ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Определение

- *Высказыванием* называется повествовательное предложение, которое можно охарактеризовать либо как истинное, либо как ложное, но не как то и другое вместе.
- Высказывания обозначают прописными буквами латинского алфавита: . Истинное высказывание обозначают символом 1, а ложное – символом 0.

Логические операции

- Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются *составными*. Высказывания, не являющиеся составными, называются *элементарными*.
- Образование составного высказывания из элементарных высказываний с помощью логической связки называется *логической операцией*.

Логические операции

Отрицание

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Конъюнкция

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Логические операции

Дизъюнкция

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Импликация

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Логические операции

Эквиваленция

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Порядок операций

- Конечная последовательность букв, знаков логических операций и скобок, выражающая логическую структуру высказывания, называется *формулой логики высказываний*. Символы 0 и 1 также считаются формулами логики высказываний.
- Скобки в формуле указывают порядок выполнения операций. Для уменьшения количества скобок и сокращения записи принят следующий порядок выполнения операций: 1) отрицание; 2) конъюнкция; 3) дизъюнкция; 4) импликация; 5) эквиваленция.

Таблица истинности

A	B	C	$A \vee B$	$\overline{C}$	$B \Rightarrow \overline{C}$	$(A \vee B) \wedge (B \Rightarrow \overline{C})$
1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	0

Таблица истинности

- В общем случае, если формула содержит логических переменных, то ее таблица истинности будет содержать 2^n строк. В рассмотренном примере число строк равно 2^3.
- Формула, принимающая значение 1 при всех наборах значений истинности входящих в нее логических переменных, называется *тождественно-истинной* (или *тавтологией*).
- Формула, принимающая значение 0 при любых наборах значений истинности входящих в нее логических переменных, называется *тождественно-ложной*.

Равносильные формулы

- Две формулы логики высказываний называются *равносильными,* если они принимают одинаковые значения истинности при одних и тех же наборах значений истинности входящих в них логических переменных. При этом формулы должны содержать одинаковый набор логических переменных.
- Формулы можно обозначать греческими буквами α, β, γ и т.п.
- Если формулы α и β равносильны, то пишут $\alpha=\beta$.

Законы логики высказываний

1.	$A \wedge B \equiv B \wedge A$;
2.	$A \vee B \equiv B \vee A$;
3.	$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$;
4.	$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$;
5.	$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
6.	$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
7.	$\overline{\overline{A}} \equiv A$
8.	$A \wedge A \equiv A$;
9.	$A \vee A \equiv A$;
10.	$A \wedge 1 \equiv A$;

11.	$A \vee 1 \equiv 1$;
12.	$A \wedge 0 \equiv 0$;
13.	$A \vee 0 \equiv A$;
14.	$A \wedge \overline{A} \equiv 0$
15.	$A \vee \overline{A} \equiv 1$
16.	$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$
17.	$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$
18.	$A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$;
19.	$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Доказательство равносильности

Используя определение равносильности формул, доказать, что: $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv A \wedge B \Rightarrow C$.

Составим таблицу истинности для формул $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ и $A \wedge B \Rightarrow C$.

A	B	C	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$	$A \wedge B$	$A \wedge B \Rightarrow C$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

Значения истинности формул представлены в пятом и седьмом столбцах. Сравнивая эти столбцы, видим, что они одинаковы. Следовательно, $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv A \wedge B \Rightarrow C$.

Доказательство равносильности формул

Используя преобразования формул, доказать что:

$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv A \wedge B \Rightarrow C$.

Преобразуем формулу, стоящую слева (над знаком равносильности указаны номера используемых в преобразованиях свойств):

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \overset{18}{\equiv} A \Rightarrow (\overline{B} \vee C) \overset{18}{\equiv} \overline{A} \vee (\overline{B} \vee C).$$

Преобразуем теперь формулу, стоящую справа:

$$A \wedge B \Rightarrow C \overset{18}{\equiv} \overline{A \wedge B} \vee C \overset{16}{\equiv} (\overline{A} \vee \overline{B}) \vee C \overset{4}{\equiv} \overline{A} \vee (\overline{B} \vee C).$$

Таким образом, мы привели формулы к одинаковому виду. Следовательно, $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv A \wedge B \Rightarrow C$.

