

18 МЕТОД СИЛ

18.1 Понятие о статически неопределимых системах и их свойствах

Статически неопределимыми системами

называются стержневые системы, для определения реакций опор в которых только уравнений равновесия недостаточно.

Число связей, наложенных на статически неопределимую систему, *больше* того количества связей, которые обеспечивают геометрическую неизменяемость конструкции.

Таковыми связями могут быть как опорные связи, так и стержни самой конструкции.

Для обеспечения геометрической неизменяемости балки (рамы) в плоскости достаточно трех связей.

Эти связи *необходимые*.

Дополнительные связи, которые не являются необходимыми для обеспечения геометрической неизменяемости конструкции, называются *лишними*.

Для раскрытия статической неопределимости систем необходимо составлять дополнительные уравнения совместности деформаций.

* Геометрический и кинематический анализ стержневых систем
подробно рассматривался ранее.

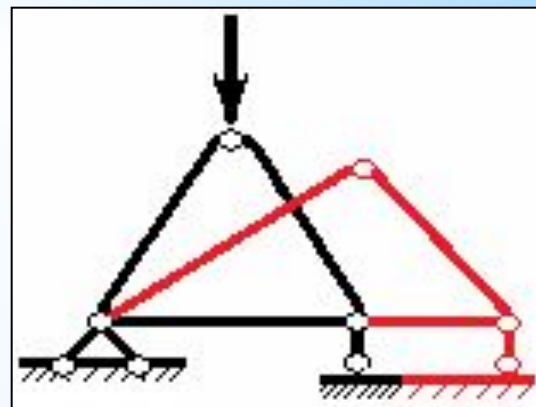
Напомним!

Под действием нагрузок сооружение (стержневая система)
деформируется, и его точки перемещаются (при этом изменяется
также и форма сооружения).

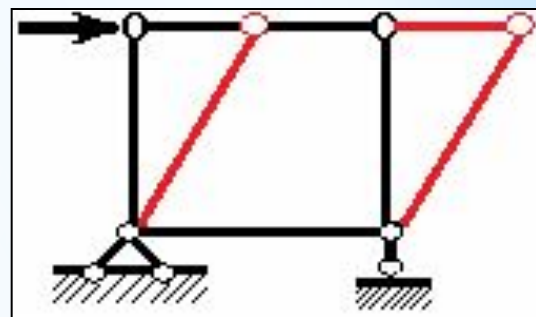
Если указанные перемещения возможны только за счет
деформации стержней (элементов сооружения), то стержневая
система называется **геометрически неизменяемой**. Иначе говоря,
в элементах конструкции должны отсутствовать перемещения
точек, не связанные с деформацией этих элементов под действием
нагрузки.

В сопротивлении материалов и строительной механике
рассматриваются **только такие** конструкции (в том числе и
стержневые системы).

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕИЗМЕНЯЕМАЯ СИСТЕМА - система соединенных между собой стержней, допускающая относительные перемещения стержней **ТОЛЬКО ПРИ ИХ ДЕФОРМАЦИИ.**



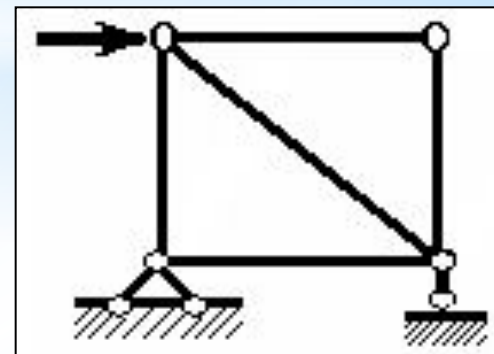
ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЕМАЯ СИСТЕМА – система соединенных между собой стержней, допускающая КОНЕЧНЫЕ перемещения стержней **БЕЗ ИХ ДЕФОРМАЦИИ.**



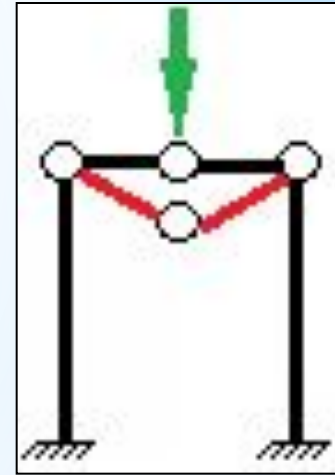
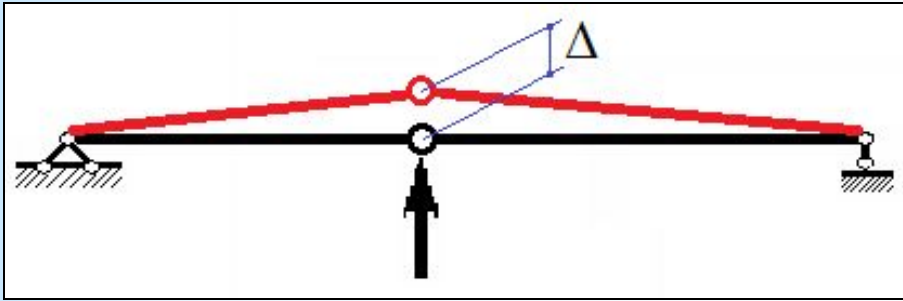
Геометрически изменяемые системы – это по сути **механизмы**.

Перемещения точек элементов такой системы **возможны без деформирования стержней** (элементов конструкции).

Введение дополнительного стержня превращает геометрически изменяемую систему в геометрически неизменяемую: составлена из двух соединенных между собой треугольников (в строительной механике - дисков).

