# Численные методы

**Решение уравнений**

# Решение уравнений

# Основные понятия

МЕНЮ

Задача: решить уравнение

$$x^2 = 5\cos x \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5\cos x = 0$$

$$f(x) = 0$$

Типы решения:

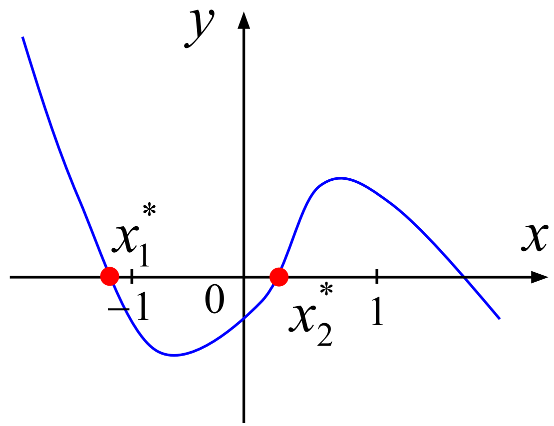
- аналитическое (точное, в виде формулы)

$$x^* = \ldots$$

? Как?

- приближенное (неточное)

графический метод




численные методы

$x_0 = -1$ начальное приближение

$x_1 = -1{,}102$

$x_2 = -1{,}215$

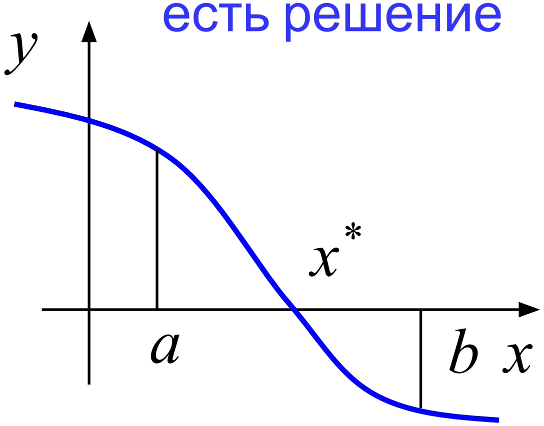
при $N \Rightarrow \infty$

