

Системы счисления

- § 9. Системы счисления
- § 10. Позиционные системы счисления
- § 11. Двоичная система счисления
- § 12. Восьмеричная система счисления
- § 13. Шестнадцатеричная система счисления
- § 14. Другие системы счисления

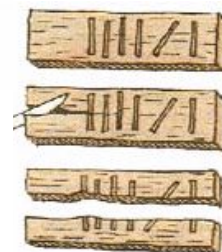
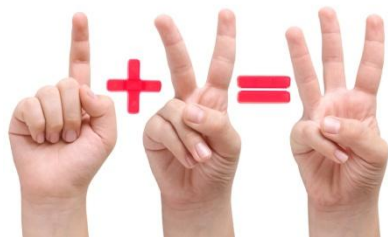
Системы счисления

§ 9. Системы счисления

Что такое система счисления?

Система счисления — это правила записи чисел с помощью специальных знаков — **цифр**, а также соответствующие правила выполнения операций с этими числами.

Счёт на пальцах:



Унарная (лат. *unus* – один) – одна цифра обозначает единицу (1 день, 1 камень, 1 баран, ...)



- только натуральные числа
- запись больших чисел – длинная (1 000 000?)

Египетская десятичная система

черта	– 1	лотос	 – 1000	 – 1000000
хомут	∩ – 10	палец	 – 10000	человек
верёвка	⊙ – 100	лягушка	 – 100000	

$$\text{лотос} \text{ верёвка} \text{ верёвка} \text{ хомут хомут хомут хомут} \text{ черта черта черта черта черта} = 1235$$

$$2014 = \text{лотос лотос} \text{ хомут} \text{ черта черта черта черта}$$

Непозиционные системы счисления

Непозиционная система счисления: значение цифры не зависит от её места в записи числа.

- унарная
- египетская десятичная
- римская



*Желтый / Ф. Елбчин /
10/к-88г.*

- славянская
- и другие...

«Пираты XX века»



Римская система счисления

I – 1 (палец),

V – 5 (раскрытая ладонь, 5 пальцев),

X – 10 (две ладони),

L – 50,

C – 100 (*Centum*),

D – 500 (*Demimille*),

M – 1000 (*Mille*)



Спасская башня
Московского Кремля

Римская система счисления

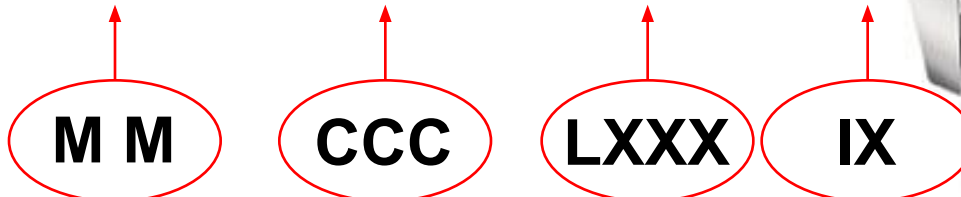
Правила:

- (обычно) не ставят больше **трех** одинаковых цифр подряд
- если **младшая** цифра (только **одна!**) стоит **слева** от старшей, она вычитается из суммы (*частично непозиционная!*)

Примеры:

$$MDCXLIV = 1000 + 500 + 100 - 10 + 50 - 1 + 5 = 1644$$

$$2389 = 2000 + 300 + 80 + 9$$



$$2389 = M M C C C L X X X I X$$



Римская система счисления

MCDLXVII =

MMDCXLIV =

MMMCCCLXXII =

CMXXVIII =

Римская система счисления

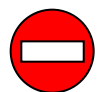
3768 =

2983 =

1452 =

1999 =

Римская система счисления



- только натуральные числа (*дробные?*
отрицательные?)
- для записи больших чисел нужно вводить новые цифры

■ слож



Какое максимальное число
можно записать?