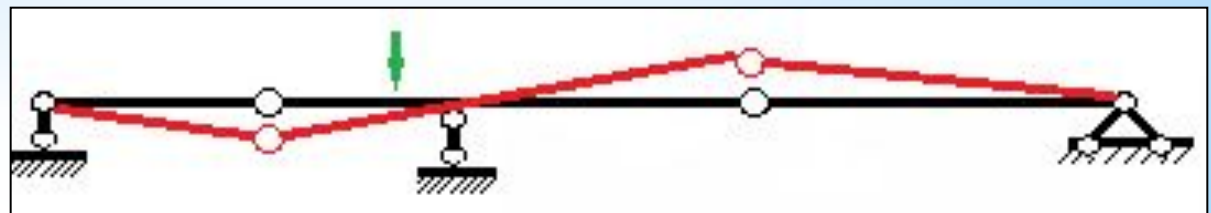
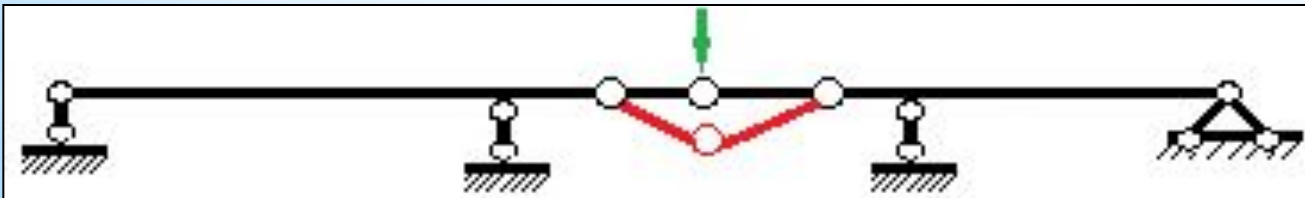


КИНЕМАТИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЕМАЯ СИСТЕМА (ее еще называют МГНОВЕННО ИЗМЕНЯЕМАЯ система)- система соединенных между собой стержней, допускающая **БЕЗ ДЕФОРМАЦИИ тела** **БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ**, после чего система становится неизменяемой.

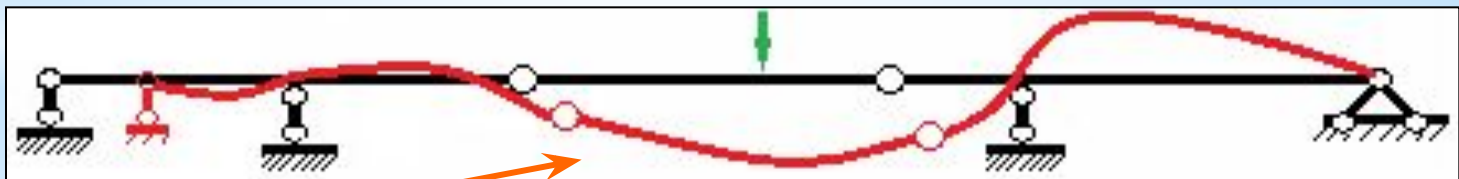
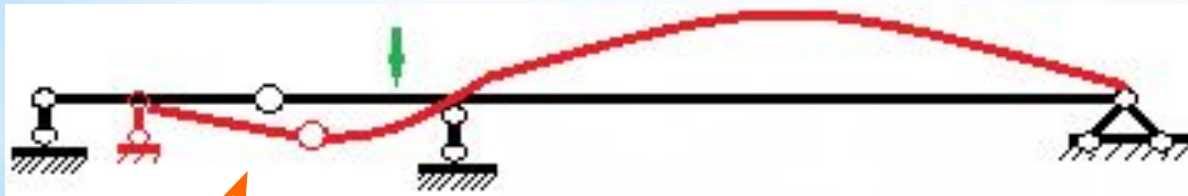
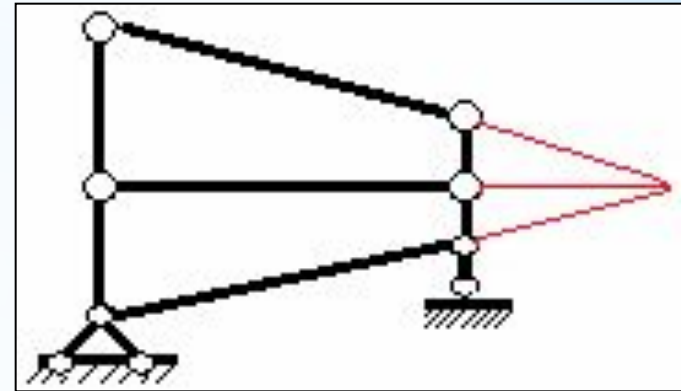
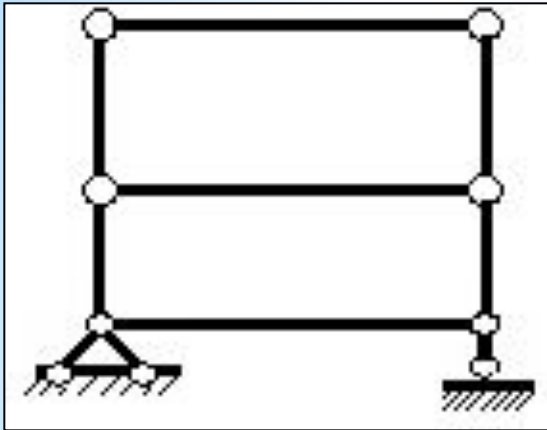


Геометрические признаки мгновенно изменяемых систем:

