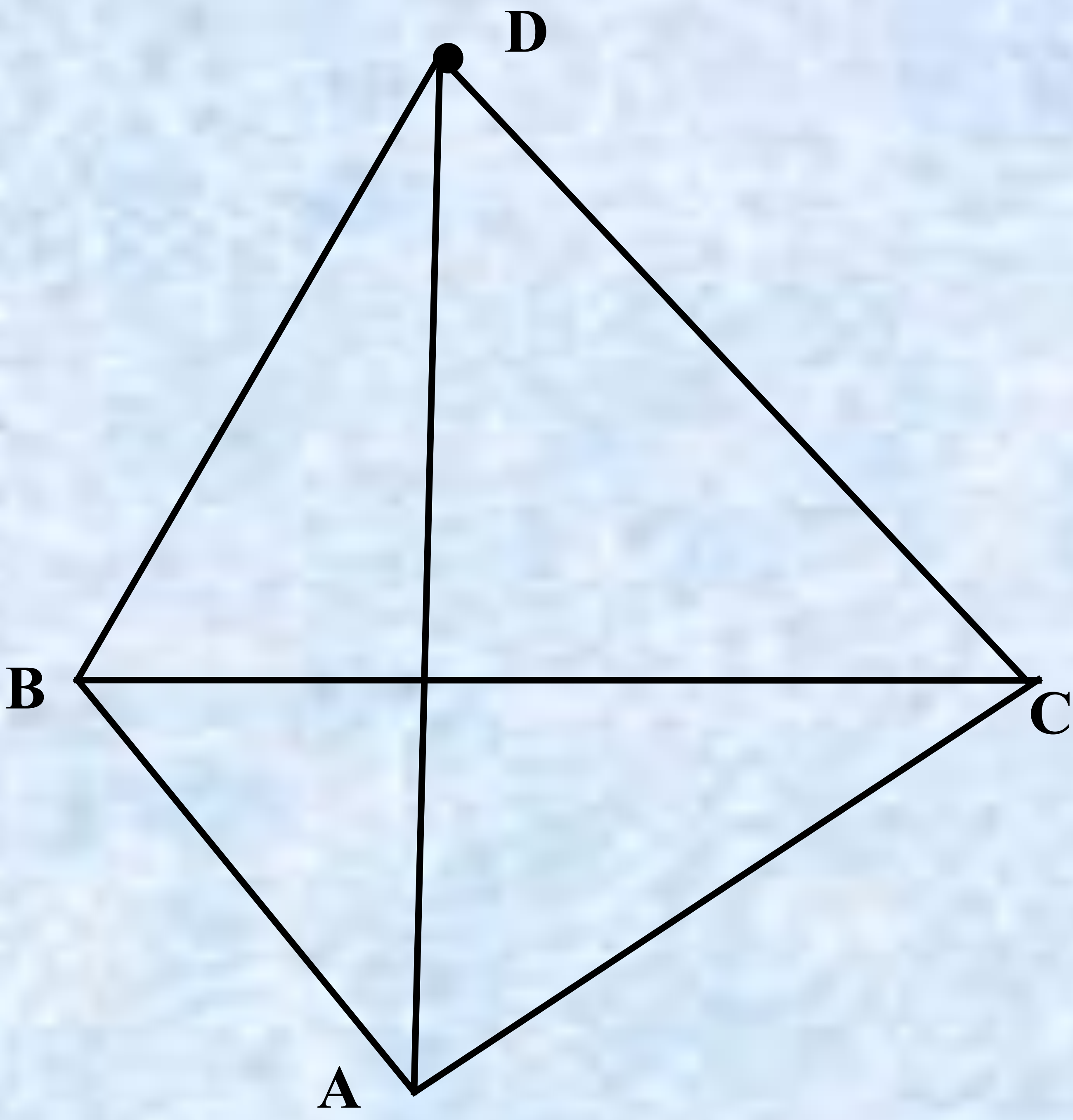




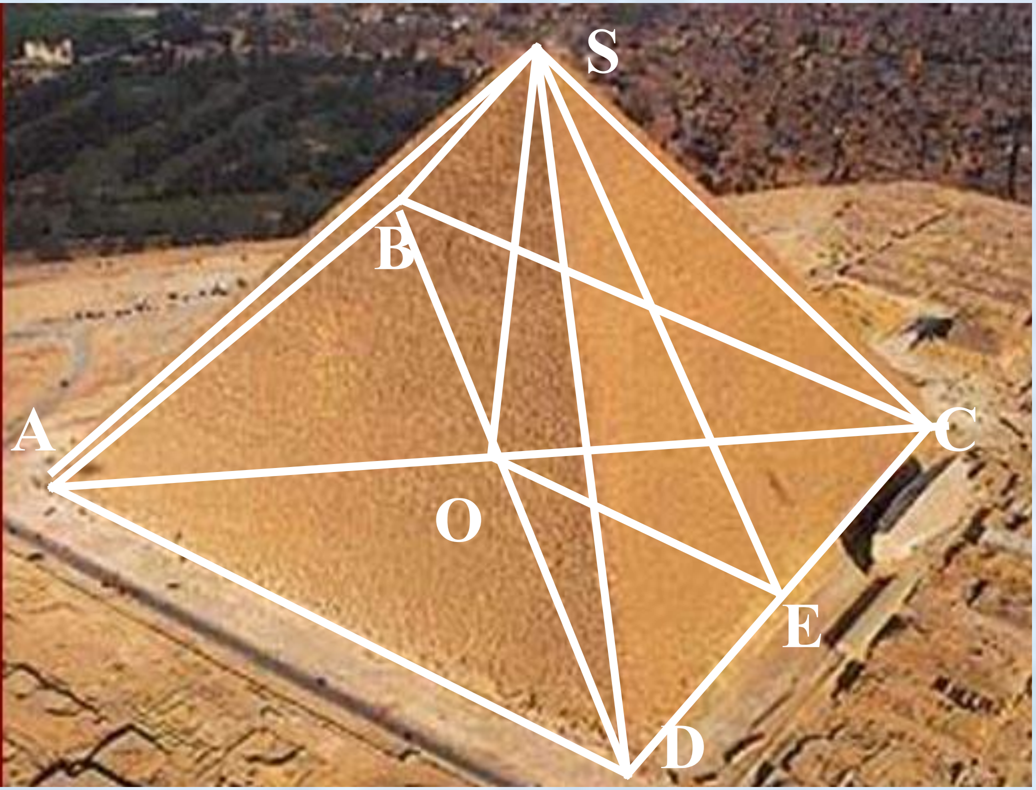
Отметим некоторые свойства правильной n-угольной пирамиды на примере треугольной пирамиды. Как известно центр правильного треугольника совпадает с центром вписанной и описанной около него окружности. Поэтому отрезки АО, ВО и СО равны как радиусы. Поэтому прямоугольные треугольники АОМ, ВОМ и СОМ равны по двум катетам (МО-общая). Из равенства этих треугольников следует равенство соответствующих сторон: **АМ=ВМ=СМ – боковые ребра равны.**

- **Свойство 1: В правильной n-угольной пирамиде все боковые ребра равны между собой.**
  Из равенства ребер следует и равенство боковых граней. Треугольники АВМ, ВСМ и АСМ равны по трем сторонам.
  Свойство 2: **Все боковые грани правильной n-угольной пирамиды суть равные равнобедренные треугольники, поэтому все плоские углы при вершине равны, все плоские углы при основании равны.**
  Из равенства прямоугольных треугольников ОРМ, ОТМ и ОКМ (ОТ=ОР=ОК как радиусы вписанной окружности; МО - общая) **следует равенство всех двугранных углов при основании пирамиды РОРМ=РОТМ=РОКМ**
- **Свойство 3: В правильной n-угольной пирамиде все двугранные углы при основании равны.**


S
B
A
C
D


D
B
C
A

1. В основании пирамиды Хеопса – квадрат со стороной 230м, тангенс угла наклона боковой грани к основанию равен 1,2. Найти высоту самой высокой египетской пирамиды, если основание ее лежит в центре квадрата.



Решение:

1. $AC \cap BD = O$

2. Пирамида правильная $\Rightarrow$

$SO \perp (ABC)$

3. $OE \parallel AD \Rightarrow OE \perp CD \Rightarrow$

4. $SE \perp CD$ (по теореме о 3 перпендикулярах)