Славянская система счисления

алфавитная система счисления (непозиционная)



Часы
Суздальского
Кремля

Системы счисления

§ 10. Позиционные системы счисления

Определения

Позиционная система: значение цифры определяется ее позицией в записи числа.

Алфавит системы счисления — это используемый в ней набор цифр.

Основание системы счисления — это количество цифр в алфавите (мощность алфавита).

Разряд — это позиция цифры в записи числа. Разряды в записи целых чисел нумеруются с нуля справа налево.

Формы записи чисел

тысячи сотни десятки единицы
 → → → →
 3 2 1 0 разряды

развёрнутая форма
записи числа

6 3 7 5 = $6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

6000 300 70 5

Схема Горнера:

$$6\ 3\ 7\ 5 = ((6 \cdot 10 + 3) \cdot 10 + 7) \cdot 10 +$$



- для вычислений не нужно использовать возведение в степень
- удобна при вводе чисел с клавиатуры, начиная с первой

Перевод в десятичную систему

Через развёрнутую запись:

разряды: $1234_5 = 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 =$

194

=1

основание системы счисления

разряды: $a_3 a_2 a_1 a_0 = a_3 \cdot p^3 + a_2 \cdot p^2 + a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p$

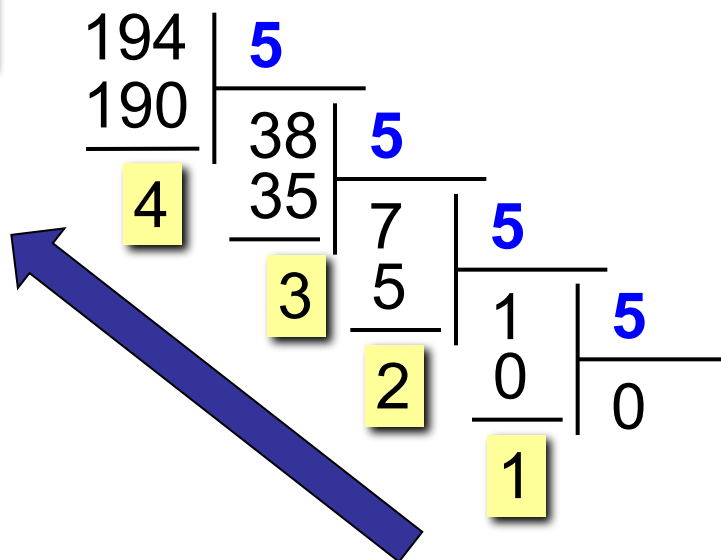
Через схему Горнера:

$$1234_5 = ((1 \cdot 5 + 2) \cdot 5 + 3) \cdot 5 + 4 = 194$$

$$a_3 a_2 a_1 a_0 = ((a_3 \cdot p + a_2) \cdot p + a_1) \cdot p + a_0$$

Перевод из десятичной в любую

10 → 5



$$194 = 1234_5$$



Как перевести в систему с основанием 8?

Делим число на p , отбрасывая остаток на каждом шаге, пока не получится 0. Затем надо выписать найденные остатки в обратном порядке.

Задачи

Задача: в некоторой системе счисления число 71 записывается как «56_x»? Определите основание системы счисления X.

$$71 = 56_x$$

- в записи есть цифра 6, поэтому $X > 6$
- переводим правую часть в десятичную систему

$$56_x = 5 \cdot X^1 + 6 \cdot X^0 = 5 \cdot X + 6$$

- решаем уравнение

$$71 = 5 \cdot X + 6 \quad X = 13$$

Задачи

Задача: в некоторой системе счисления число 71 записывается как « 155_x »? Определите основание системы счисления X .

$$71 = 155_x$$

- в записи есть цифра 5, поэтому $X > 5$
- переводим правую часть в десятичную систему

$$155_x = 1 \cdot X^2 + 5 \cdot X^1 + 5 \cdot X^0 + 5 \cdot X^0 + 5$$

- решаем уравнение

$$71 = X^2 + 5 \cdot X + 5$$

$$X = 6$$

$$X \neq -11$$

Задачи

Задача: найдите все основания систем счисления, в которых запись десятичного числа 24 оканчивается на 3.