- шарниры или шарнир и стержень находятся на одной прямой



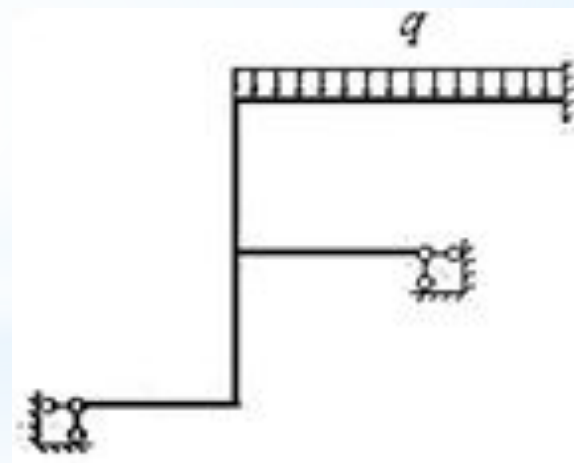
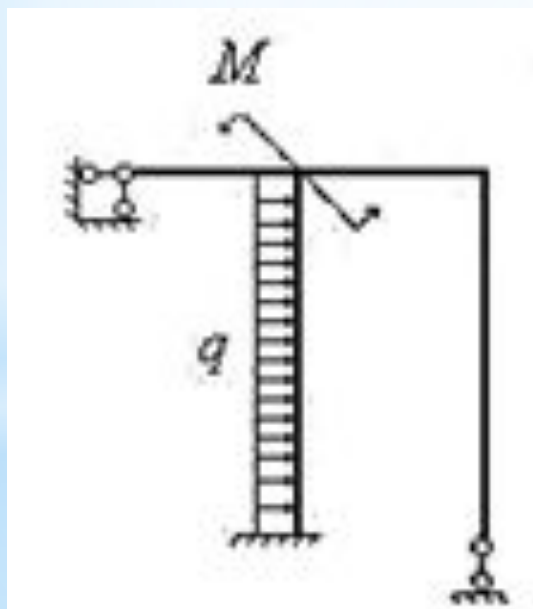
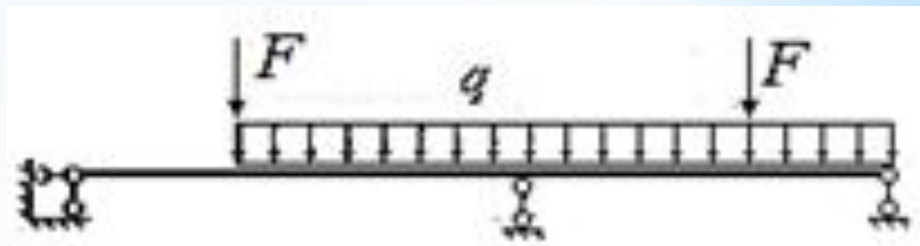
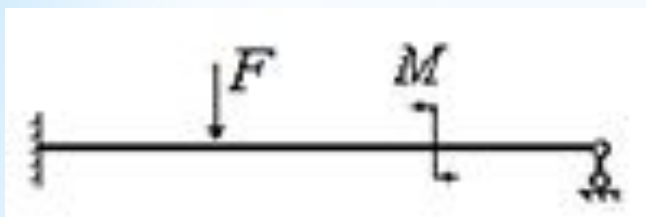
- стержни параллельны или пересекаются в одной точке



Балки статически определимые и геометрически неизменяемые.

Примеры статически неопределимых балок и рам

Рис. 18.1



Статически неопределимые системы обладают рядом характерных свойств:

1. Статически неопределимая система ввиду наличия добавочных лишних связей, по сравнению с соответствующей статически определимой системой оказывается более жесткой.
2. В статически неопределимых системах возникают меньшие внутренние усилия, что определяет их экономичность по сравнению со статически определимыми системами при одинаковых внешних нагрузках.
3. Разрушение лишних связей в нагруженном состоянии, не ведет к разрушению всей системы в целом, так как удаление этих связей приводит к новой геометрически неизменяемой системе, в то время как потеря связи в статически определимой системе приводит к изменяемой системе.

4. Для расчета статически неопределимых систем необходимо предварительно задаваться геометрическими характеристиками поперечных сечений элементов, т.е. фактически их формой и размерами, так как их изменение приводит к изменению усилий в связях и новому распределению усилий во всех элементах системы.

5. При расчете статически неопределимых систем необходимо заранее выбрать материал конструкции, так как необходимо знать его модули упругости.

6. В статически неопределимых системах температурное воздействие, осадка опор, неточности изготовления и монтажа вызывают появление дополнительных усилий.

Понятие «расчет» подразумевает **только построение эпюр** внутренних силовых факторов, возникающих в элементах системы, а не расчет на прочность, жесткость и т.д.

18.2 Основные методы расчета статически неопределимых систем

18.2.1 Метод сил. Основными искомыми величинами являются *усилия в лишних связях*.

Знание усилий в лишних связях позволит по методу сечений выполнять полный расчет по определению усилий, возникающих в поперечных сечениях элементов заданной системы.

18.2.2 Метод перемещений. Основными искомыми величинами являются *перемещения узловых точек, вызванные деформацией системы*.

Знание этих перемещений необходимо и достаточно для определения всех внутренних усилий, возникающих в поперечных сечениях элементов, заданной системы.

18.2.3 Смешанный метод. Здесь часть неизвестных представляет собой усилия, а другая часть – перемещения.

18.2.4 Комбинированный метод. Используется при расчете симметричных систем при действии несимметричных нагрузок.

Систему целесообразно рассчитывать на симметричную составляющую заданной нагрузки *методом перемещений*, а на обратно симметричную составляющую – *методом сил*.

18.2.5 Метод конечных элементов. Система разбивается на простые конечные элементы и по матрице жесткости элемента и системы в целом устанавливается связь между перемещениями узлов элемента и системы и усилиями в них.

В основе всех методов расчета упругих статически неопределимых систем, в том числе и рам, лежит желание уменьшить число совместно решаемых уравнений и числа неизвестных в них.

Для этой цели из сложной системы выделяется *более простая основная система*, расчет которой является достаточно простым.

Основная система отличается от заданной системы отсутствием некоторых связей, или, наоборот, введенными в нее новыми абсолютно жесткими связями.

Отброшенные связи заменяются в основной системе внешними, вначале **неизвестными силами**, приложенными по направлениям отброшенных связей, причем значения этих сил подбираются из условий отсутствия перемещений по направлениям отброшенных связей.

Сформированная таким образом система уравнений называется системой канонических уравнений *метода сил*.

Если же основную систему получают из заданной системы *введением новых жестких связей*, то *неизвестными станут перемещения* по направлениям этих связей, а условиями для составления уравнений – условия отсутствия реактивных сил во введенных связях.

Составленные уравнения называют каноническими уравнениями *метода перемещений*.

18.3 Степень статической неопределимости системы

Перед расчетом статически неопределимой конструкции необходимо сначала определить *степень статической неопределимости* рассматриваемой системы.

Для балок и простых рам степень статической неопределимости равна числу лишних опорных связей.

В каждой связи возникает опорная реакция, поэтому степень статической неопределимости можно найти, сосчитав разность между количеством неизвестных опорных реакций и числом независимых уравнений статики.

