Глава X.2

Уравнение теплового баланса

Методы решения задач

1. *Для приготовления ванны вместимостью $V = 150$ л смешали холодную воду при $t^o{}_1 = 20^oC$ с горячей при $t^o{}_2 = 80^oC$. Какие объёмы той и другой воды надо взять, чтобы температура воды стала равной $t^o = 45^oC$?*

Решение. Определим направление теплообмена в системе "холодная вода + горячая вода": горячая вода отдаёт тепло; холодная вода получает тепло.

$Q_1 = m_1c(t^o - t^o_1) = \rho V_1 c(t^o - t^o_1) -$ количество теплоты, полученное холодной водой.

$Q_2 = m_2c(t^o_2 - t^o) = \rho V_2 c(t^o_2 - t^o) -$ количество теплоты, отданное горячей водой.

В соответствии с уравнением теплового баланса (всеми потерями энергии пренебрегаем): $Q_1 = Q_2$.

Раскроем полученное равенство:

$$\rho V_1 c(t^o - t^o_1) = \rho V_2 c(t^o_2 - t^o).$$

Отсюда

$$V_1(t^o - t_1^o) = V_2(t_2^o - t^o); \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{t_2^o - t^o}{t^o - t_1^o}.$$

Учтём, что общий объём воды равен сумме объёмов холодной и горячей воды: $V = V_1 + V_2$; $V_1 = V - V_2$.

Тогда

$$\frac{V - V_2}{V_2} = \frac{t_2^o - t^o}{t^o - t_1^o} = \frac{80^o C - 45^o C}{45^o C - 20^o C} = \frac{7}{5} \Rightarrow V_2 = \frac{5}{12} V = 62{,}5 \text{ л}.$$

$$V_1 = V - V_2 = V - \frac{5}{12} V = \frac{7}{12} V = 87{,}5 \text{ л}.$$

Итак, для приготовления ванны необходимо использовать 87,5 л холодной воды и 62,5 л горячей воды.

2. *Смешали V_1 = 5 л воды при температуре $t^o{}_1$ = 50^{o}С и V_2 = = 7 л воды при температуре $t^o{}_2$ = 20^{o}С. Какова будет температура смеси в состоянии теплового равновесия?*

Решение. Определим направление теплообмена в системе "холодная вода + горячая вода": горячая вода отдаёт тепло; холодная вода получает тепло.

$Q_1 = m_1 c(t^o - t_1^o) = \rho V_1 c(t^o - t_1^o) -$ количество теплоты, полученное холодной водой.

$Q_2 = m_2 c(t_2^o - t^o) = \rho V_2 c(t_2^o - t^o) -$ количество теплоты, отданное горячей водой.

В соответствии с уравнением теплового баланса (всеми потерями энергии пренебрегаем): $Q_1 = Q_2$.

Раскроем полученное равенство:

$$\rho V_1 c(t^o - t_1^o) = \rho V_2 c(t_2^o - t^o).$$

Отсюда

$$V_1(t^o - t_1^o) = V_2(t_2^o - t^o); \quad V_1 t^o - V_1 t_1^o = V_2 t_2^o - V_2 t^o;$$

$$(V_1 + V_2)t^o = V_1 t_1^o + V_2 t_2^o; \quad t^o = \frac{V_1 t_1^o + V_2 t_2^o}{V_1 + V_2} = 32{,}5^o\,C -$$ температура смеси в состоянии теплового равновесия.

3. *В сосуд, содержащий воду массой m_1 = 200 г при температуре $t^o{}_1$ = 20^{o}С, опустили медное тело массой m_2 = 100 г, имеющее температуру $t^o{}_2$ = 120^{o}С. Какая общая температура установится в сосуде? Нагреванием сосуда пренебречь. Удельные теплоёмкости воды и меди равны соответственно c_1 = 4200 Дж/(кг·1^{o}С), c_2 = 380 Дж/(кг·1^{o}С).*

Решение. Определим направление теплообмена в системе "холодная вода + горячее медное тело": медное тело отдаёт тепло; холодная вода получает тепло.

Q_1 = $m_1 c_1 (t^o - t_1^o)$ – количество теплоты, полученное холодной водой.

Q_2 = $m_2 c_2 (t_2^o - t^o)$ – количество теплоты, отданное горячим медным телом.

В соответствии с уравнением теплового баланса (всеми потерями энергии пренебрегаем): $Q_1 = Q_2$.

Раскроем полученное равенство:

$$m_1 c_1 (t^o - t_1^o) = m_2 c_2 (t_2^o - t^o).$$

Отсюда

$$m_1c_1t^o - m_1c_1t_1^o = m_2c_2t_2^o - m_2c_2t^o;$$

$$(m_1c_1 + m_2c_2)t^o = m_1c_1t_1^o + m_2c_2t_2^o;$$

$$t^o = \frac{m_1c_1t_1^o + m_2c_2t_2^o}{m_1c_1^{\ o} + m_2c_2} = 24{,}3^o\,C -$$ установившаяся температура.

4. *В калориметр с теплоёмкостью C = 90 Дж/К было налито m_1 = 300 г масла при $t^o{}_1$ = 15°C. После опускания в масло стального тела массой m_2 = 400 г при $t^o{}_2$ = 130°C установилась температура t^o = 40°C. Какова, по данным опыта, удельная теплоёмкость c_1 масла, если удельная теплоёмкость стали c_2 = = 460 Дж/(кг·К)? Потерями энергии пренебречь.*

Решение. Определим направление теплообмена в системе "масло + стальное тело + калориметр": стальное тело отдаёт тепло; масло и калориметр получают тепло.

Q_1 = $m_1c_1(t^o - t_1^o) -$ количество теплоты, полученное маслом.