Определение логического следствия

Формула β называется *логическим следствием* формул $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, если она принимает значение 1 всякий раз, как каждая из формул $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ принимает значение 1.

Если формула β является логическим следствием формул $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, то пишут $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m \models \beta$.

Формулы $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ называются *посылками*, а формула β – *заключением*.

Правила логического вывода

Для доказательства того, что данная формула является логическим следствием ряда других формул, часто используются *правила логического вывода*:

1. $A \wedge (A \Rightarrow B) \models B$;
2. $\overline{B} \wedge (A \Rightarrow B) \models \overline{A}$;
3. $\overline{A} \wedge (A \vee B) \models B$;
4. $A \wedge B \models A$;
5. $A \models A \vee B$;
6. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \models (A \Rightarrow C)$;
7. $(A \Rightarrow \overline{A}) \models \overline{A}$;
8. $(A \Rightarrow B) \models ((A \vee C) \Rightarrow (B \vee C))$
9. $(A \Rightarrow B) \models ((A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge C))$.

Пример. Первый способ

Доказать логическую правильность следующего рассуждения: «Если обстановка в мире стабильная и добыча нефти растет, то бензин не дорожает. Обстановка в мире стабильная. Бензин дорожает. Следовательно, добыча нефти падает».

Введем следующие обозначения для элементарных высказываний: A - «Обстановка в мире стабильная»; B - «Добыча нефти растет»; C - «Бензин дорожает».

Тогда рассуждение можно записать в виде:

$A \wedge B \Rightarrow \overline{C}$, A, C $\models$ $\overline{B}$.

Пример. Первый способ

В нашем случае имеем три посылки $A \wedge B \Rightarrow \overline{C}$, A, C и заключение $\overline{B}$. Посылки соответствуют первым трем предложениям рассуждения, а заключение – последнему предложению, которое начинается со слова «следовательно».

Проверим, является ли заключение $\overline{B}$ логическим следствием этих посылок. Составим таблицу истинности для посылок и заключения.

A	B	C	$A \wedge B$	$\overline{C}$	$A \wedge B \Rightarrow \overline{C}$	$\overline{B}$
1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1

Пример. Первый способ

Найдем строки, в которых все три посылки $A \wedge B \Rightarrow \overline{C}$, A, C принимают значение 1, и проверим, какое значение в каждой из этих строк принимает заключение $\overline{B}$.

Видно, что существует единственная строка (третья сверху), в которой все посылки принимают значение 1. Заключение в этой строке также принимает значение 1. Значит, по определению, формула $\overline{B}$ является логическим следствием формул $A \wedge B \Rightarrow \overline{C}$, A, C. Следовательно, данное рассуждение является логически правильным.

Заметим, что если в таблице окажется хотя бы одна строка, в которой все посылки имеют значение 1, а заключение при этом имеет значение 0, то оно не будет являться логическим следствием этих посылок.

Пример. Второй способ

Используя правила логического вывода, доказать, что

$A \wedge B \Rightarrow \overline{C}$, A, C |= $\overline{B}$.

Доказательство с помощью правил логического вывода ведется следующим образом. Берутся любые две посылки и соединяются конъюнкцией, на основании правил логического вывода делается вывод. Затем к полученному выводу присоединяется еще одна посылка и т.д., пока не будет получено заключение. В ходе доказательства можно преобразовывать промежуточные результаты, используя различные равносильности.

Соединим третью и первую посылки и используем правило 2. Получим:

$$C \wedge \left(A \wedge B \Rightarrow \overline{C}\right) \models \overline{A \wedge B} .$$

Пример. Второй способ

Преобразуем получившийся вывод, применив закон де Моргана:

$\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$.

Соединим получившийся результат с оставшейся второй посылкой конъюнкцией. Согласно правилу 3, имеем:

$A \wedge \left(\overline{A} \vee \overline{B}\right) \models \overline{B}$.

Таким образом, заключение получено. Значит, логическое следствие доказано.