Рис. 18.2

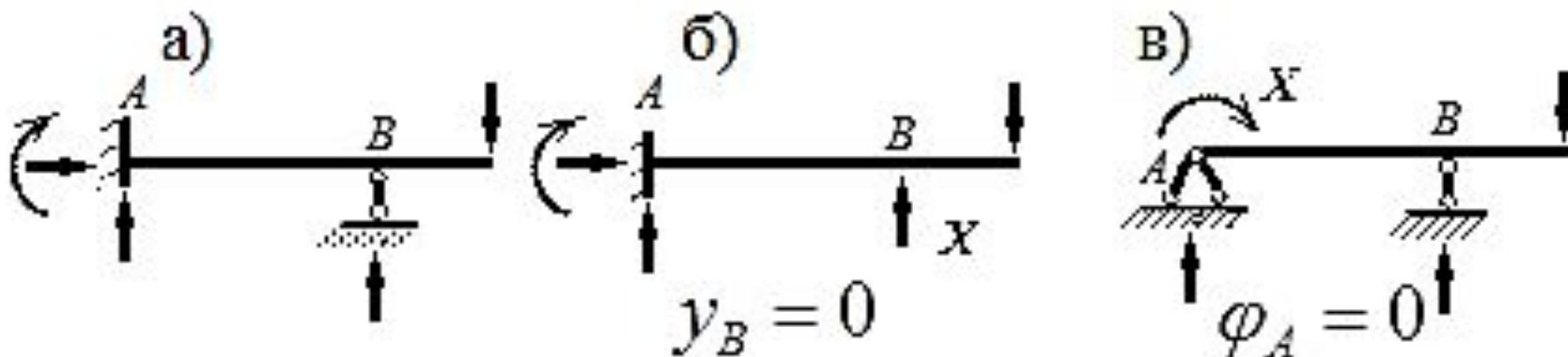


Рис. 18.3

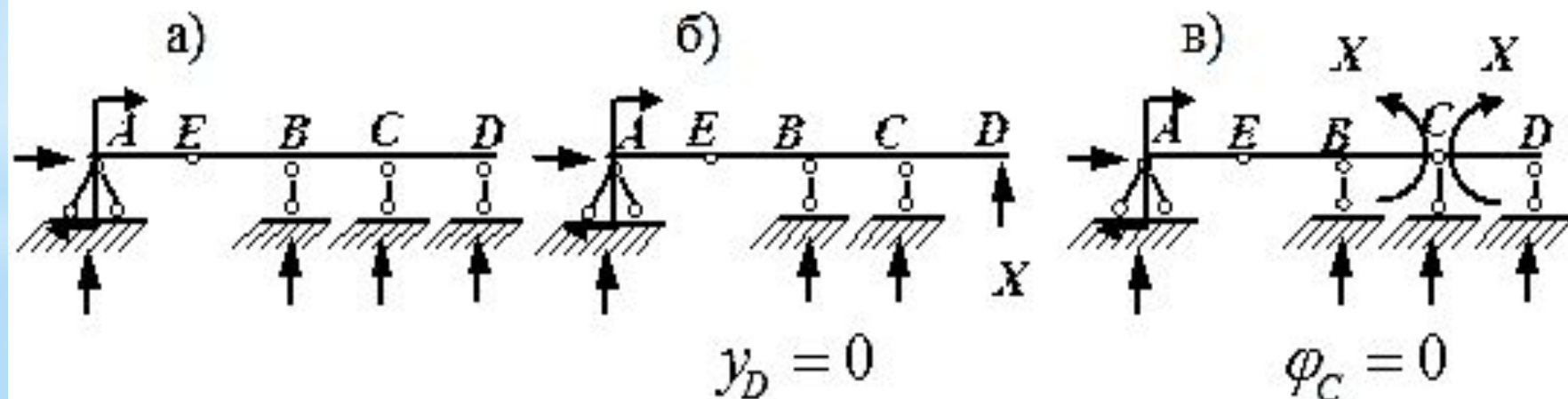


Рис. 18.4

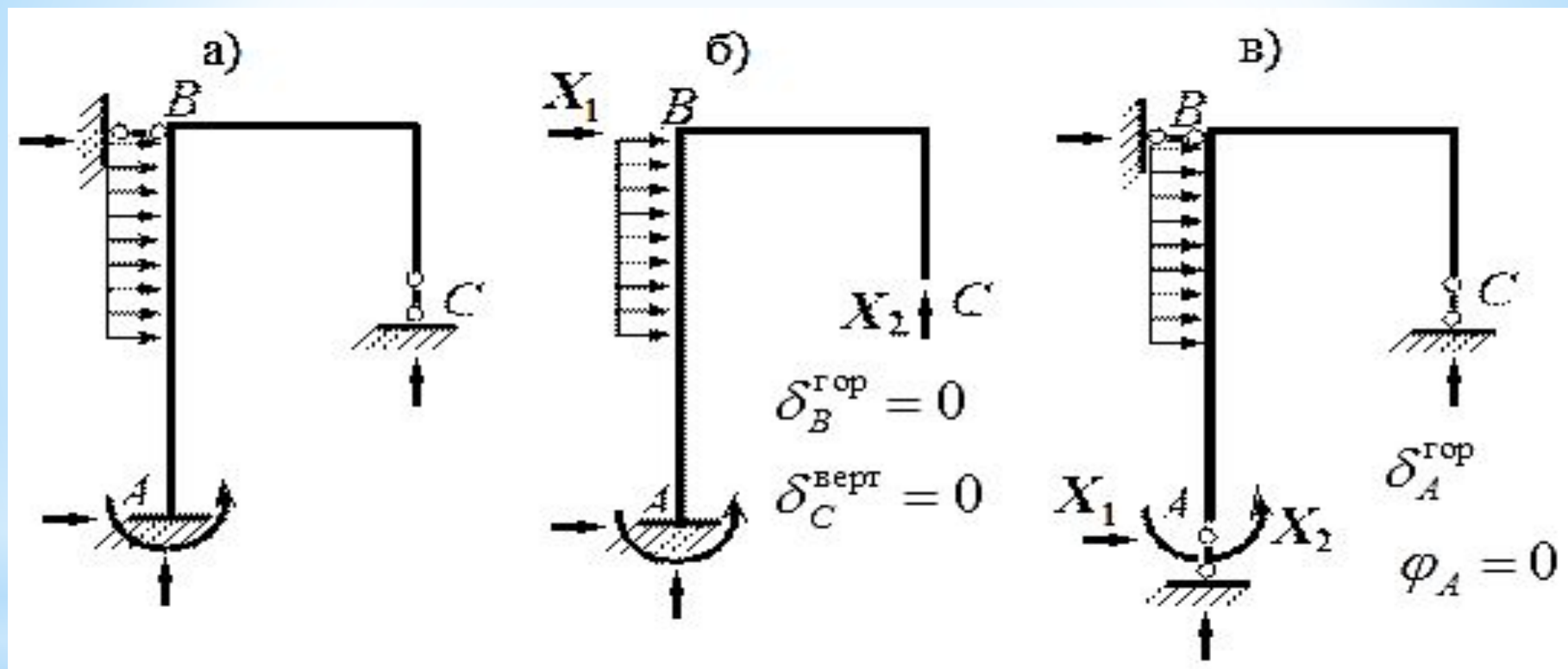
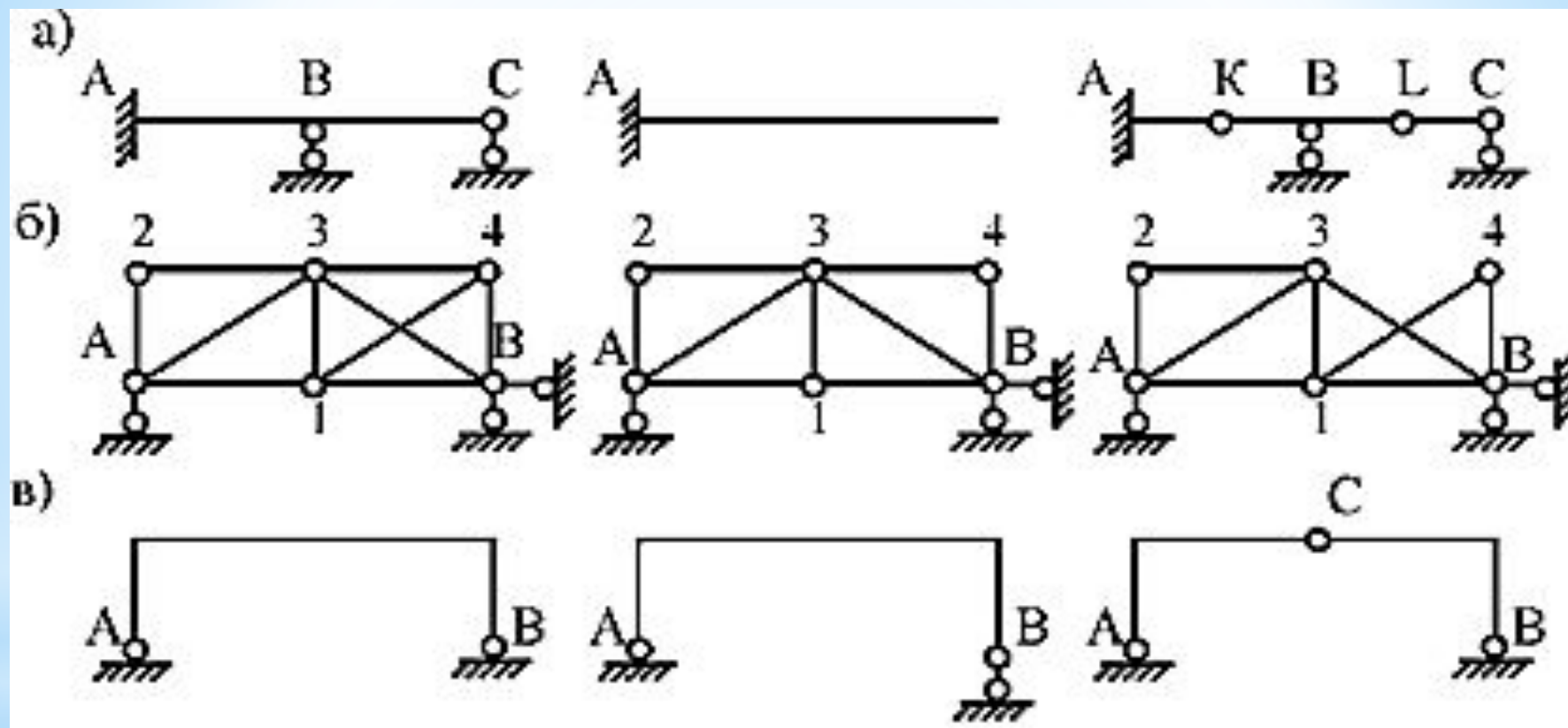


Рис.18.5



Понятие о степенях свободы и связях

Известно, что в пространстве тело обладает ШЕСТЬЮ степенями свободы, а в плоскости – ТРЕМЯ.

НЕЗАВИСИМАЯ КООРДИНАТА, ОПРЕДЕЛЯЮЩАЯ ПОЛОЖЕНИЕ ТЕЛА В ПЛОСКОСТИ ИЛИ В ПРОСТРАНСТВЕ, НАЗЫВАЕТСЯ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ.