$$x^* \approx -1{,}252\ldots$$

# Есть ли решение на $[a, b]$?

МЕНЮ

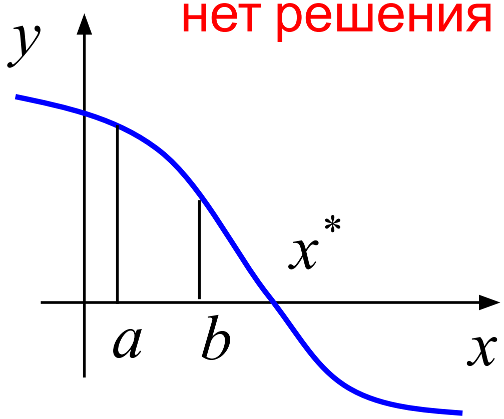
есть решение




$$f(a) > 0$$
$$f(b) < 0$$

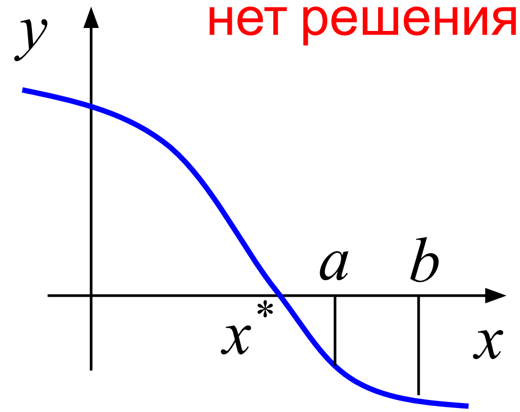
$$f(a)\,f(b) < 0$$

нет решения




$$f(a) > 0$$
$$f(b) > 0$$

нет решения



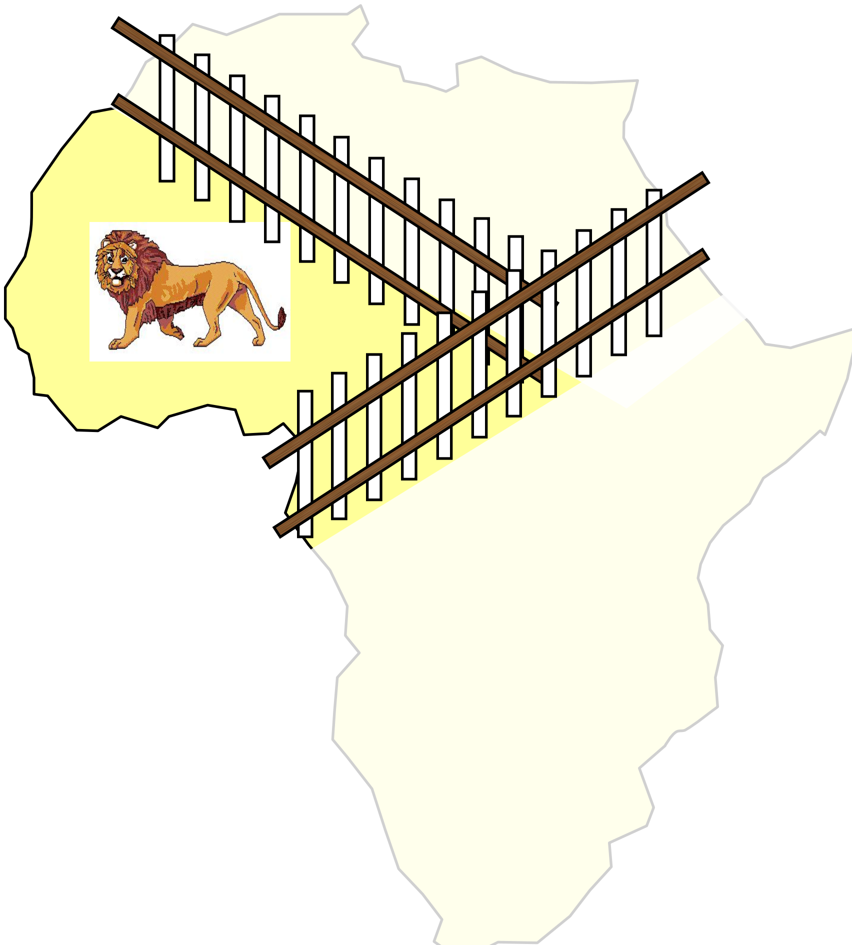

$$f(a) < 0$$
$$f(b) < 0$$

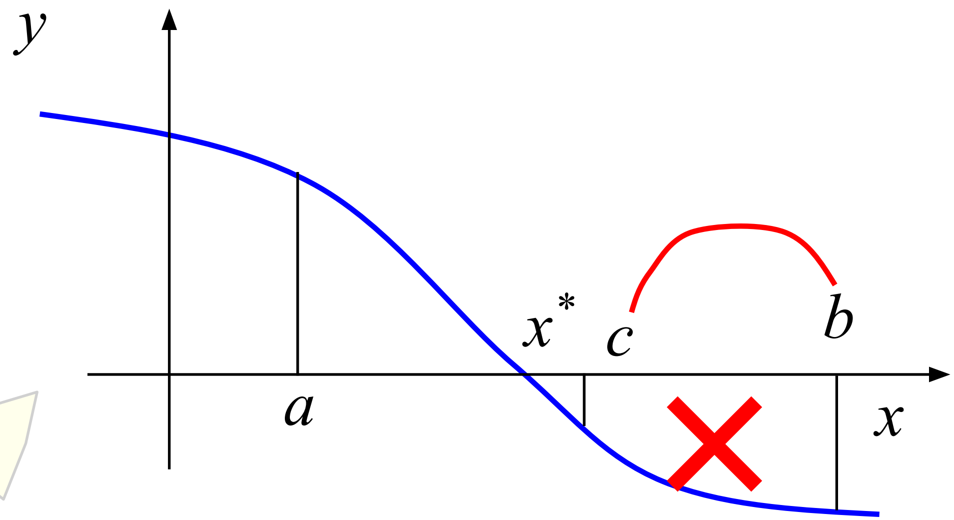
$$f(a)\,f(b) > 0$$

**!** Если *непрерывная* функция $f(x)$ имеет разные знаки на концах интервалы $[a, b]$, то в некоторой точке внутри $[a, b]$ имеем $f(x) = 0$!

