

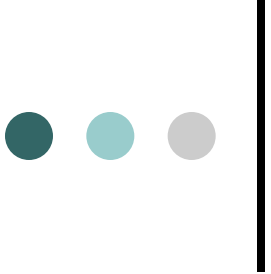


Независимые повторные
испытания.



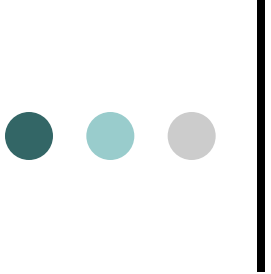
Содержание презентации

- Независимые повторные испытания.
- Формула Бернулли.
- Наивероятнейшее число появлений события.



Независимые повторные испытания.

- Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют **независимыми повторными испытаниями**.
- В разных независимых испытаниях событие A может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие A имеет **одну и ту же вероятность**.



Независимые повторные испытания.

Примеры:

1. Подбрасываем игральный кубик n раз. Выпадение числа очков от 1 до 6 происходит с вероятностью $1/6$ в каждом из испытаний;
2. Приобретаем n лотерейных билетов. Для каждого из лотерейных билетов вероятность выигрыша есть величина постоянная;
3. Подбрасывается n раз монета. Выпадение орла или решки происходит с вероятностью $1/2$ в каждом испытании.

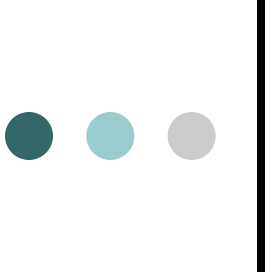
Пример 1 и примеры 2,3 отличаются друг от друга тем, что в первом примере возможно появление 6-ти событий, а во втором и третьем – появление только 2-х событий: выиграл - не выиграл, орел – решка, т.е. условно можно назвать такие исходы «успех – неуспех». Такие испытания называются **испытаниями Бернулли**.

Независимые повторные испытания.

Независимые повторные испытания, в каждом из которых возможно появление события A (успех) с постоянной вероятностью p или непоявление события A (неуспех) с постоянной вероятностью $q=1-p$, называются **испытаниями Бернулли** или **схемой Бернулли**.

Швейцарский математик
Якоб Бернулли (1654-1705).





Формула Бернулли.

Пусть производится n испытаний Бернулли. Вероятность того, что в этих испытаниях событие A произойдет ровно m раз можно найти по **формуле Бернулли**:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

n – число испытаний

p – вероятность появления события A в одном испытании

q - вероятность неоявления события A в одном испытании

$P_n(m)$ – вероятность того, что событие A появится ровно m раз в n испытаниях





Формула Бернулли.

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжении суток не превысит установленной нормы, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшую неделю расход электроэнергии в течении четырех суток не превысит норму.

Решение. Обозначим А- расход не превысит норму.

По условию $n = 7$, $m = 4$, $p = P(A) = 0.75$.

По формуле Бернулли: $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$

$$P_7(4) = C_7^4 \cdot p^4 \cdot q^{7-4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^3 = 35 \cdot 0,316 \cdot 0,0156 = 0,1969$$

Ответ: вероятность того, что в ближайшую неделю расход электроэнергии в течении четырех суток не превысит норму равна 0,1969



Формула Бернулли

Пример. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть одному из них 2 партии из 4-х или 3 партии из 6-ти?

Решение.

1) Найдем вероятность выиграть одному из них 2 партии из 4-х:
 $n=4$, $m=2$, $p=1/2$, $q=1/2$. По формуле Бернулли:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^{4-2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

2) Найдем вероятность выиграть одному из них 3 партии из 6-ти:
 $n=6$, $m=3$, $p=1/2$, $q=1/2$. По формуле Бернулли:

$$P_6(3) = C_6^3 \cdot p^3 \cdot q^{6-3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 20 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

Сравним полученные результаты: т.к. $3/8 > 5/16$, то вероятнее выиграть одному из них 2 партии из 4-х.

Формула Бернулли

Пример. Две электрические лампочки включены в цепь параллельно. Вероятность того, что при некотором повышении напряжения в цепи выше номинального перегорит только одна лампочка, равна 0,18. Найти вероятности перегореть для каждой из этих лампочек, если известно, что эти вероятности превосходят 0,7 и равны между собой.

Решение. Испытание состоит в проверке работы электрической лампочки. Общее число испытаний $n = 2$.

A – при повышении напряжения лампочка не перегорит.

По условию $P_2(1) = 0,18$.

Требуется найти вероятность p наступления события A в каждом испытании.

Это уравнение имеет два корня: $p = 0,9$ и $p = 0,7$. По условию $p > 0,7$. Поэтому $p = 0,7$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: Вероятность того, что каждая из лампочек не перегорит $p = 0,9$.



Наивероятнейшее число появлений события.

Число m_0 наступления события A в n независимых испытаниях называется **наивероятнейшим**, если вероятность осуществления этого события $P_n(m_0)$ по крайней мере не меньше вероятностей других событий $P_n(m)$ при любом m .

Для нахождения m_0 используется двойное неравенство:

$$n \cdot p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p$$





Наивероятнейшее число появлений события.

Так как наивероятнейшее число может быть только **целым**, то:

- a) Если границы дробные, то m_0 может принимать только одно значение;
- b) Если границы целые, то m_0 может принимать два значения, равные граничным. Тогда для определения наивероятнейшего числа нужно сравнить вероятности на границах.





Наивероятнейшее число появлений события.

Пример. В результате многолетних наблюдений вероятность дождя 21 июля в городе N составляет 0,3. Найти наивероятнейшее число дождливых дней 21 июля на ближайшие 30 лет.

Решение. По условию: $p=0.3$, $q=0.7$, $n=30$.

$$n \cdot p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p$$

$$0.3 \cdot 30 - 0.7 \leq m_0 \leq 0.3 \cdot 30 + 0.3$$

$$8.3 \leq m_0 \leq 9.3$$

$$m_0 = 9$$

Ответ: наивероятнейшее число дождливых дней 21 июля на ближайшие 30 лет равно 9.

Т.е. вероятнее всего 9 раз за 30 лет 21 июля будет дождливым.





Наивероятнейшее число появлений события.

Задача. Склады семенного картофеля перед посадкой проверяют на отсутствие очагов гниения. В проверенном складе оказалось 20% клубней с пятнами. Найти:

- a) наивероятнейшее число клубней без пятен среди 9 клубней, отобранных случайным образом;
- b) вероятность наивероятнейшего числа клубней без пятен.

Задача. Вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равно $0,7$. Сколько таких испытаний нужно произвести, чтобы наивероятнейшее число появления события A в этих испытаниях было бы равно 20?