ОГРАНИЧЕНИЯ, КОТОРЫЕ НАКЛАДЫВАЮТСЯ НА ТЕЛО, НАЗЫВАЮТСЯ СВЯЗЯМИ.

КАЖДАЯ СВЯЗЬ СНИМАЕТ ОДНУ СТЕПЕНЬ СВОБОДЫ.

Количество связей, накладываемых на тело (стержневую систему), может быть любым.

Для обеспечения равновесия и неподвижности тела в плоскости или в пространстве необходимо и достаточно **снять соответствующее количество степеней свободы –**

наложить соответствующее число связей (3 или 6).

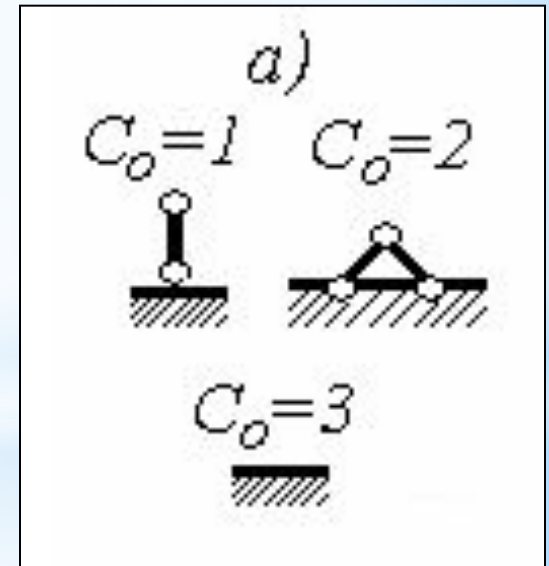
Эти связи являются необходимыми.