$$24 = k \cdot X + 3$$

$$21 = k \cdot X \quad X = \cancel{3}, 7, 21$$

Задачи

Задача: найдите все десятичные числа, не превосходящие 40, запись которых в системе счисления с основанием 4 оканчивается на 11.

$$N = k \cdot 4^2 + 1 \cdot 4 + 1 = k \cdot 16 +$$

При $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ получаем

$$N = 5, 21, 37, 53, \dots$$

Задачи

Задача: Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О и У, записаны в алфавитном порядке. Вот начало списка:

- | | | |
|----------|-------|----------|
| 1. ААААА | А → 0 | 1. 00000 |
| 2. ААААО | О → 1 | 2. 00001 |
| 3. ААААУ | У → 2 | 3. 00002 |
| 4. АААОА | | 4. 00010 |
| 5. ... | | 5. ... |

в троичной
системе!

Найдите слово, которое стоит на 140-м месте от начала списка.

на 1-м месте: 0

на 140-м месте:

139



Сколько всего?

$$139 = 12011_3$$



ОУАОО

Дробные числа

$$0,6375 = 6 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,01 + 7 \cdot 0,001 + 5 \cdot 0,0001$$

Развёрнутая форма записи:

разряды: -1 -2 -3 -4

$$0,6375 = 6 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4}$$

$$0,1234_5 = 1 \cdot 5^{-1} + 2 \cdot 5^{-2} + 3 \cdot 5^{-3} + 4 \cdot 5^{-4}$$

перевод в десятичную систему

Схема Горнера:

$$0,6375 = 10^{-1} \cdot (6 + 10^{-1} \cdot (3 + 10^{-1} \cdot (7 + 10^{-1} \cdot 5)))$$

$$0,1234_5 = 5^{-1} \cdot (1 + 5^{-1} \cdot (2 + 5^{-1} \cdot (3 + 5^{-1} \cdot 4)))$$

перевод в десятичную систему

Дробные числа: из десятичной в любую

$$0,1234_5 = 5^{-1} \cdot (1 + 5^{-1} \cdot (2 + 5^{-1} \cdot (3 + 5^{-1} \cdot 4)))$$


$$5 \cdot (0,1234_5) = \boxed{1} + \boxed{5^{-1} \cdot (2 + 5^{-1} \cdot (3 + 5^{-1} \cdot 4))}$$

целая часть

дробная часть

$$0, a_1 a_2 a_3 a_4 = p^{-1} \cdot (a_1 + p^{-1} \cdot (a_2 + p^{-1} \cdot (a_3 + p^{-1} \cdot a_4)))$$

$$p \cdot (0, a_1 a_2 a_3 a_4) = \boxed{a_1} + \boxed{p^{-1} \cdot (a_2 + p^{-1} \cdot (a_3 + p^{-1} \cdot a_4))}$$

 Как найти a_2 ?

Дробные числа: из десятичной в любую

10 → 5

0,9376

Вычисления	Целая часть	Дробная часть
$0,9376 \cdot 5 = 4,688$	4	0,688
$0,688 \cdot 5 = 3,44$	3	0,44
$0,44 \cdot 5 = 2,2$	2	0,2
$0,2 \cdot 5 = 1$	1	0

$$0,9376 = 0,4321_5$$

10 → 5

0,3



Что делать?