# Метод дихотомии (деление пополам)

МЕНЮ






1. Найти середину отрезка `[a,b]`:

   `c = (a + b) / 2;`

2. Если `f(c)*f(a)<0`, сдвинуть правую границу интервала

   `b = c;`

3. Если `f(c)*f(a)` ≥ `0`, сдвинуть левую границу интервала

   `a = c;`

4. Повторять шаги 1-3, пока не будет `b – a` ≤ `ε`.

# Метод дихотомии (деления пополам)



- простота
- можно получить решение с заданной точностью (в пределах точности машинных вычислений)

- нужно знать интервал $[a, b]$
- на интервале $[a, b]$ должно быть только одно решение
- большое число шагов для достижения высокой точности
- только для функций одной переменной

# Метод итераций (повторений)



Задача: $f(x)=0 \qquad x=?$

Эквивалентные преобразования:

$b\cdot f(x)=0$ имеет те же решения при $b\neq 0$

$$x+b\cdot f(x)=x$$

$$x=\varphi(x), \qquad \varphi(x)=x+b\cdot f(x)$$

Идея решения:

$x_0$ – начальное приближение (например, с графика)

$$\boxed{x_k=\varphi(x_{k-1})=x_{k-1}+b\cdot f(x_{k-1}),} \qquad k=1,2,\ldots$$

Проблемы:

1) как лучше выбрать? $b$
2) всегда ли так можно найти решение?