Q_2 = $C(t^o - t_1^o) -$ количество теплоты, полученное калориметром.

$Q_3 = m_2 c_2 (t_2^o - t^o)$ – количество теплоты, отданное стальным телом.

В соответствии с уравнением теплового баланса (всеми потерями энергии пренебрегаем): $Q_1 + Q_2 = Q_3$.

Раскроем полученное равенство:

$$m_1 c_1 (t^o - t_1^o) + C(t^o - t_1^o) = m_2 c_2 (t_2^o - t^o).$$

Отсюда

$$(m_1 c_1 + C)(t^o - t_1^o) = m_2 c_2 (t_2^o - t^o);$$

$$m_1 c_1 + C = m_2 c_2 \cdot \frac{t_2^o - t^o}{t^o - t_1^o}; \quad m_1 c_1 = m_2 c_2 \cdot \frac{t_2^o - t^o}{t^o - t_1^o} - C;$$

$$c_1 = \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{t_2^o - t^o}{t^o - t_1^o} c_2 - \frac{C}{m_1} = 1908 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$$ – удельная теплоёмкость масла.

5. *В сосуде находится вода при температуре t^o_1 = = 20°С. В воду помещают тело, имеющее температуру t^o_2 = = 110°С. В сосуде установилась температура t^o_3 = 55°С. Какой станет температура воды t^o_4, если, не вынимая первое тело, в неё опустить второе такое же тело, нагретое до 110°С? Потерями энергии пренебречь.*

Решение. Пусть m_1 – масса воды в сосуде, c_1 – удельная теплоёмкость воды, m_2 – масса одного тела, c_2 – удельная теплоёмкость материала тела.

Определим направление теплообмена в системе "вода + первое тело": тело отдаёт тепло; вода получает тепло.

$Q_1 = m_2 c_2 (t_2^o - t_3^o)$ – количество теплоты, отданное телом.

$Q_2 = m_1 c_1 (t_3^o - t_1^o)$ – количество теплоты, полученное водой.

В соответствии с уравнением теплового баланса (всеми потерями энергии пренебрегаем): $Q_1 = Q_2$.

Раскроем полученное равенство:

$$m_2 c_2 (t_2^o - t_3^o) = m_1 c_1 (t_3^o - t_1^o).$$

Отсюда

$$m_2c_2 = m_1c_1\frac{t_3^o - t_1^o}{t_2^o - t_3^o} = \frac{7}{11}m_1c_1 -$$ теплоёмкость тела.

Определим направление теплообмена в системе "вода + + первое тело + второе тело": второе тело отдаёт тепло; первое тело и вода получают тепло.

$Q_3 = m_2c_2(t_2^o - t_4^o) -$ количество теплоты, отданное вторым телом.

$Q_4 = m_1c_1(t_4^o - t_3^o) -$ количество теплоты, полученное водой.

$Q_5 = m_2c_2(t_4^o - t_3^o) -$ количество теплоты, полученное первым телом.

В соответствии с уравнением теплового баланса (всеми потерями энергии пренебрегаем): $Q_3 = Q_4 + Q_5$.

Раскроем полученное равенство:

$$m_2c_2(t_2^o - t_4^o) = m_1c_1(t_4^o - t_3^o) + m_2c_2(t_4^o - t_3^o).$$

Отсюда

$$m_2c_2\left((t_2^o - t_4^o) - (t_4^o - t_3^o)\right) = m_1c_1(t_4^o - t_3^o).$$

$$m_2c_2\left(t_2^o - 2t_4^o + t_3^o)\right) = m_1c_1(t_4^o - t_3^o).$$

Используем соотношение $m_2c_2 = \dfrac{7}{11}m_1c_1.$

Тогда

$$\frac{7}{11}m_1c_1\left(t_2^o - 2t_4^o + t_3^o\right) = m_1c_1(t_4^o - t_3^o).$$

$$\frac{7}{11}\left(t_2^o - 2t_4^o + t_3^o\right) = t_4^o - t_3^o.$$

$$7t_2^o - 14t_4^o + 7t_3^o = 11t_4^o - 11t_3^o;\;\; 25t_4^o = 7t_2^o + 18t_3^o;$$

$$t_4^o = \frac{7t_2^o + 18t_3^o}{25} = 70{,}4^o\,C.$$

6. *Смесь из свинцовых и алюминиевых опилок с общей массой m = 150 г и температурой t^o_1 = 100^{o}С погружена в калориметр с водой, температура которой t^o_2 = 15^{o}С, а масса m_3 = 230 г. Окончательная температура установилась Θ^o = 20^{o}С. Теплоёмкость калориметра С = 42 Дж/К, удельная теплоёмкость свинца c_1 = 130 Дж/(кг·К), алюминия c_2 = 880 Дж/(кг·К). Сколько свинца и алюминия было в смеси?*

Решение. Определим направление теплообмена в системе "калориметр + вода + смесь опилок": опилки отдают тепло; вода и калориметр получают тепло.

Q_1 = $m_1c_1(t_1^o - \theta^o) -$ количество теплоты, отданное свинцовыми опилками (m_1 – масса свинцовых опилок).

Q_2 = $m_2c_2(t_1^o - \theta^o) -$ количество теплоты, отданное алюминиевыми опилками (m_2 – масса алюминиевых опилок).

Q_3 = $m_3c_3(\theta^o - t_2^o) -$ количество теплоты, полученное водой.

Q_4 = $C(\theta^o - t_2^o) -$ количество теплоты, полученное калориметром.

В соответствии с уравнением теплового баланса (всеми потерями энергии пренебрегаем): $Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4$.