Всякая связь, наложенная сверх необходимой – дополнительная («лишняя») связь.

В строительной механике связи разделяются на
внешние (опорные) C_o и внутренние C_v .

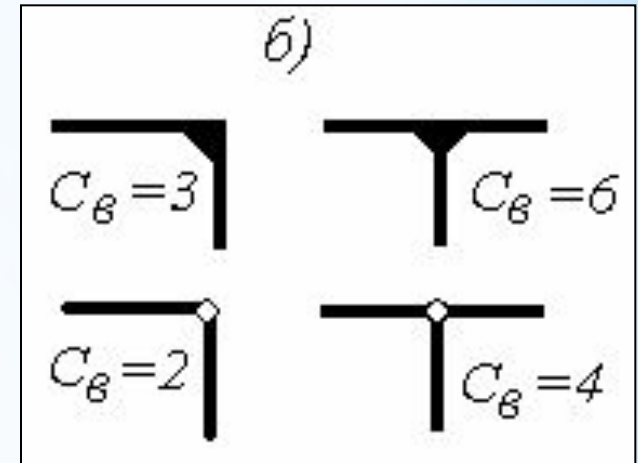
Опорные связи - связи, накладываемые опорными устройствами, (рис. а):

- шарнирно-подвижная опора накладывает **одну связь**
(**снимает одну степень свободы**);
- шарнирно-неподвижная - **две связи**;
- в заделке на опорное сечение стержня накладвается **три связи**.



Внутренние связи ограничивают взаимное перемещение стержней в сечениях, где они соединяются (рис. б):

- жесткое соединение двух стержней накладывает три связи;
- шарнирное соединение двух стержней - две связи;
- жесткое соединение трех стержней - шесть связей;
- шарнирное соединение трех стержней - четыре связи.



Шарнир снимает одну связь.

* **Шарнир, включенный в узел, где сходятся n стержней, снижает степень статической неопределимости на $(n-1)$.**

Определение степени статической неопределимости

Реакции, возникающие в «лишних» связях - «**лишние**» неизвестные. Уравнений равновесия оказывается недостаточно для решения задачи - определения опорных реакций. Как известно, такие задачи называют статически неопределимыми.

**Степень статической неопределимости определяется числом
лишних связей.**

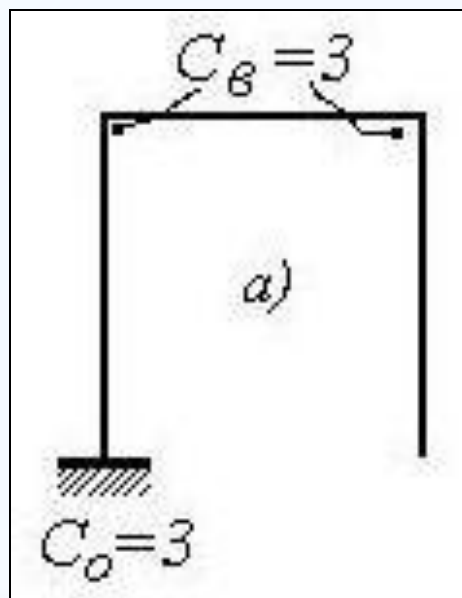
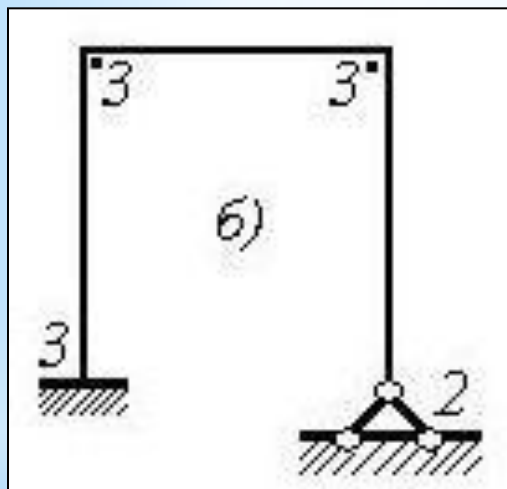
В строительной механике используются различные формулы для определения степени статической неопределимости или числа лишних связей **Л**.

Приведем одну из них:

$$L = D - C_v - C \quad (18.1)$$

где D - число стержней (дисков).

Рассмотрим примеры стержневых систем - **плоских рам** и определим степень их статической неопределимости расчетом по формуле (18.1):



• рис. а):

число лишних связей

$$L = 3 + 2 \times 3 - 3 \times 3 = 0.$$

Данная система
статически определима;

• рис. б):

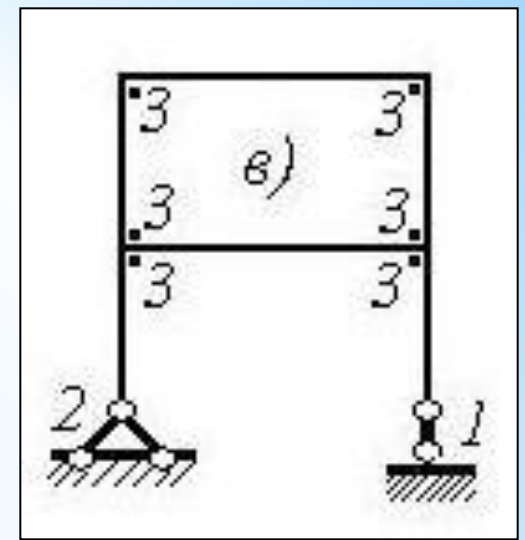
$$L = (3 + 2) + 2 \times 3 - 3 \times 3 = 2.$$

Система **2** раза статически неопределима (внешним образом, т.к. **лишними являются 2 опорные связи**);

• рис. в):

$$L = (2 + 1) + 6 \times 3 - 3 \times 6 = 3.$$

Система **3** раза статически неопределима (внутренним образом, т.к. **лишними являются 3 внутренние связи**);