5. Δ SOE – п\у $tg\ E = SO : OE$

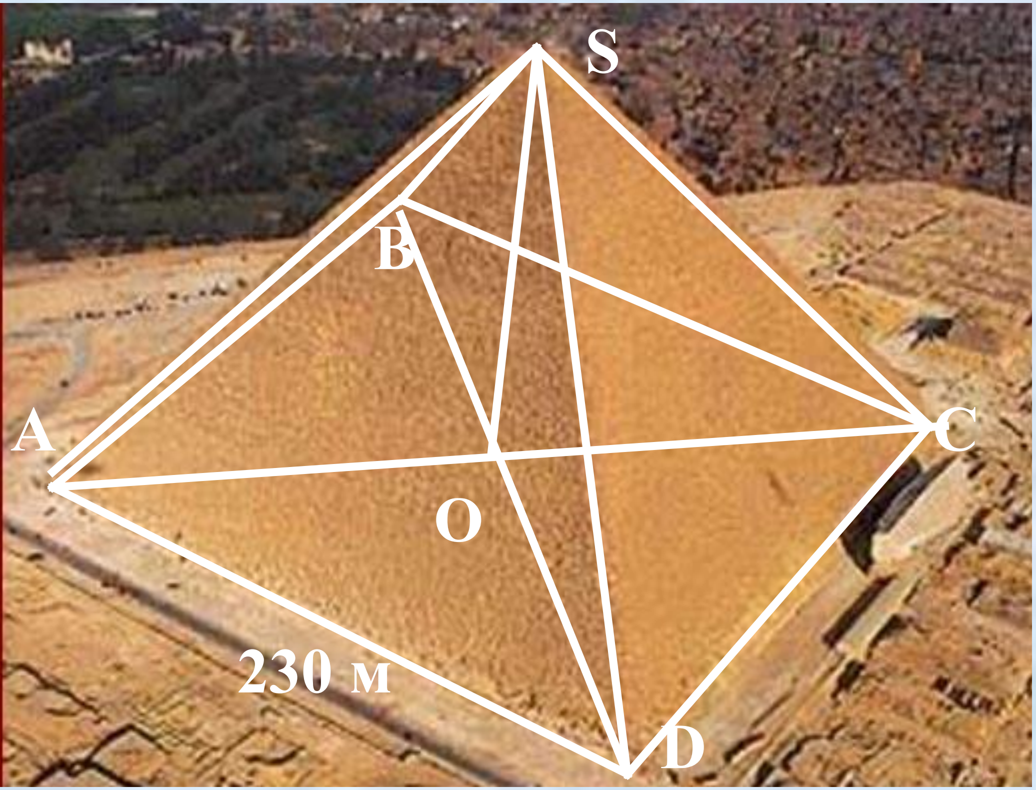
6. $OE = 0{,}5AD = 115$м

7. $SO = OE \cdot tg\ E = 115 \cdot 1{,}2 = 138$ м

Ответ: 138 м.

2. В основании пирамиды Хеопса – квадрат со стороной 230м, высота пирамиды 138 м. Найти боковое ребро самой высокой египетской пирамиды.

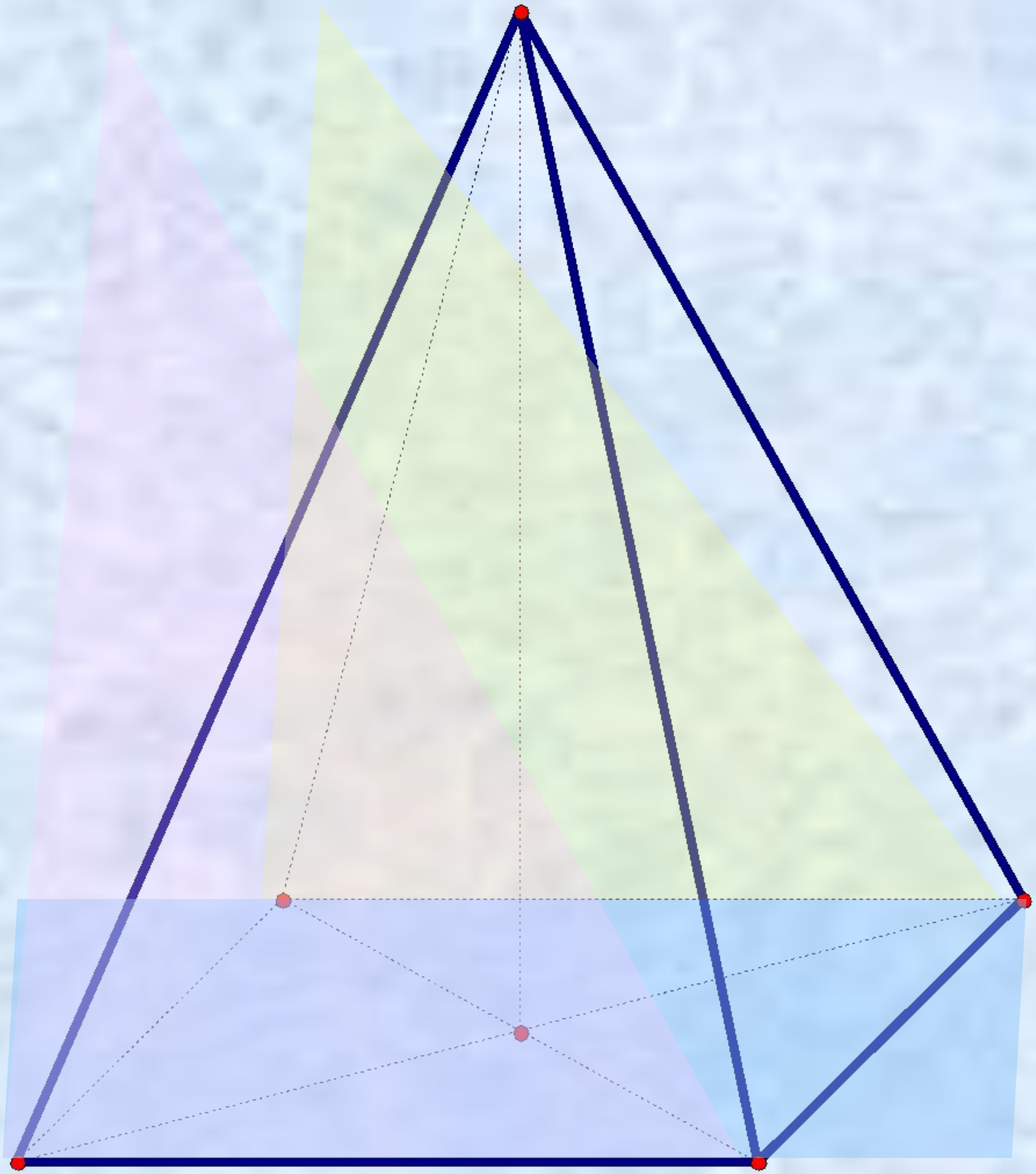
Решение:



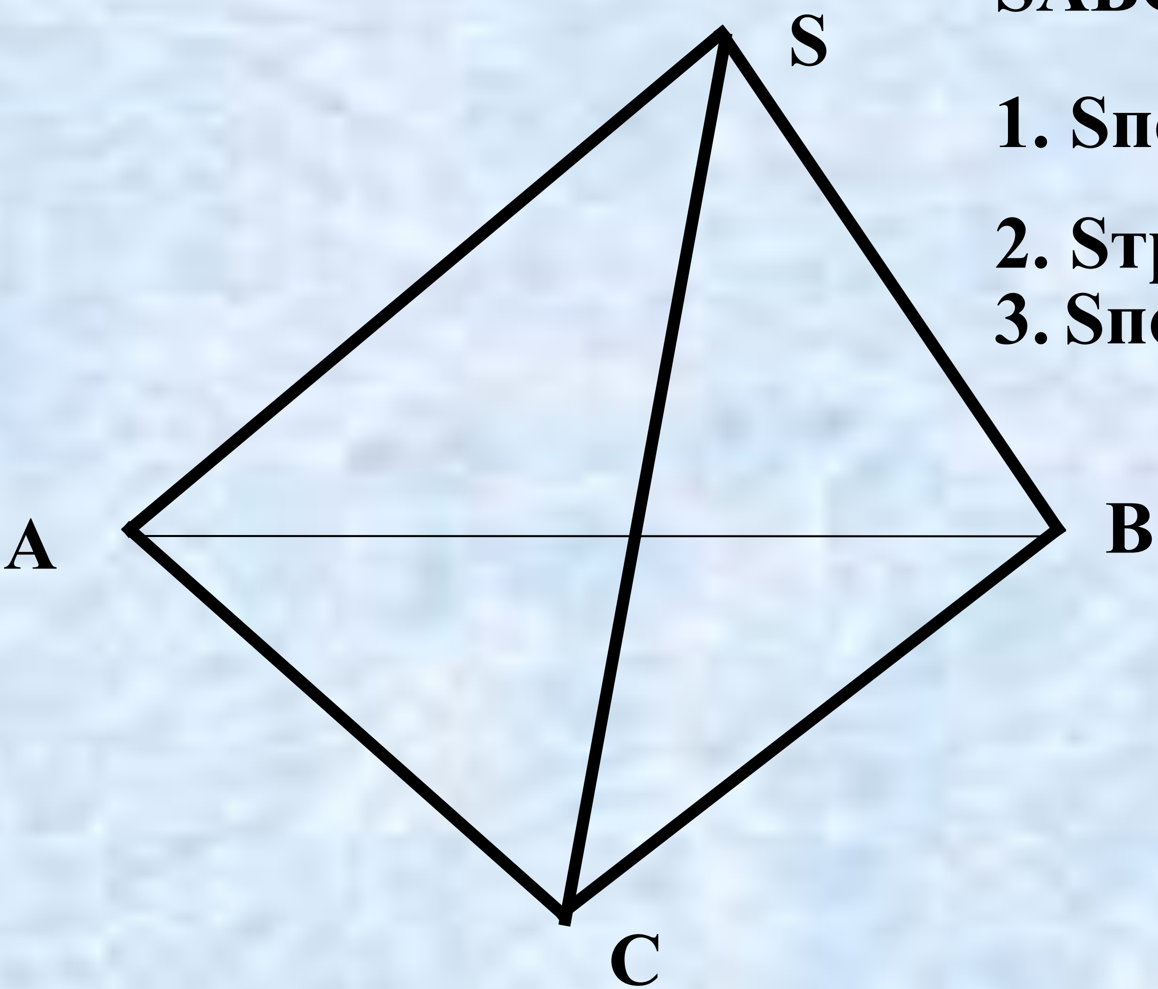
1. $AC \cap BD = O$
2. Δ AOD – п\у, р\б
по т. Пифагора
$AD^2 = DO^2 + OA^2$
$2OD^2 = 230^2 = 52900$
$OD^2 = 26450$
3. Пирамида правильная $\Rightarrow$ $SO \perp (ABC)$
4. Δ SOD – п\у

по т. Пифагора $DS^2 = DO^2 + OS^2 = 26450 + 138^2 =$
$= 26450 + 19044 = 45494$
$DS \approx 213$ м

Ответ: 213 м.