Дробные числа: из десятичной в любую

10 → 6

$$25,375 = 25 + 0,375$$

Системы счисления

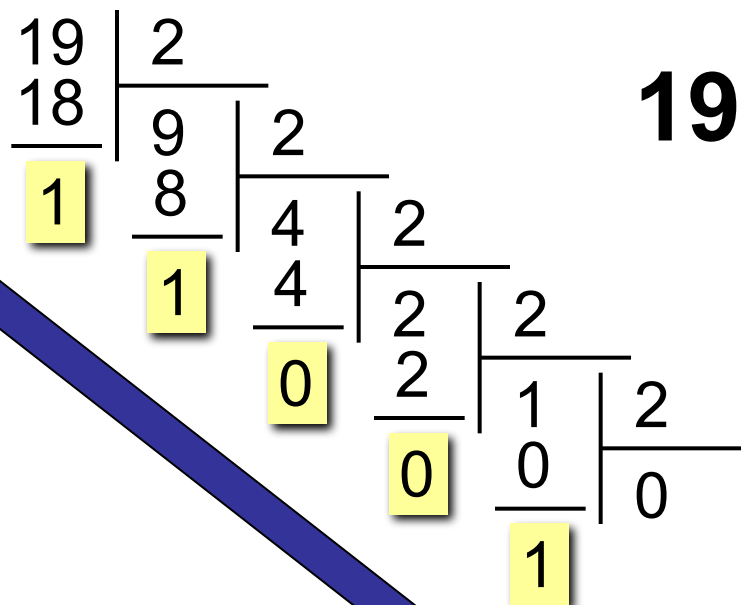
§ 11. Двоичная система счисления

Двоичная система

Основание (количество цифр): 2

Алфавит: 0, 1

10 → 2



$$19 = 10011_2$$

система
счисления

2 → 10

4 3 2 1 0 разряды

$$\begin{aligned}
 10011_2 &= 1 \cdot 2^4 + \cancel{0 \cdot 2^3} + \cancel{0 \cdot 2^2} + 1 \cdot 2^1 + \\
 &\quad 1 \cdot 2^0 \\
 &= 16 + 2 + 1 = 19
 \end{aligned}$$

Метод подбора

77 $10 \rightarrow 2$

77

наибольшая степень двойки, которая меньше или равна данному числу

13

5

1

1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

$$77 = 64 + 13 + 5 + 1$$

Разложение по степеням двойки:

$$77 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0$$

$$77 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

6 5 4 3 2 1 0 разряды

77 =

1001101₂

Перевод из двоичной в десятичную

разряды 6 5 4 3 2 1 0

$$1001101_2 = 2^6 + 2^3 + 2^2 + 2^0$$

$$= 64 + 8 + 4 + 1 = 77$$

Схема Горнера:

Разряд		Вычисления	Результат
6	1	1	1
5	0	$1 \cdot 2 + \mathbf{0}$	2
4	0	$2 \cdot 2 + \mathbf{0}$	4
3	1	$4 \cdot 2 + \mathbf{1}$	9
2	1	$9 \cdot 2 + \mathbf{1}$	19
1	0	$19 \cdot 2 + \mathbf{0}$	38
0	1	$38 \cdot 2 + \mathbf{1}$	77

Арифметические операции

сложение

$$0+0=0 \quad 0+1=1$$

$$1+0=1 \quad 1+1=10_2$$

$$1 + 1 + 1 = 11_2$$

1 1 1 1 1

1 0 1 1 0₂

+ 1 1 1 0 1 1₂

1 0 1 0 0 0 1₂

перенос

вычитание

$$0-0=0 \quad 1-1=0$$

$$1-0=1 \quad 10_2-1=1$$

заём

0 1 1 10₂ 0 10₂

~~1 0 0 0 1 0 1~~₂

- 1 1 0 1 1₂

0 1 0 1 0 1 0₂

Арифметические операции

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ + 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 10111_2 \\ + 101110_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 10011_2 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ - 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110011_2 \\ - 10101_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011_2 \\ - 110101_2 \\ \hline \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 110101_2 \\ - 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

умножение

$$\begin{array}{r}
 10101_2 \\
 \times 10 \\
 \hline
 1_210101_2 \\
 + 10101_2 \\
 \hline
 1101001_2
 \end{array}$$