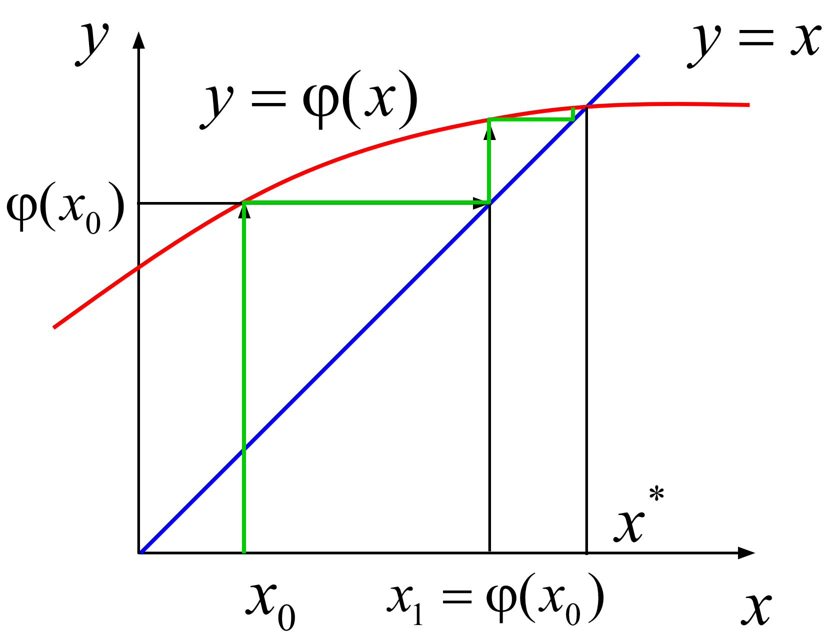
# Сходимость итераций

МЕНЮ

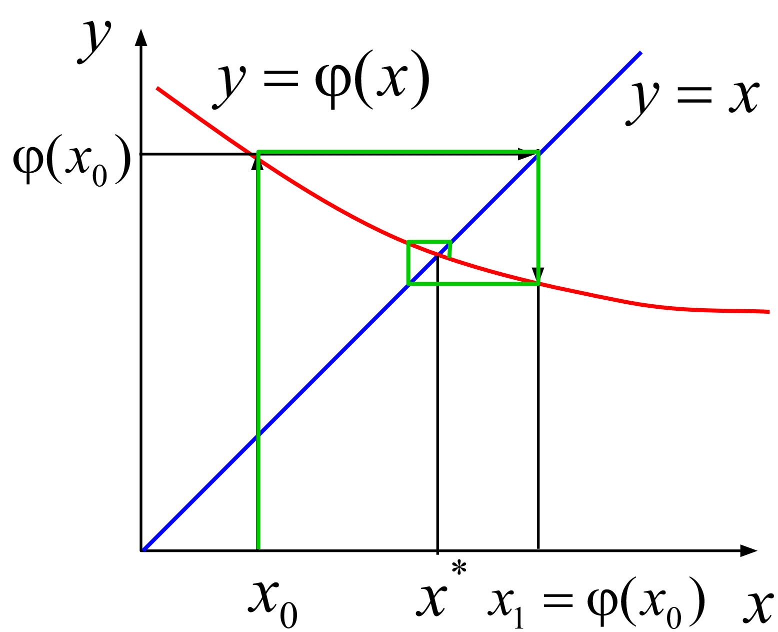
Сходящийся итерационный процесс: последовательность приближается (сходится) к точному решению.