Раскроем полученное равенство:

$$m_1c_1(t_1^o - \theta^o) + m_2c_2(t_1^o - \theta^o) = m_3c_3(\theta^o - t_2^o) + C(\theta^o - t_2^o)$$

$$(m_1c_1 + m_2c_2)(t_1^o - \theta^o) = (m_3c_3 + C)(\theta^o - t_2^o)$$

Отсюда

$$m_1c_1 + m_2c_2 = \frac{\theta^o - t_2^o}{t_1^o - \theta^o}(m_3c_3 + C).$$

$m = m_1 + m_2$ – по условию. Тогда $m_2 = m - m_1$.

$$m_1c_1 + mc_2 - m_1c_2 = mc_2 - m_1(c_2 - c_1) = \frac{\theta^o - t_2^o}{t_1^o - \theta^o}(m_3c_3 + C)$$

$$m_1(c_2 - c_1) = mc_2 - \frac{\theta^o - t_2^o}{t_1^o - \theta^o}(m_3c_3 + C)$$

$$m_1 = \frac{c_2}{c_2 - c_1}m - \frac{\theta^o - t_2^o}{(t_1^o - \theta^o)(c_2 - c_1)}(m_3c_3 + C) = 0{,}092 \text{ кг} = 92 \text{ г}.$$

$m_2 = m - m_1 =$ 150 г – 92 г = 58 г.

Итак, m_1 = 92 г – масса свинцовых опилок; m_2 = 58 г – масса алюминиевых опилок.

7. *В стакане содержится V = 250 см^3 воды. Опущенный в стакан термометр показал $t^o_2 = 78^oC$. Какова действительная температура воды, если теплоёмкость термометра С = 20 Дж/К, а до опускания в воду он показывал $t^o_1 = 20^oC$.*

Решение. Определим направление теплообмена в системе "термометр + вода": вода отдаёт тепло; термометр получает тепло.

$Q_1 = mc(t^o_3 - t^o_2) = \rho Vc(t^o_3 - t^o_2) -$ количество теплоты, отданное водой (m – масса воды, ρ – её плотность, t^o_3 – действительная температура воды).

$Q_2 = C(t^o_2 - t^o_1) -$ количество теплоты, полученное термометром.

В соответствии с уравнением теплового баланса (всеми потерями энергии пренебрегаем): $Q_1 = Q_2$.

Раскроем полученное равенство: $\rho Vc(t^o_3 - t^o_2) = C(t^o_2 - t^o_1)$.

Отсюда

$$t_3^o - t_2^o = \frac{C}{\rho c V}\left(t_2^o - t_1^o\right); \quad t_3^o = t_2^o + \frac{C}{\rho c V}\left(t_2^o - t_1^o\right) = 79{,}1^o\,C -$$

действитель-

ная температура воды.

8. *Каков КПД газовой горелки, если на нагревание чайника с V_1 = 3 л воды от $t^o{}_1$ = 20°С до кипения ($t^o{}_2$ = 100°С) было израсходовано V_2 = 30 л газа? Теплоёмкость чайника С = 150 Дж/К, удельная теплота сгорания газа ΔЕ/ΔV = 36 МДж/м³.*

Решение. Определим направление теплообмена в системе "сгорающий газ + вода + чайник": газ отдаёт тепло; вода и чайник получают тепло.

Q_1 = qV_2 – количество теплоты, отданное сгоревшим газом (q = = ΔE/ΔV – удельная теплота сгорания газа, V_2 – объём газа).

Q_2 = $\rho V_1 c(t_2^o - t_1^o)$ – количество теплоты, полученное водой.

Q_3 = $C(t_2^o - t_1^o)$ – количество теплоты, полученное чайником.

По условию задачи не всё тепло, выделенное при сгорании газа, идёт на нагревание воды и чайника: $Q_{пол.} = \eta Q_1 = \eta q V_2$, где $Q_{пол.}$ – "полезное" количество теплоты, т.е. количество теплоты, непосредственно затраченное на нагревание воды и чайника, η – КПД газовой горелки.

В соответствии с уравнением теплового баланса :

$$Q_{пол.} = Q_2 + Q_3.$$

Раскроем полученное равенство:

$$\eta \frac{\Delta E}{\Delta V} V_2 = \rho V_1 c(t_2^o - t_1^o) + C(t_2^o - t_1^o) = (\rho V_1 c + C)(t_2^o - t_1^o).$$

Отсюда

$$\eta = \frac{(\rho V_1 c + C)(t_2^o - t_1^o)}{\frac{\Delta E}{\Delta V} \cdot V_2} = 94{,}4 \cdot 10^{-2} = 94{,}4\% -$$ КПД газовой горелки.

9. *Бытовой газовый водонагреватель проточного типа имеет полезную мощность $P_{пол.}$ = 21 кВт и КПД η = 80%. Каков расход газа V_1 при заполнении ванны объёмом V_2 = 150 л водой, нагретой на $\Delta t^o = 40^oC$? Какое время для этого потребуется? Удельная теплота сгорания газа ΔE/ΔV = 36 МДж/м^3.*

Решение. Определим направление теплообмена в системе "сгорающий газ + вода": газ отдаёт тепло; вода получает тепло.

$Q_1 = qV_1$ – количество теплоты, отданное сгоревшим газом (q = = ΔE/ΔV – удельная теплота сгорания газа, V_1 – объём газа).

$Q_2 = \rho V_2 c\Delta t^o$ – количество теплоты, полученное водой.

По условию задачи не всё тепло, выделенное при сгорании газа, идёт на нагревание воды: $Q_{пол.} = \eta Q_1 = \eta q V_1$, где $Q_{пол.}$ – "полезное" количество теплоты, т.е. количество теплоты, непосредственно затраченное на нагревание воды, η – КПД газовой горелки.