деление

$$\begin{array}{r}
 10101_2 \bigg| 111_2 \\
 - 111_2 \\
 \hline
 111_2 \\
 - 111_2 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Дробные числа

10 → 2

0,8125

Вычисления	Целая часть	Дробная часть
$0,8125 \cdot 2 = 1,625$	1	0,625
$0,625 \cdot 2 = 1,25$	1	0,25
$0,25 \cdot 2 = 0,5$	0	0,5
$0,5 \cdot 2 = 1$	1	0

$$0,8125 = 0,1101_2$$

10 → 2

$$0,6 = 0,100110011001\dots = 0,(1001)_2$$



Бесконечное число разрядов!

Дробные числа

- Большинство дробных чисел хранится в памяти с некоторой погрешностью.
- При выполнении вычислений с дробными числами погрешности накапливаются и могут существенно влиять на результат.
- Желательно обходиться без использования дробных чисел, если это возможно.

если $A \neq \sqrt{B}$ то . . .

целые, ≥ 0

если $A^2 < B$ то . . .

Двоичная система счисления



- нужны только устройства с **двумя состояниями**
- **надёжность передачи** данных при помехах
- компьютеру проще выполнять **вычисления** (умножение сводится сложению и т.п.)



- **длинная** запись чисел: $1024 = 10000000000_2$
- запись **однородна** (только 0 и 1)

Системы счисления

§ 12. Восьмеричная система счисления

Восьмеричная система счисления

Основание: 8

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

**PDP-11, ДВК,
СМ ЭВМ, БЭСМ,
БК**

10 → 8

$$\begin{array}{r|l}
 100 & 8 \\
 \hline
 96 & 12 \\
 \hline
 4 & 8 \\
 & \hline
 & 1 \\
 & \hline
 & 0 \\
 & \hline
 & 0 \\
 & \hline
 & 1
 \end{array}$$

$$100 = 144_8$$

8 → 10

2 1 0 разряды

$$\begin{aligned}
 144_8 &= 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 \\
 &= 64 + 32 + 4 = 100
 \end{aligned}$$

Примеры

$$134 =$$

$$75 =$$

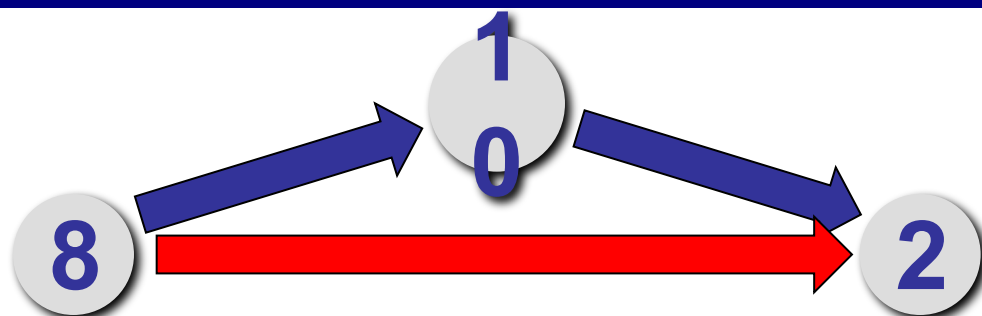
$$134_8 =$$

$$75_8 =$$

Восьмеричная система счисления

X_{10}	X_8	X_2
0	0	000
1	1	001
2	2	010
3	3	011
4	4	100
5	5	101
6	6	110
7	7	111

Перевод в двоичную систему счисления



- трудоёмко
- 2 действия

$$8 = 2^3$$



Каждая восьмеричная цифра может быть записана как три двоичных (*триада*)!

$$1725_8 = \underbrace{001}_1 \quad \underbrace{111}_7 \quad \underbrace{010}_2 \quad \underbrace{101}_5$$

Примеры

$$3467_8 =$$

$$\del{2148}_8 =$$

$$7352_8 =$$

$$1231_8 =$$

Перевод из двоичной в восьмеричную

1001011101111_2

Шаг 1. Разбить на триады, начиная справа:

$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$

Шаг 2. Каждую триаду записать одной восьмеричной цифрой:

$001\ 001\ 011\ 101\ 111_2$
 $\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{7}$

Ответ: $1001011101111_2 = 11357_8$

Примеры

$$101101010010_2 =$$

$$11111101011_2 =$$

$$1101011010_2 =$$

Арифметические операции

сложение

$$\begin{array}{r}
 1 \ 1 \ 1 \\
 1 \ 5 \ 6_8 \\
 + \ 6 \ 6 \ 2_8 \\
 \hline
 1 \ 0 \ 4 \ 0_8
 \end{array}$$

1 в перенос

1 в перенос

$$6 + 2 = 8 = 8 + 0$$

$$5 + 6 + 1 = 12 = 8 + 4$$

$$1 + 6 + 1 = 8 = 8 + 0$$

1 в перенос

Примеры

$$\begin{array}{r} 353_8 \\ + 736_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1353_8 \\ + 777_8 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции

ВЫЧИТАНИЕ

$$\begin{array}{r}
 \quad \cdot \quad \cdot \\
 456_8 \\
 - 277_8 \\
 \hline
 157_8
 \end{array}$$

заём

$$(6 + 8) - 7 = 7 \quad \text{заём}$$

$$(5 - 1 + 8) - 7 = 5$$

$$(4 - 1) - 2 = 1$$

Примеры

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1156_8 \\ - 662_8 \\ \hline \end{array}$$

Системы счисления

§ 13. Шестнадцатеричная система счисления

Примеры

$$171 =$$

$$1C5_{16} =$$

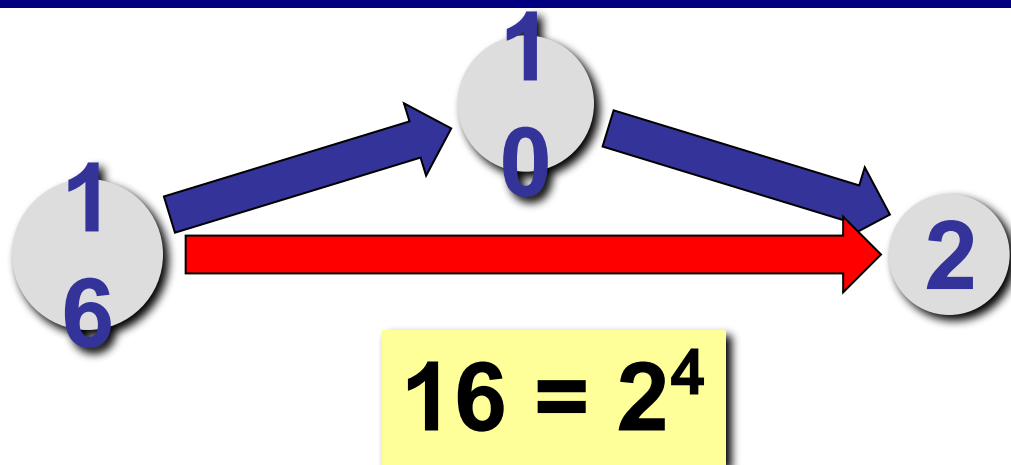
$$206 =$$

$$22B_{16} =$$

Шестнадцатеричная система счисления

X_{10}	X_{16}	X_2	X_{10}	X_{16}	X_2
0	0	0000	8	8	1000
1	1	0001	9	9	1001
2	2	0010	10	A	1010
3	3	0011	11	B	1011
4	4	0100	12	C	1100
5	5	0101	13	D	1101
6	6	0110	14	E	1110
7	7	0111	15	F	1111

Перевод в двоичную систему



- трудоёмко
- 2 действия



Каждая шестнадцатеричная цифра может быть записана как четыре двоичных (*тетрада*)!