$$x_0, x_1, \ldots$$

$$x^* = \varphi(x^*) \qquad x_0, x_1, x_2, \ldots \to x^*$$




односторонняя сходимость

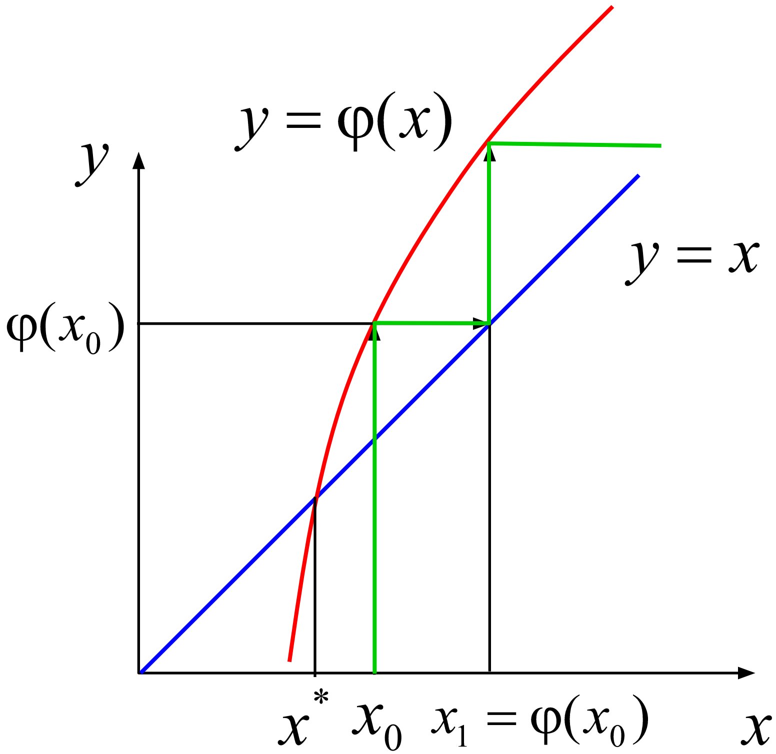



двусторонняя сходимость

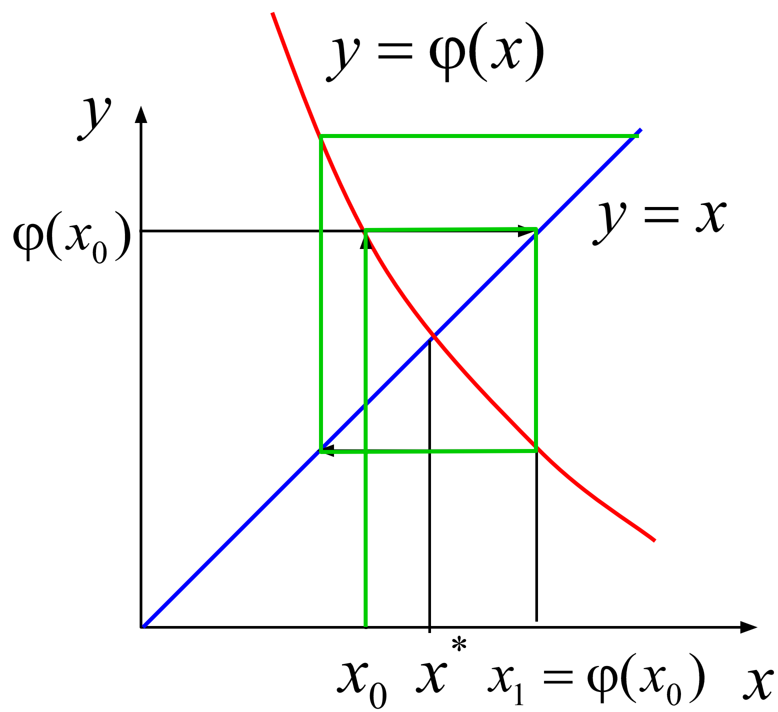
# Расходимость итераций

## Расходящийся итерационный процесс:

последовательность $x_0, x_1, \ldots$ неограниченно возрастает или убывает, не приближается к решению.




односторонняя расходимость



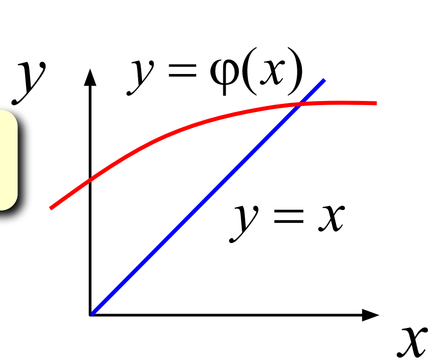

двусторонняя расходимость

# От чего зависит сходимость?



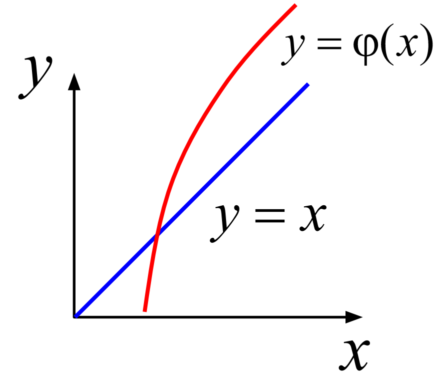
сходится

$$0 < \varphi'(x) < 1$$

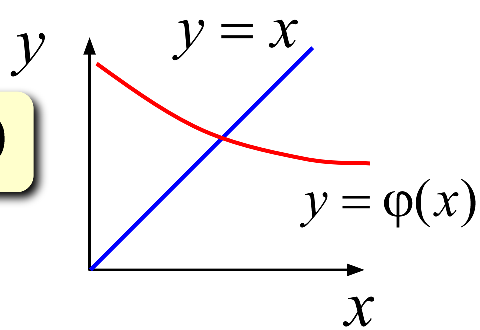



расходится

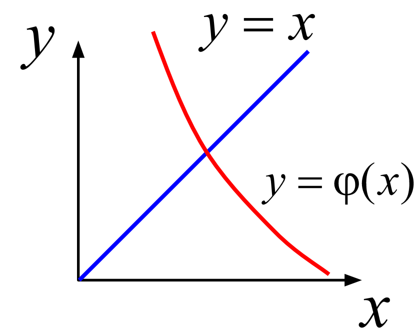
$$\varphi'(x) > 1$$




$$-1 < \varphi'(x) < 0$$




$$\varphi'(x) < -1$$




Выводы:

- сходимость итераций зависит от производной $\varphi'(x)$
- итерации сходятся при $|\varphi'(x)| < 1$ и расходятся при $|\varphi'(x)| > 1$
- сходимость определяется выбором параметра $b$

$$\varphi(x) = x + b \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = 1 + b \cdot f'(x)$$