В соответствии с уравнением теплового баланса :

$$Q_{пол.} = Q_2.$$

Раскроем полученное равенство:

$$\eta \frac{\Delta E}{\Delta V} V_1 = \rho V_2 c \Delta t^o.$$

Отсюда

$$V_1 = \frac{\rho V_2 c \Delta t^o}{\eta \frac{\Delta E}{\Delta V}} = 0{,}875\ \text{м}^3 = 875\ \text{л}$$ – расход газа.

Выразим $Q_{пол.}$ через полезную мощность водонагревателя:

$Q_{пол.} = P_{пол.}t$, где t – время работы нагревателя.

Тогда уравнение теплового баланса принимает вид:

$$P_{пол.} t = \rho V_2 c \Delta t^o.$$

Отсюда

$$t = \frac{\rho V_2 c \Delta t^o}{P_{пол.}} = 1200\ \text{с} = 20\ \text{мин}$$ – время работы нагревателя.

10. *Какое нужно количество теплоты, чтобы $m = 100$ г воды при $t^o_1 = 15^oC$ довести до кипения и $\Delta m = 20$ г её испарить? Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·1°С), удельная теплота её парообразования $L = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг.*

Решение. Процесс в данной системе состоит из двух процессов:

1) нагрев всей воды массой m от температуры $t^o_1 = 15^oC$ до $t^o_2 = 100^oC$ (температуры кипения воды) и 2) парообразование воды массой Δm при температуре кипения.

Запишем выражения для расчёта количеств теплоты Q_1 и Q_2, которые необходимо сообщить воде на каждом этапе процесса:

$$Q_1 = mc(t_2^o - t_1^o); \quad Q_2 = \Delta mL.$$

Общее количество теплоты, которое необходимо затратить для осуществления всего процесса в системе, равно:

$$Q = Q_1 + Q_2 = mc(t_2^o - t_1^o) + \Delta mL = 80{,}9 \text{ кДж}.$$

11. *В сосуд, содержащий m_1 = 2 кг воды при температуре $t^o{}_1$ = = 20^oC , впустили m_2 = 150 г водяного пара при температуре $t^o{}_2$ = = 100^oC. Какая температура $t^o{}_3$ установится в сосуде в состоянии теплового равновесия? Удельная теплоёмкость воды c = 4200 Дж/(кг·К), удельная теплота её парообразования L = $2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг.*

Решение. Процесс теплообмена в системе будет протекать следующим образом: пар отдаёт тепло воде; вода получает тепло.

Пар отдаёт тепло воде в сосуде в два этапа: 1) в процессе конденсации при температуре $t^o{}_2$ = 100^oC и 2) при охлаждении полученной из пара воды от $t^o{}_2$ = 100^oC до $t^o{}_3$.

Запишем выражения для расчёта количеств теплоты, которые отдаёт пар и принимает вода в сосуде:

Q_1 = $m_2 L + m_2 c(t_2^o - t_3^o)$ – количество теплоты, отданное паром.

Q_2 = $m_1 c(t_3^o - t_1^o)$ – количество теплоты, полученное водой.

В соответствии с уравнением теплового баланса: $Q_1 = Q_2$.

Раскроем уравнение теплового баланса.

$$m_2 L + m_2 c(t_2^o - t_3^o) = m_1 c(t_3^o - t_1^o).$$

После раскрытия скобок в левой и правой части равенства получим

$$m_2L + m_2ct_2^o - m_2ct_3^o = m_1ct_3^o - m_1ct_1^o.$$

$$m_2L + \left(m_2t_2^o + m_1t_1^o\right)c = \left(m_1 + m_2\right)ct_3^o.$$

Отсюда

$$t_3^o = \frac{m_2L + \left(m_1t_1^o + m_2t_2^o\right)c}{c\left(m_1 + m_2\right)} = 63{,}8^o\,C.$$

12. *Для приближённого определения удельной теплоты парообразования воды ученик проделал следующий опыт. На электроплитке он нагрел воду, причём оказалось, что на нагревание её от $t^o{}_1 = 20^oC$ до $t^o{}_2 = 90^oC$ потребовалось $t_1 = 15$ минут, а для обращения 0,1 её массы в пар – $t_2 = 11{,}7$ минут. Какова удельная теплота парообразования воды по данным эксперимента? Удельная теплоёмкость воды с = 4200 Дж/(кг·К). Тепловую мощность электроплитки считать неизменной.*

Решение. Запишем выражение для количества теплоты, полученного от электроплитки при нагревании воды от 20 до 90^{o}С:

$Q_1 = Pt_1 = mc(t^o{}_2 - t^o{}_1)$, где P – мощность электроплитки, m – масса воды.

Запишем выражение для количества теплоты, полученного от электроплитки при парообразовании:

$Q_2 = Pt_2 = 0{,}1mL$, где L – удельная теплота парообразования воды.

Разделим друг на друга левые и правые части соответственно двух полученных выражений:

$$\frac{Pt_1}{Pt_2} = \frac{mc(t_2^o - t_1^o)}{0{,}1mL}.$$

Отсюда

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{c(t_2^o - t_1^o)}{0{,}1L} \Rightarrow L = \frac{c(t_2^o - t_1^o)}{0{,}1} \cdot \frac{t_2}{t_1} \approx 2{,}3 \cdot 10^6 \,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}.$$

13. *В стальной сосуд массой m_1 = 200 г налили V = 1,2 л воды при t^o_1 = 20°С. В воду опустили кусок мокрого снега массой m = = 100 г. Когда снег растаял, установилась температура t^o_2 = 15°С. Какая масса воды содержалась в мокром снеге? Удельная теплоёмкость стали c_1 = 460 Дж/(кг·1°С), удельная теплота плавления льда λ = 3,34·10^5 Дж/кг, плотность воды ρ = 10^3 кг/м³, удельная теплоёмкость воды c_2 = 4200 Дж/(кг·1°С) .*

Решение. Определим направление теплообмена в системе "стальной сосуд + тающий лёд + вода": вода и сосуд отдают тепло; тающий снег получает тепло.