3.Чему равна площадь поверхности правильного тетраэдра с ребром 1?



Решение

SABC – тетраэдр $\Rightarrow$

1. Sпов=4Sтр

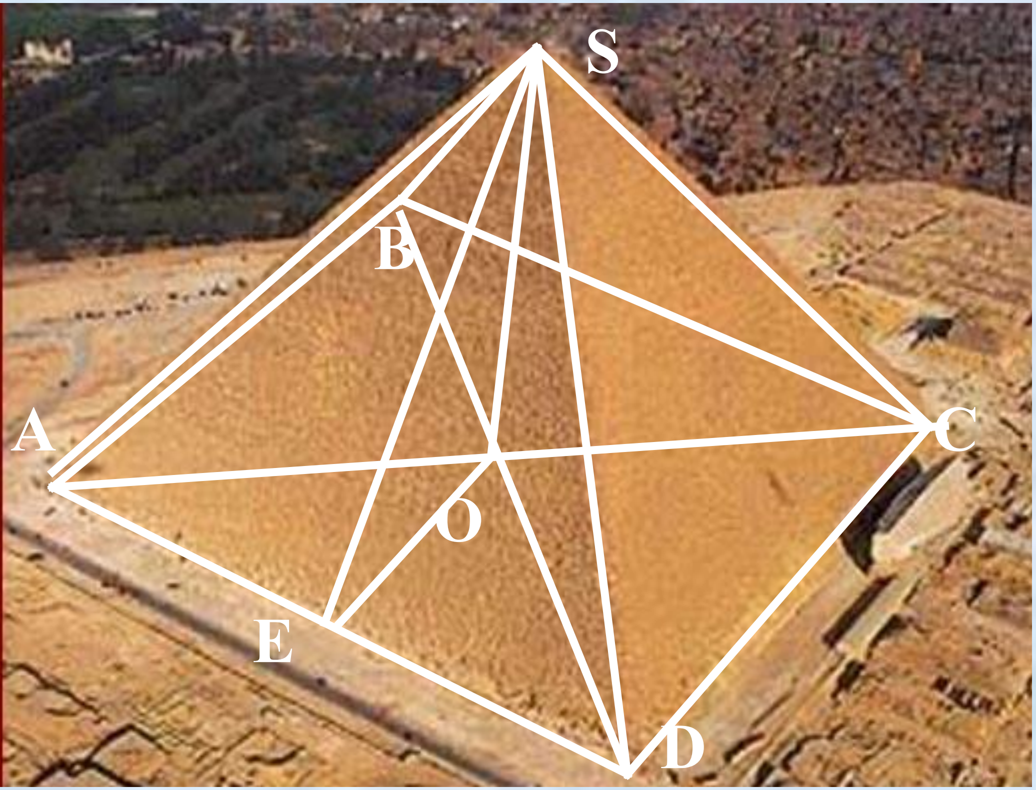
2. Sтр = $0{,}5a^2\sin 60^0$

3. Sпов=$4 \cdot 0{,}5a^2\sin 60^0$ =

$= \sqrt{3}$

Ответ: $\sqrt{3}$

4. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды Хеопса, сторона основания которой равна 230 м и высота 138 м.



Решение:

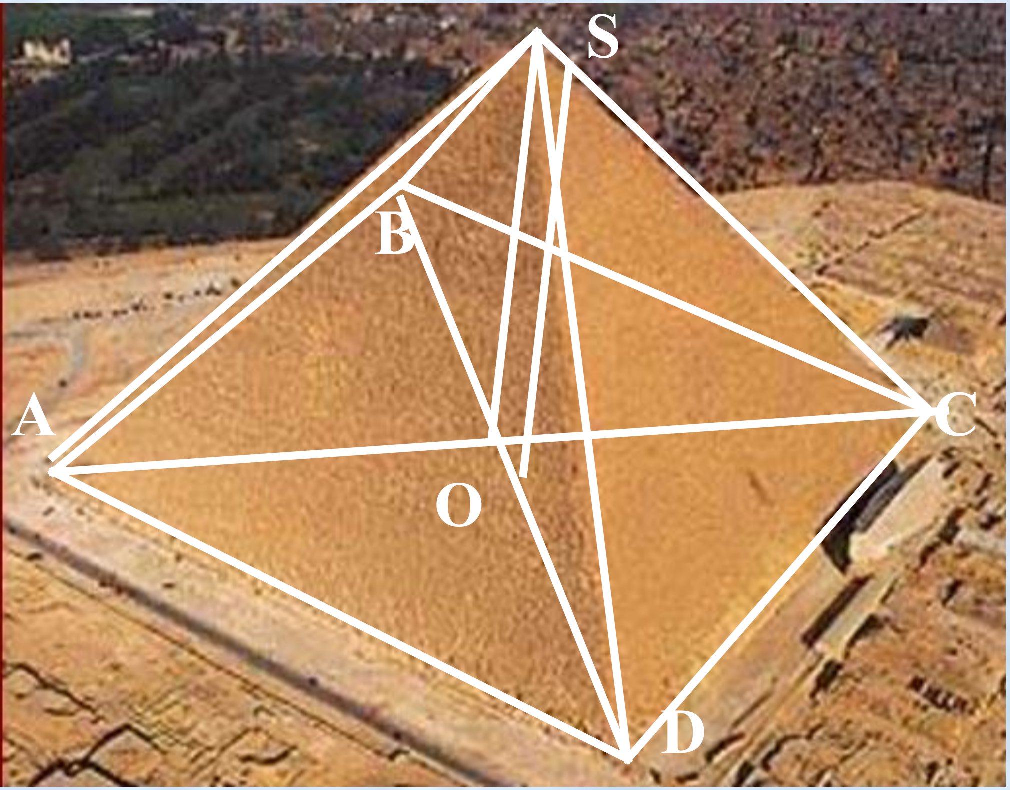
1. Sб.пов=4Sтр
2. $AC \cap BD = O$
3. Пирамида правильная $\Rightarrow$ $SO \perp (ABC)$
4. $OE \parallel CD \Rightarrow OE \perp AD \Rightarrow$
5. $SE \perp AD$ (по теореме о 3 перпендикулярах)
6. Δ SOE – п\у по т. Пифагора $ES^2 = EO^2 + OS^2 = 115^2 + 138^2 =$ $= 13225 + 19044 = 32269$ $ES \approx 180$
7. ES - высота ΔASD

$S_{ASD} = 0,5\ ES \cdot AD = 0,5 \cdot 180 \cdot 230 = 20700$ м^2

8. $S_{б.пов} = 4S_{тр} = 4 \cdot 20700 = 82800$ м^2

Ответ: 82800 м^2

5. (устно) Боковое ребро правильной пирамиды вдвое больше ее высоты. Определите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.



Решение:

1. $AC \cap BD = O$

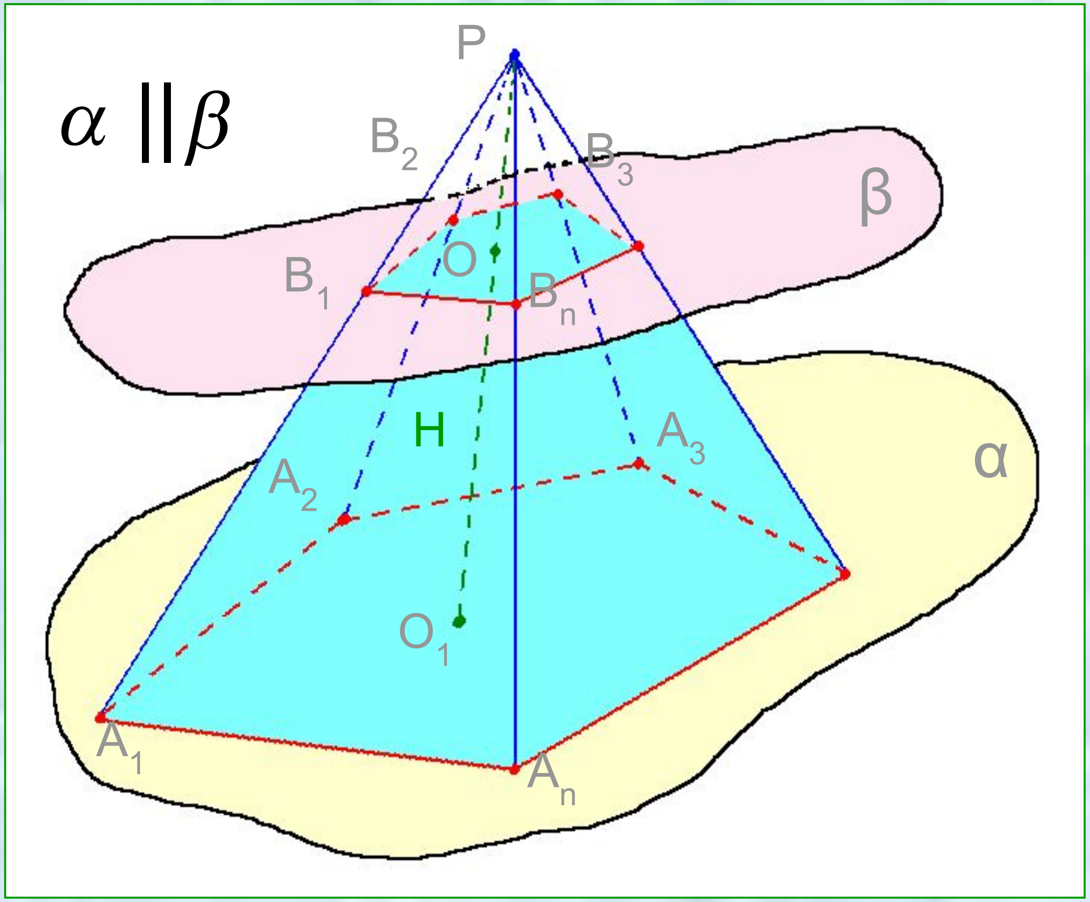
2. Пирамида правильная $\Rightarrow$ $SO \perp (ABC)$ $\Rightarrow$ Δ SOD –п\у

3. $SD = 2 \cdot SO$

4. $\angle D = 30^0$

Ответ: 30^0.