$$7F1A_{16} = \underbrace{0111}_7 \quad \underbrace{1111}_F \quad \underbrace{0001}_1 \quad \underbrace{1010}_A_2$$

Примеры

$$C73B_{16} =$$

$$2FE1_{16} =$$

Перевод из двоичной системы

1001011101111_2

Шаг 1. Разбить на тетрады, начиная справа:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$

Шаг 2. Каждую тетраду записать одной шестнадцатеричной цифрой:

$0001\ 0010\ 1110\ 1111_2$
 $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{E}\ \boxed{F}$

Ответ: $1001011101111_2 = 12EF_{16}$

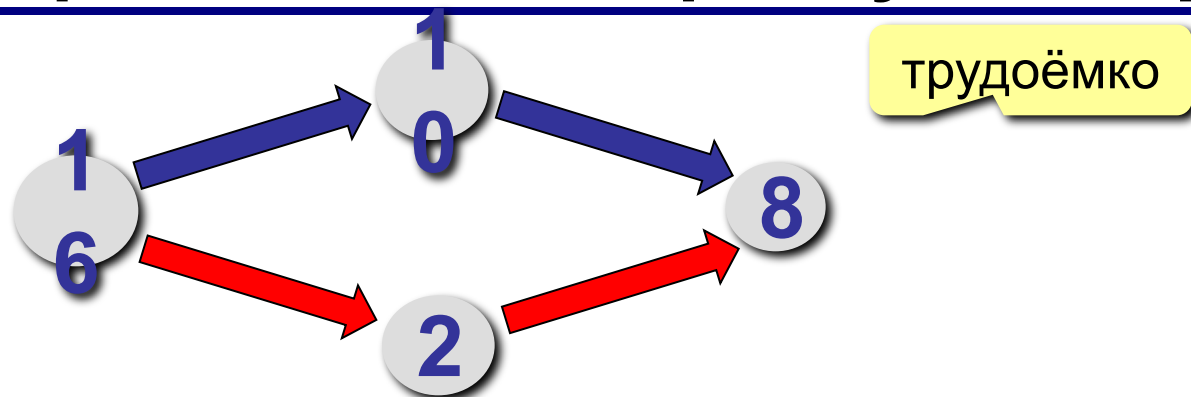
Примеры

$$1010101101010110_2 =$$

$$111100110111110101_2 =$$

$$110110110101111110_2 =$$

Перевод в восьмеричную и обратно



Шаг 1. Перевести в двоичную систему:

$$3DEA_{16} = 11\ 1101\ 1110\ 1010_2$$

Шаг 2. Разбить на триады (справа):

$$011\ 110\ 111\ 101\ 010_2$$

Шаг 3. Триада – одна восьмеричная цифра:

$$3DEA_{16} = 36752_8$$

Примеры

$$A35_{16} =$$

$$765_8 =$$

Примеры

$$\begin{array}{r} \text{C B A}_{16} \\ + \text{A 5} \\ \hline \text{9}_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{F D B}_{16} \\ + \text{A B} \\ \hline \text{C}_{16} \end{array}$$

Арифметические операции

ВЫЧИТАНИЕ

заём

$$\begin{array}{r} \text{C } 5 \text{ B}_{16} \\ - \text{A } 7 \text{ E}_{16} \\ \hline 1 \text{ D } \text{D}_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{12 } 5 \text{ 11} \\ - \text{10 } 7 \text{ 14} \\ \hline 1 \text{ 13 } \text{13} \end{array}$$