Q_1 = $m_1 c_1 (t^o_1 - t^o_2)$ – количество теплоты, отданное стальным сосудом.

Q_2 = $m_2 c_2 (t^o_1 - t^o_2) = \rho V c_2 (t^o_1 - t^o_2)$ – количество теплоты, отданное водой в сосуде (m_2 = ρV – масса воды в сосуде).

Снег – мокрый. Это значит, что он тает. Но температура плавящегося кристаллического тела (считаем снег кристалликами льда) не изменяется, пока всё оно не перейдёт в жидкое состояние.

Таким образом, мокрый снег получает количество теплоты в два этапа:1) плавление льда (в снеге) при 0^oC и 2) нагрев всей воды, полученной из снега, от 0^oC до $t^o_2 = 15^oC$.

Тогда

$Q_3 = (m - m_в)\lambda$ – количество теплоты, затраченное на плавление льда в мокром снеге ($m_в$ – масса воды в снеге).

$Q_4 = mc_2(t_2^o - 0^o) = mc_2 t_2^o$ – количество теплоты, затраченное на нагрев всей воды, полученной из снега.

В соответствии с уравнением теплового баланса :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 + Q_4$$

Раскроем уравнение теплового баланса.

$$m_1 c_1 (t_1^o - t_2^o) + \rho V c_2 (t_1^o - t_2^o) = (m - m_в)\lambda + mc_2 t_2^o.$$

Проведём с полученным выражением алгебраические преобразования и определим значение $m_в$.

$$m_1c_1(t_1^o - t_2^o) + \rho V c_2(t_1^o - t_2^o) = m(\lambda + c_2t_2^o) - m_в\lambda.$$

$$m_в\lambda = m(\lambda + c_2t_2^o) - (m_1c_1 + \rho V c_2)(t_1^o - t_2^o)$$

Отсюда

$$m_в = \frac{m(\lambda + c_2t_2^o) - (m_1c_1 + \rho V c_2)(t_1^o - t_2^o)}{\lambda} = 0{,}042\ кг = 42\ г.$$

14. *В сосуд, содержащий m_1 = 10 кг льда при t^o_1 = 0°C, влили m_2 = = 3 кг воды при t^o_2 = 90°C. Какая установится температура? Расплавится ли весь лёд? Если нет, то какая его часть останется в твёрдом состоянии? Теплоёмкость сосуда не учитывать. Удельная теплоёмкость воды c = 4200 Дж/(кг·1°C), удельная теплота плавления льда λ = 3,34·10⁵ Дж/кг.*

Решение. Оценим, какое количество теплоты может отдать вода при её максимальном охлаждении (до 0°C):

$$Q_1^{max} = m_2c(t_2^o - t_1^o) = m_2ct_2^o = 1{,}134 \cdot 10^6\ Дж.$$

Оценим, какое количество теплоты потребуется для плавления всего льда в сосуде:

$$Q_2^{max} = m_1\lambda = 3{,}34 \cdot 10^6 \text{ Дж.}$$

Как следует из оценок, для плавления всего льда недостаточно количества теплоты, которое может отдать вода при её максимальном охлаждении. Это значит, что в сосуде в состоянии теплового равновесия при 0°С будет находиться смесь из воды, которая уже была налита в сосуд, воды, полученной из растаявшего льда, и оставшейся части льда.

Теплообмен в данной системе и фазовые превращения прекратятся тогда, когда температура в сосуде станет равной нулю.

Воде, чтобы стать льдом при 0°С, нужно отдать окружающим телам некоторое количество теплоты. Для этого температура других тел должна быть меньше нуля.

Льду, чтобы расплавиться при 0°С, нужно получить от окружающих тел некоторое количество теплоты. Для этого температура других тел должна быть выше нуля.

И тот, и другой процесс невозможны, так как температура воды и льда в сосуде одинакова. Поэтому температура смеси "вода + лёд" будет оставаться неизменной и равной 0°С.

Определим, какая масса льда расплавится при максимальном охлаждении воды:

$$m_в = \frac{Q_1^{max}}{\lambda} = \frac{1{,}134 \cdot 10^6 \, Дж}{3{,}34 \cdot 10^5 \, Дж / кг} = 3{,}4 \, кг.$$

В сосуде останется лёд массой:

$m_л = m_1 – m_в = 10$ кг – 3,4 кг = 6,6 кг.

Доля оставшегося в сосуде льда составит:

$$\frac{m_л}{m_1} = \frac{6{,}6 кг}{10 кг} = 0{,}66 = 66\%.$$

Подведём итог исследованию:

1. В сосуде в конце процесса теплообмена между водой и льдом установится температура 0^oC.

2. К концу процесса теплообмена растает 34% льда, 66% льда останется в твёрдом состоянии.

3. Дальнейшеё поведение системы "лёд + вода" зависит от того, будет ли система получать тепло от более горячих тел (в этом случае весь лёд растает, и в сосуде будет только вода), или отдавать тепло более холодным телам (в этом случае вся вода замерзнёт, и в сосуде будет только лёд).

4. Если сосуд останется теплоизолированным, то температура в нём останется равной 0°C, и равновесие льда и воды сохранится.