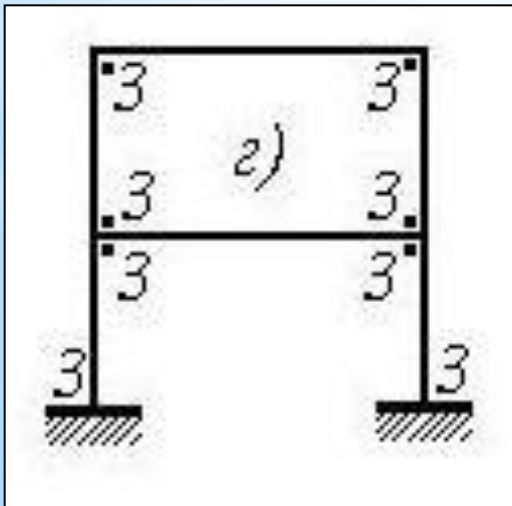
Жесткий замкнутый контур ТРИЖДЫ статически неопределим (внутренним образом).

• рис. г):

$$L = (3 + 3) + 6 \times 3 - 3 \times 6 = 6.$$

Система **6** раз статически неопределима (**3** раза внешним образом и **3** раза – внутренним образом).

В данной схеме фактически имеем **ДВА жестких замкнутых контура**;



• рис. д):

$$L = (3 + 3) + (6 \times 3) + 2 - 3 \times 7 = 5.$$

Система 5 раз статически неопределима.

В данном случае верхний
горизонтальный стержень (ригель)
разделен шарниром на два стержня.

Шарнир снимает *ОДНУ* связь, если
соединяет *ДВА* стержня;

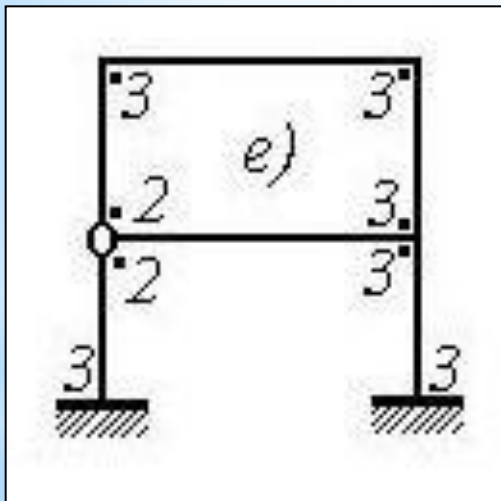
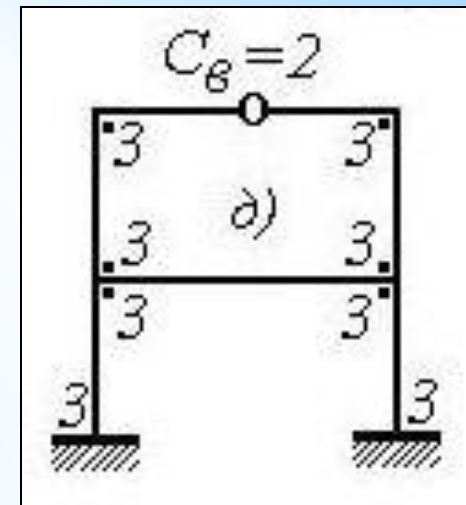


рис. е):

$$L = (3 + 3) + (4 \times 3) + (2 \times 2) - 3 \times 6 = 4.$$

Шарнир соединяет ТРИ стержня.

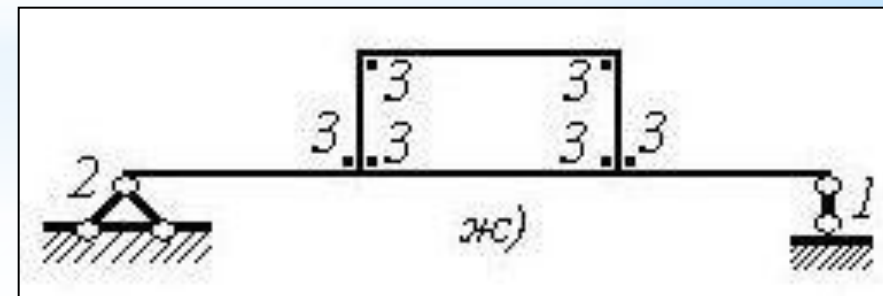


рис. жс):

$$L = (2 + 1) + 6 \times 3 - 3 \times 6 = 3.$$

Один замкнутый жесткий контур;

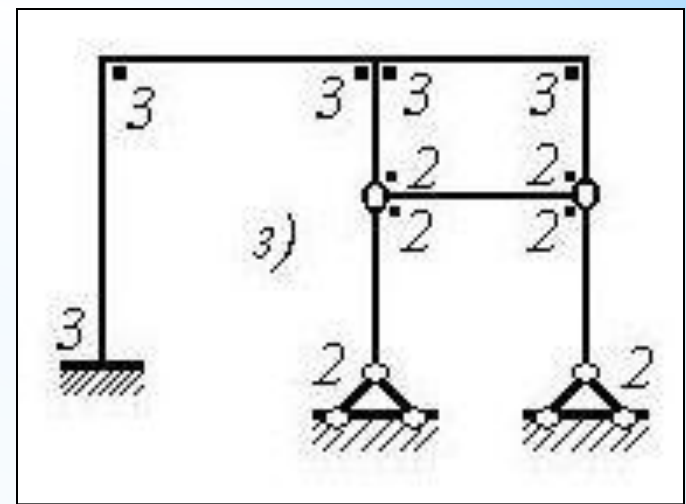


рис. 3):