Усеченная пирамида



$PA_1A_2\ldots A_n$ – произвольная пирамида

α – плоскость основания

β – секущая плоскость,

$PB_1B_2\ldots B_n$ – пирамида

$B_1B_2\ldots B_n$ – верхнее основание

$A_1A_2\ldots A_n$ – нижнее снование

$A_1B_1B_2A_2$; …; $A_nB_nB_1A_1$ – боковые грани – трапеции

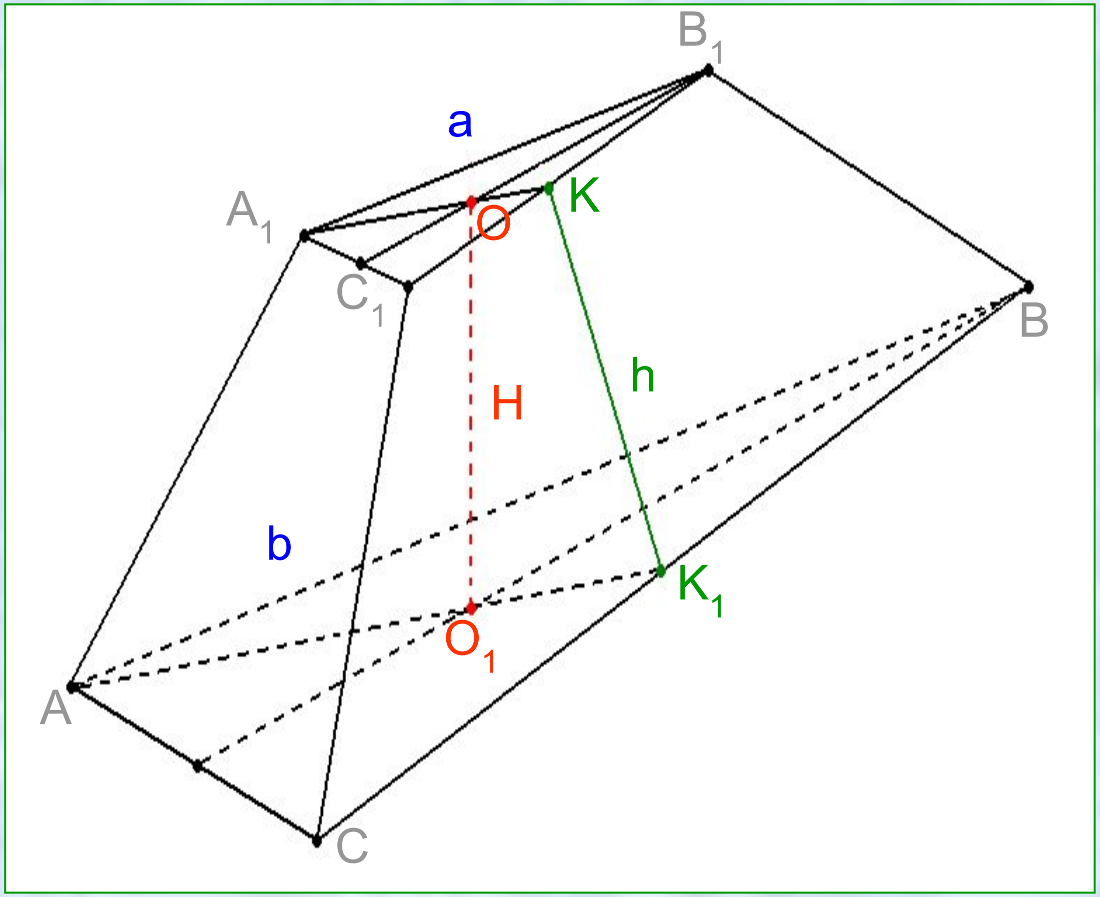
A_1B_1; A_2B_2; …; A_nB_n – боковые ребра

OO_1= H – высота

$$S_{п.п.} = S_{бок.} + S_{в.осн.} + S_{н.осн.} \quad V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot (S_{в.осн.} + S_{н.осн.} + \sqrt{S_{в.осн.} \cdot S_{н.осн.}})$$

Правильная треугольная усеченная пирамида –

боковые грани – равные между собой равнобокие трапеции.