15. *В сосуде содержится смесь из m_1 = 200 г воды и m_2 = 130 г льда при $t^o{}_1 = 0^oC$. Какой будет окончательная температура, если в сосуд ввести m_3 = 25 г пара при $t^o{}_2 = 100^oC$? Удельная теплоёмкость воды c = 4200 Дж/(кг·1°C), удельная теплота её парообразования L = $2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}34 \cdot 10^5$ Дж/кг.*

Решение. Для плавления льда при температуре $t^o{}_1 = 0^oC$ требуется $Q_2 = m_2\lambda$ = 43420 Дж теплоты. При конденсации водяного пара при температуре $t^o{}_2 = 100^oC$ выделяется количество теплоты $Q_3 = m_3L$ = 56500 Дж > Q_2.

Полученный результат означает, что после конденсации пара лёд в сосуде весь расплавится, а затем вода, находившаяся в сосуде, и вода, полученная из льда, будут нагреваться.

Водяной пар будет отдавать теплоту в два этапа: 1) в процессе конденсации при 100°С и 2) в процессе охлаждения полученной из пара воды от 100°С до некоторой равновесной температуры t^o_3.

Вычислим полученное и отданное количества теплоты в системе:

$m_1c(t^o_3 - t^o_1) + m_2\lambda + m_2c(t^o_3 - t^o_1)$ – полученное количество теплоты;

$m_3L + m_3c(t^o_2 - t^o_3)$ – отданное количество теплоты.

В соответствии с уравнением теплового баланса:

$$m_1c(t^o_3 - t^o_1) + m_2\lambda + m_2c(t^o_3 - t^o_1) = m_3L + m_3c(t^o_2 - t^o_3).$$

Отсюда получим выражение для t^o_3 и его значение:

$$(m_1 + m_2 + m_3)ct^o_3 = ((m_1 + m_2)t^o_1 + m_3t^o_2)c + m_3L - m_2\lambda;$$

$$t^o_3 = \frac{((m_1 + m_2)t^o_1 + m_3 t^o_2)c + m_3L - m_2\lambda}{c(m_1 + m_2 + m_3)} = 15{,}8^o\,C.$$

16. *В колбе находится вода при 0^oC. При выкачивании из колбы воздуха часть воды испаряется, а остальная – замерзает. Какая часть воды при этом испаряется, если притока теплоты извне нет? Удельная теплота парообразования воды при этой температуре $L = 2{,}48 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплота кристаллизации воды $\lambda = 3{,}34 \cdot 10^5$ Дж/кг.*

Решение. В данном процессе теплообмен системы с внешними телами по условию отсутствует ($Q = 0$); работа системы над внешними телами также отсутствует ($A' = 0$).

В соответствии с первым законом термодинамики внутренняя энергия системы остаётся неизменной: её температура остаётся постоянной (равной 0^oC); увеличение потенциальной энергии молекул водяного пара $\Delta U_1 = m_п L$ равно модулю уменьшения потенциальной энергии молекул льда $|\Delta U_2| = (m - m_п)\lambda$, где $m_п$ – масса пара, m – масса всей воды в сосуде, $m - m_п$ – масса льда.

Приравняем выражения для ΔU_1 и $|\Delta U_2|$:

$$m_п L = (m - m_п)\lambda.$$

Отсюда

$$m_п(L + \lambda) = m\lambda.$$

$$\frac{m_п}{m} = \frac{\lambda}{L+\lambda} = 11{,}9 \cdot 10^{-2} = 11{,}9\%$$ – доля испарившейся воды.

17. *До какой температуры следует нагреть алюминиевый куб, чтобы, поставленный на лёд, он мог полностью в него погрузиться? Температура льда 0^oC. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}34 \cdot 10^5$ Дж/кг, его плотность $\rho_л = 900$ кг/м^3, удельная теплоёмкость алюминия $c = 890$ Дж/(кг·1^oC), его плотность $\rho_а = 2700$ кг/м^3.*

Решение. $Q_1 = \rho_a Vc(t^o - 0^o) = \rho_a Vct^o$ – количество теплоты, отданное алюминиевым кубом при охлаждении от t^o до 0^oC (V – объём куба).

$Q_2 = \rho_л V\lambda$ – количество теплоты, полученное льдом в объёме куба при плавлении.

Запишем уравнение теплового баланса в данной системе:

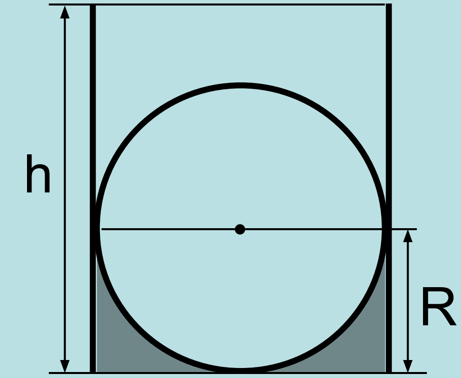
$$Q_1 = Q_2; \ \rho_a Vct^o = \rho_л V\lambda.$$

Отсюда

$\rho_a c t^o = \rho_л \lambda$; $t^o = \dfrac{\rho_л}{\rho_a} \cdot \dfrac{\lambda}{c} = 125^o C$ – искомая температура куба.

18. *Железный шарик радиусом R, нагретый до температуры t^o, положили на лёд, температура которого 0^oC. На какую глубину h шарик погрузится в лёд? Теплопроводностью льда и работой силы тяжести пренебречь. При расчёте считать, что шарик погрузился в лёд полностью. Удельная теплоёмкость железа c, его плотность $\rho_ж$; удельная теплота плавления льда λ, его плотность $\rho_л$.*

Решение. Определим объём $V_л$ растаявшего льда (см. рисунок): он равен разности объёма цилиндра высотой h и площадью поперечного сечения πR^2 и объёма $V'_л$, оставшегося под шариком (этот объём на рисунке заштрихован).