# Как выбрать $b$?



- наугад, пробовать разные варианты
- для начального приближения $x_0$

$$-1 < 1 + b \cdot f'(x_0) < 1 \quad \Rightarrow \quad -2 < b \cdot f'(x_0) < 0$$

$$f'(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{f'(x_0)} < b < 0$$

$$f'(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < b < -\frac{2}{f'(x_0)}$$

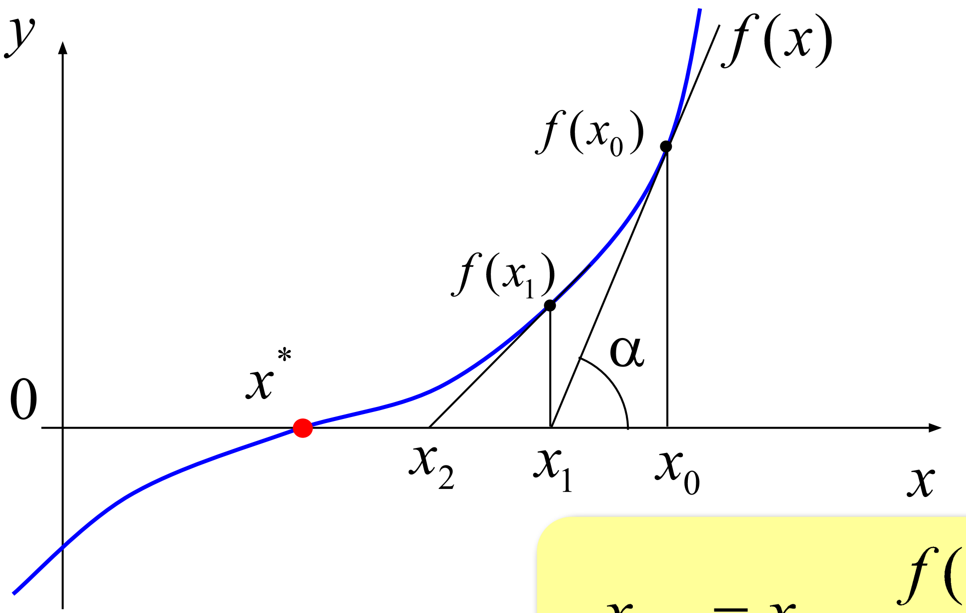
- пересчитывать на каждом шаге, например:

$$1 + b \cdot f'(x_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{f'(x_k)}$$

? Какие могут быть проблемы?

# Метод Ньютона (метод касательных)

МЕНЮ




$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

? Какая связь с методом итераций?

$$x_k = x_{k-1} + b \cdot f(x_{k-1}) \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{1}{f'(x_{k-1})}$$

# Метод Ньютона

МЕНЮ

- быстрая (квадратичная) сходимость – ошибка на $k$-ом шаге обратно пропорциональна $k^2$
- не нужно знать интервал, только начальное приближение
- применим для функция нескольких переменных

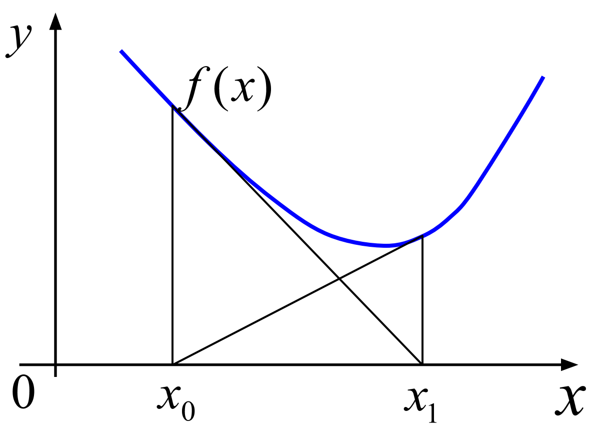
- нужно уметь вычислять производную (по формуле или численно)
- производная не должна быть равна нулю

$$x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2$$

- может зацикливаться

$$f(x) = x^3 - 2x + 2$$

$$x_0 = 0$$



МЕНЮ

# СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!