заём

$$(11 + 16) - 14 = 13 = \text{D}_{16}$$

$$(5 - 1) + 16 - 7 = 13 = \text{D}_{16}$$

$$(12 - 1) - 10 = 1$$

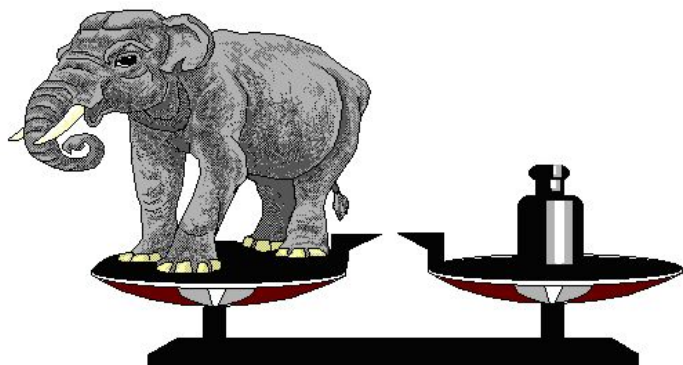
Примеры

$$\begin{array}{r} 1 \text{ В } \text{А}_{16} \\ - \text{А } 5 \text{ 9}_{16} \\ \hline \end{array}$$

Системы счисления

§ 14. Другие системы счисления

Задача Баше о наборе гирь



Как с помощью 4-х гирь
взвесить от 0 до 40 кг?

- + 1 гиря на правой чашке
- 0 гиря снята
- 1 гиря на левой чашке



Троичная система!

Веса гирь – степени числа 3:

1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг

Пример:

$$27 \text{ кг} + 9 \text{ кг} + 3 \text{ кг} + 1 \text{ кг} = 40 \text{ кг}$$

Троичная уравновешенная система

ЭВМ «Сетунь» (1958), Н.П. Брусенцов

Основание: 3

Алфавит: $\bar{1}$ («-1»), 0, 1

Для N разрядов: всего 3^N значений:

0 + по $\lfloor 3^N/2 \rfloor$ положительных
и отрицательных чисел

уравновешенная
система

$$-4 \quad \bar{1}\bar{1} = (-1) \cdot 3^1 + (-1) \cdot 3^0$$

$$-3 \quad \bar{1}0 = (-1) \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0$$

$$-2 \quad \bar{1}1 = (-1) \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$$

$$-1 \quad 0\bar{1} = 0 \cdot 3^1 + (-1) \cdot 3^0$$

$$0 \quad 00 = 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0$$

$$1 \quad 01 = 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$$

$$2 \quad 1\bar{1} = 1 \cdot 3^1 + (-1) \cdot 3^0$$

$$3 \quad 10 = 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0$$

$$4 \quad 11 = 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$$



- и положительные, и отрицательные числа
- для изменения знака нужно поменять знаки у всех цифр
- запись короче, чем в двоичной системе





- нужны элементы с **тремя** состояниями

Двоично-десятичная система (ДДС)

Десятичные цифры, закодированные в двоичном коде.
Binary coded decimal (BCD).

$$9024,19 = \underset{9}{1001} \underset{0}{0000} \underset{2}{0010} \underset{4}{0100}, \underset{1}{0001} \underset{9}{1001} \text{ ддс}$$

$$101010011,01111 \text{ ддс} = \\ = \underset{0}{000}1 \underset{0}{0101} \underset{0}{0011}, \underset{0}{0111} \underset{0}{1000} \text{ ддс} = 153,78$$

- 
 - легко переводить в десятичную систему
 - просто умножать и делить на 10
 - конечные десятичные дроби записываются **точно** (аналог ручных расчётов)
- 
 - длиннее, чем двоичная запись
 - сложнее арифметические операции

Использование – в калькуляторах.

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич

д.т.н., учитель информатики

ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург

kpolyakov@mail.ru

ЕРЕМИН Евгений Александрович

к.ф.-м.н., доцент кафедры мультимедийной

дидактики и ИТО ПГГПУ, г. Пермь

eremin@pspu.ac.ru

Источники иллюстраций

1. <http://www.najboljamamanasvetu.com>
2. <http://www.tissot.ch>
3. <http://www.mindmeister.com>
4. <http://www.antiqueclocksshop.com/>
5. <http://en.wikipedia.org>
6. <http://ru.wikipedia.org>
7. авторские материалы