Вычислим объём $V'_л$: $V'_л = \pi R^2 R - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3} \pi R^3 = \dfrac{1}{3} \pi R^3$.

$V = \dfrac{4}{3} \pi R^3$ – объём шара радиуса R.

Тогда

$$V_л = \pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi R^3 \Rightarrow \quad \pi R^2 h = V_л + \frac{1}{3}\pi R^3;$$

$$h = \frac{V_л}{\pi R^2} + \frac{R}{3}.$$

$Q_1 = m_ш c(t^o - 0^o) = \rho_ж \frac{4}{3}\pi R^3 c t^o$ – количество теплоты, отданное железным шариком ($m_ш$ – масса железного шарика).

$Q_2 = m_л \lambda = \rho_л V_л \lambda$ – количество теплоты, полученное льдом.

Запишем уравнение теплового баланса:

$$\rho_ж \frac{4}{3}\pi R^3 c t^o = \rho_л V_л \lambda.$$

Отсюда

$V_л = \dfrac{4\pi\rho_ж c t^o}{3\rho_л \lambda} R^3$; $h = \dfrac{4\rho_ж c t^o}{3\rho_л \lambda} R + \dfrac{1}{3} R = \dfrac{4\rho_ж c t^o + \rho_л \lambda}{3\rho_л \lambda} R$ – глубина погружения железного шарика в лёд.

19. *В куске льда, находящемся при 0^oC, сделано углубление, объём которого $V = 160$ см^3. В это углубление влито $m_в = 60$ г воды, температура которой $t^o = 75^oC$. Какой объём будет иметь свободное от воды углубление, когда вода остынет? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}34 \cdot 10^5$ Дж/кг, его плотность $\rho_л = 900$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, её удельная теплоёмкость $c = 4200$ Дж/(кг·1^oC).*

Решение. $Q_1 = m_в c t^o$ – количество теплоты, которое остывающая вода отдаст льду при максимальном охлаждении.

$Q_2 = m_л\lambda = \rho_л V_л \lambda$ – количество теплоты, которое получил расплавленный лёд.

Запишем уравнение теплового баланса в данной системе:

$$Q_1 = Q_2;\ m_в c t^o = \rho_л V_л\ \lambda.$$

Отсюда

$$V_л = \frac{m_в c t^o}{\rho_л \lambda} = 62{,}87\ \text{см}^3$$ – объём растаявшего льда.

Растаявший лёд стал водой, объём которой составляет

$$V'_в = \frac{\rho_л}{\rho_в} V_л = 56,58 \text{ см}^3.$$

Между объёмами растаявшего льда и полученной из него воды образовалась разность $\Delta V = V_л - V'_в = 6,29$ см^3.

После наливания горячей воды в углубление (до начала плавления льда) свободный от воды объём составлял

$$V - \frac{m_в}{\rho_в} = 100 \text{ см}^3.$$

Свободный от воды объём углубления в момент, когда налитая вода остынет, составит

$$V - \frac{m_в}{\rho_в} + \Delta V = 106,29 \text{ см}^3.$$

20. *Чистую воду можно охладить до температуры $t^o = -10^oC$. Какая часть воды превратится в лёд, если начнётся кристаллизация? (Теплообмен происходит только между водой и льдом).*

Решение. Если в переохлаждённой воде искусственно создать центры кристаллизации, в ней начнёт образовываться лёд. Молекулы воды при этом станут переходить в состояние, соответствующее минимуму их потенциальной энергии. Уменьшение потенциальной энергии одной части молекул воды, образующих лёд, вызовет увеличение энергии теплового движения остальных молекул, которое будет регистрироваться как нагревание воды.

В отсутствие теплообмена с окружающими телами в процессе частичной кристаллизации воды произойдёт только перераспределение энергии в системе. Полная внутренняя энергия системы останется неизменной, и, следовательно, уменьшение потенциальной энергии части молекул приведёт к соответствующему увеличению кинетической энергии хаотического движения – повышению температуры системы.

$Q_1 = m_л \lambda$ – количество теплоты, выделенное при кристаллизации воды массой $m_л$ ($m_л$ – масса образовавшегося льда).

$Q_2 = m_л c_л (0^o - t^o)$ – количество теплоты, затраченное на нагревание образовавшегося льда от температуры t^o до 0^oC.

$Q_3 = m_в c_в(0^o - t^o)$ – количество теплоты, затраченное на нагревание оставшейся воды от температуры t^o до 0^oC.

Запишем уравнение теплового баланса:

$$Q_1 = Q_2 + Q_3; \quad m_л\lambda = m_л c_л(0^o - t^o) + m_в c_в(0^o - t^o)$$

Используем соотношения $m = m_л + m_в$; $m_в = m - m_л$, где m – масса всей воды в сосуде.

Тогда

$$m_л\lambda = m_л c_л(0^o - t^o) + (m - m_л)c_в(0^o - t^o)$$

$$m_л\lambda + m_л c_в(0^o - t^o) - m_л c_л(0^o - t^o) = mc_в(0^o - t_o)$$

$$m_л(\lambda + (c_в - c_л)(0^o - t^o)) = mc_в(0^o - t_o)$$

$\dfrac{m_л}{m} = \dfrac{c_в(0^o - t^o)}{\lambda + (c_в - c_л)(0^o - t^o)} = 11{,}8 \cdot 10^{-2} = 11{,}8\% -$ доля (часть) воды, превратившейся в лёд.