Δ ABC и Δ $A_1B_1C_1$ – равносторонние

OO_1 = H – высота

KK_1 = h – апофема

$$\boxed{P_{в.осн.} = 3 \cdot a}$$

$$\boxed{P_{н.осн.} = 3 \cdot b}$$

$$\boxed{S_{в.осн.} = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}$$

$$\boxed{S_{н.осн.} = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (P_{в.осн.} + P_{н.осн.})$$

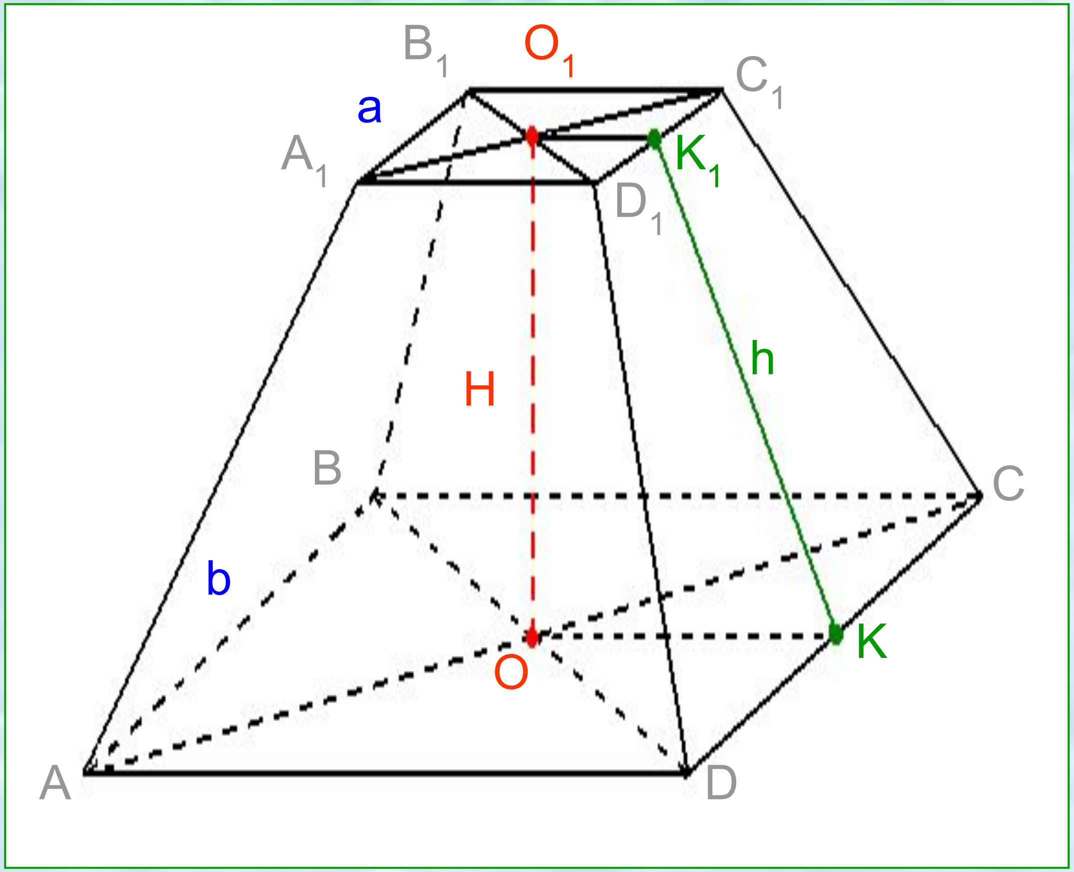
$$S_{бок.} = \frac{3}{2} \cdot h \cdot (a + b)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot (\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot (\frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{3}}{4})$$

Правильная четырехугольная усеченная пирамида –

боковые грани – равные между собой равнобокие трапеции.



ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ – квадраты

$OO_1 = H$ – высота

$KK_1 = h$ – апофема

$$P_{в.осн.} = 4 \cdot a \qquad P_{н.осн.} = 4 \cdot b$$

$$S_{в.осн.} = a^2 \qquad S_{н.осн.} = b^2$$

$$S_{бок.} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (P_{в.осн.} + P_{н.осн.})$$

$$S_{бок.} = 2 \cdot h \cdot (a + b)$$

$$S_{п.п.} = a^2 + b^2 + 2 \cdot h \cdot (a + b)$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot (a^2 + b^2 + \sqrt{a^2 \cdot b^2}) \qquad V = \frac{1}{3} \cdot H \cdot (a^2 + b^2 + a \cdot b)$$

Домашнее задание

- 1). Если в правильной треугольной пирамиде высота Н равна стороне основания а, то боковые ребра составляют с плоскостью основания углы в 600. Верно ли это утверждение?
- 2). Сторона квадрата равна 10 см. Доказать, что нельзя, используя его в качестве основания, построить правильную четырехугольную пирамиду с боковым ребром 7 см.
- 3). Доказать или опровергнуть утверждение: «если в пирамиде все ребра равны, то пирамида правильная».