21. *Два одинаковых калориметра высотой h = 75 см заполнены на 1/3. Первый – льдом, образовавшимся в результате замерзания налитой в него воды, второй – водой при температуре* $t^o_в$ *= 10°C. Воду из второго калориметра переливают в первый, в результате чего он оказывается заполненным на 2/3. После того как температура в первом калориметре установилась, уровень заполнения его увеличился на Δh = 0,5 см. Какова начальная температура льда в первом калориметре?*

Решение. Если бы в результате теплообмена между льдом и водой весь лёд (или его часть) растаял, то уровень заполнения первого калориметра стал бы меньше 2/3 его высоты (плотность воды больше плотности льда).

Увеличение уровня заполнения первого калориметра означает, что вода, перелитая из второго калориметра, полностью или частично кристаллизовалась.

Вычислим увеличение уровня заполнения первого калориметра в случае, если бы вся перелитая из второго калориметра вода кристаллизовалась.

$$\rho_л S\left(\frac{h}{3}+\Delta h_1\right)=\rho_в S\frac{h}{3} \Rightarrow \Delta h_1 = \frac{\rho_в - \rho_л}{\rho_л}\cdot\frac{h}{3} = 2{,}78\text{ см.}$$

S – площадь поперечного сечения калориметра.

По условию задачи $\Delta h < \Delta h_1$. Это значит, что в лёд превратилась не вся вода, перелитая из второго калориметра, а только её часть.

Равновесие льда и воды при атмосферном давлении может быть только при температуре 0^oC.

Таким образом, в первом калориметре в состоянии теплового равновесия будет находиться смесь из льда и воды при температуре 0^oC.

Пусть $m_в = \rho_в Sh/3$ – масса воды, перелитой в первый калориметр из второго, Δm – масса воды, перелитой из второго калориметра, которая превратилась в лёд.

Тогда

$$S\left(\frac{h}{3}+\Delta h\right)=\frac{m_в-\Delta m}{\rho_в}+\frac{\Delta m}{\rho_л}$$ – объём смеси "лёд + вода".

Отсюда

$$S\left(\frac{h}{3}+\Delta h\right)=\frac{\rho_в S\frac{h}{3}-\Delta m}{\rho_в}+\frac{\Delta m}{\rho_л}=S\frac{h}{3}+\frac{\rho_в-\rho_л}{\rho_в\rho_л}\Delta m;$$

$$S\Delta h=\frac{\rho_в-\rho_л}{\rho_в\rho_л}\Delta m \Rightarrow \Delta m=\frac{\rho_в\rho_л}{\rho_в-\rho_л}S\Delta h.$$

Запишем уравнение теплового баланса в данной системе:

$m_л c_л(0^o - t^o_л) = m_в c_в(t^o_в - 0^o) + \Delta m \cdot \lambda$, где

$Q_1 = m_л c_л(0^o - t^o_л)$ – количество теплоты, полученное льдом из первого калориметра при нагревании от $t^o_л$ до 0^oC;

$Q_2 = m_в c_в(t^o_в - 0^o)$ – количество теплоты, отданное водой из второго калориметра при охлаждении от $t^o_в$ до 0^oC;

$Q_3 = \Delta m \cdot \lambda$ – количество теплоты, отданное частью воды из второго калориметра при кристаллизации.

Раскроем уравнение теплового баланса и получим значение начальной температуры льда в первом калориметре.

$$-m_л c_л t^o_л = m_в c_в t^o_в + \Delta m \cdot \lambda; \quad t^o_л = -\frac{m_в c_в t^o_в + \Delta m \cdot \lambda}{m_л c_л}$$

$$t^o_л = -\frac{\rho_в S \frac{h}{3} c_в t^o_в + \frac{\rho_в \rho_л}{\rho_в - \rho_л} S \lambda \Delta h}{\rho_л c_л S \frac{h}{3}} =$$

$$= -\left(\frac{\rho_в}{\rho_л} \cdot \frac{c_в}{c_л} t^o_в + \frac{3\rho_в \lambda}{c_л(\rho_в - \rho_л)} \cdot \frac{\Delta h}{h}\right) = -54^o\,C$$ – начальная температура льда в первом калориметре.

22. *В закрытом сосуде с водой при температуре 0°С плавает лёд массой М, в который вмёрзла свинцовая дробинка массой m. Какое количество теплоты нужно подвести к системе "лёд – – свинец", чтобы льдинка полностью погрузилась в воду? Плотности свинца, льда и воды равны соответственно $\rho_с$, $\rho_л$, $\rho_в$; удельная теплота плавления льда λ.*

Решение. Пусть ΔM – масса растаявшего льда. Запишем условие плавания льда со свинцовой дробинкой после таяния части льда:

$$(M - \Delta M + m)g = \rho_в g\left(\frac{M - \Delta M}{\rho_л} + \frac{m}{\rho_с}\right), \text{где}$$

$V_л = (M - \Delta M)/\rho_л$ – объём непосредственно льда, $V_с = m/\rho_с$ – объём свинцовой дробинки.

Отсюда
$$\frac{M - \Delta M}{\rho_в} + \frac{m}{\rho_в} = \frac{M - \Delta M}{\rho_л} + \frac{m}{\rho_с}$$

$$m\left(\frac{1}{\rho_в} - \frac{1}{\rho_с}\right) = (M - \Delta M)\left(\frac{1}{\rho_л} - \frac{1}{\rho_в}\right); \qquad m\frac{\rho_с - \rho_в}{\rho_с} = (M - \Delta M)\frac{\rho_в - \rho_л}{\rho_л}$$

$$\Delta M = M - \frac{(\rho_с - \rho_в)\rho_л}{(\rho_в - \rho_л)\rho_с}m.$$

Q = ΔM·λ – количество теплоты, подведённое к системе "лёд – свинец".

$$Q = \left(M - \frac{(\rho_с - \rho_в)\rho_л}{(\rho_в - \rho_л)\rho_с}m\right)\lambda.$$