$$L = (3 + 2 + 2) + (4 \times 3 + 4 \times 2) - 3 \times 8 = 3;$$

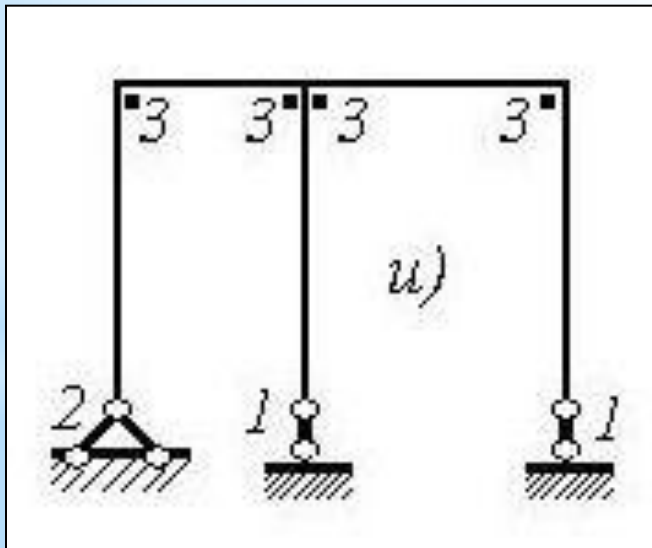


рис. u):

$$L = (2 + 1 + 1) + 4 \times 3 - 3 \times 5 = 1.$$

18.4 Метод сил

Он заключается в том, что заданная статически неопределимая система освобождается от дополнительных связей как внешних, так и взаимных, а их действие заменяется силами и моментами.

Величина их в дальнейшем подбирается так, чтобы перемещения в системе соответствовали тем ограничениям, которые накладываются на систему отброшенными связями.

Таким образом, при указанном способе решения неизвестными оказываются силы.

Отсюда и название «метод сил».

18.4.1 Алгоритм расчета методом сил.

1. Определить степень статической неопределимости.
2. Выбрать основную систему.
3. Сформировать эквивалентную систему.
4. Записать систему канонических уравнений.
5. Построить единичные и грузовые эпюры внутренних силовых факторов, возникающих в элементах рассматриваемой конструкции.
6. Вычислить коэффициенты при неизвестных и свободные члены системы канонических уравнений.
7. Построить суммарную единичную эпюру.
8. Выполнить универсальную проверку коэффициентов при неизвестных и свободных членов.
9. Решить систему канонических уравнений, т.е. определить реакции лишних связей.
10. Построить эпюры возникающих внутренних силовых факторов для заданной системы (иначе говоря, окончательные эпюры).
11. Выполнить статическую и кинематическую проверки.

18.4.2 *Выбор основной системы.*

Система, освобожденная от дополнительных связей, становится статически определимой.

Она носит название *основной системы*.

После того как дополнительные связи отброшены и система превращена в статически определимую систему, необходимо ввести вместо связей неизвестные силовые факторы, которые принято называть *лишними неизвестными*.

В тех сечениях, где запрещены линейные перемещения, вводятся силы.

Там, где запрещены угловые смещения, вводятся моменты. Как в том, так и в другом случае неизвестные силовые факторы будем обозначать X_i , где i – номер неизвестного.

Наибольшее значение i равно степени статической неопределимости системы.

Для внутренних связей силы X_i , являются **взаимными**: если в каком-либо сечении рама разрезана, то равные и противоположные друг другу силы и моменты прикладываются в этом же сечении, как к правой, так и к левой частям системы.

Неудачный выбор основной системы может привести к значительной трудоемкости решения, а иногда и к грубой ошибке.

Нельзя руководствоваться только одним правилом образования основной системы, а именно, что число отбрасываемых связей должно быть равным степени статической неопределимости.

Надо обязательно следить еще и за тем, какие связи отбрасываются. *Некоторые связи отбрасывать недопустимо.*

При выборе основной системы надо следить и за геометрической и кинематической неизменяемостью всей системы и отдельных ее частей.

У балки (а), которую далее будем называть заданной системой (ЗС), степень статической неопределимости $L = 1$.

Если исключить лишнюю связь и обозначить неизвестную реакцию через X , получим ее основные системы (ОС): б) – д).

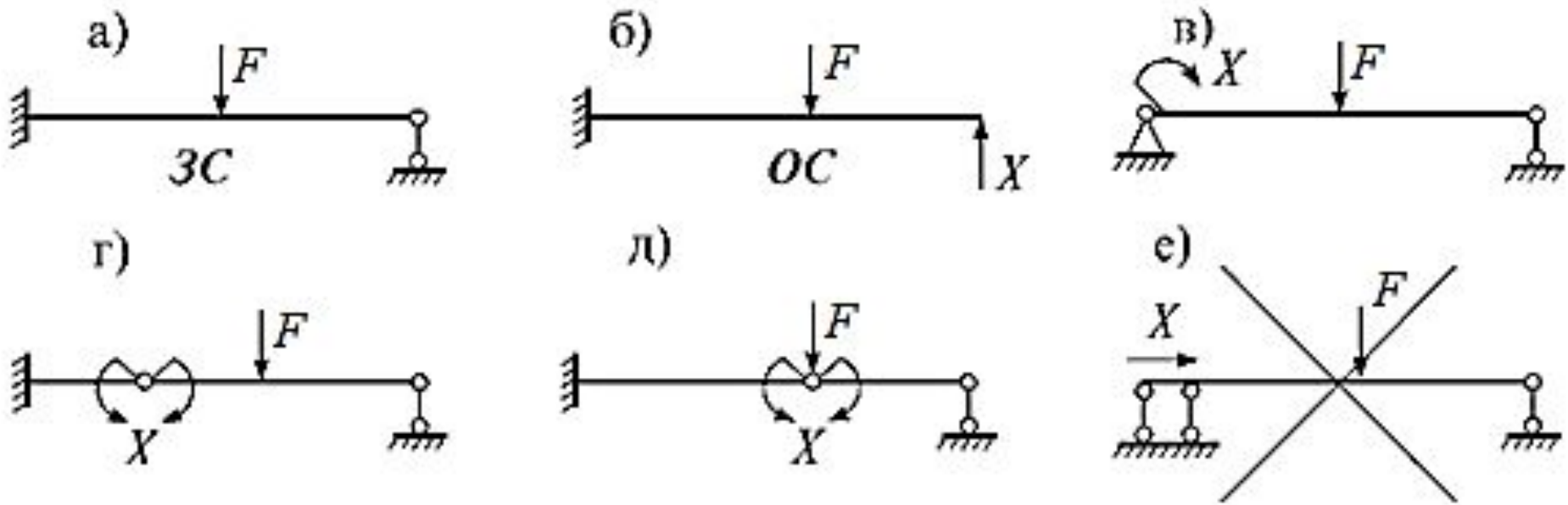
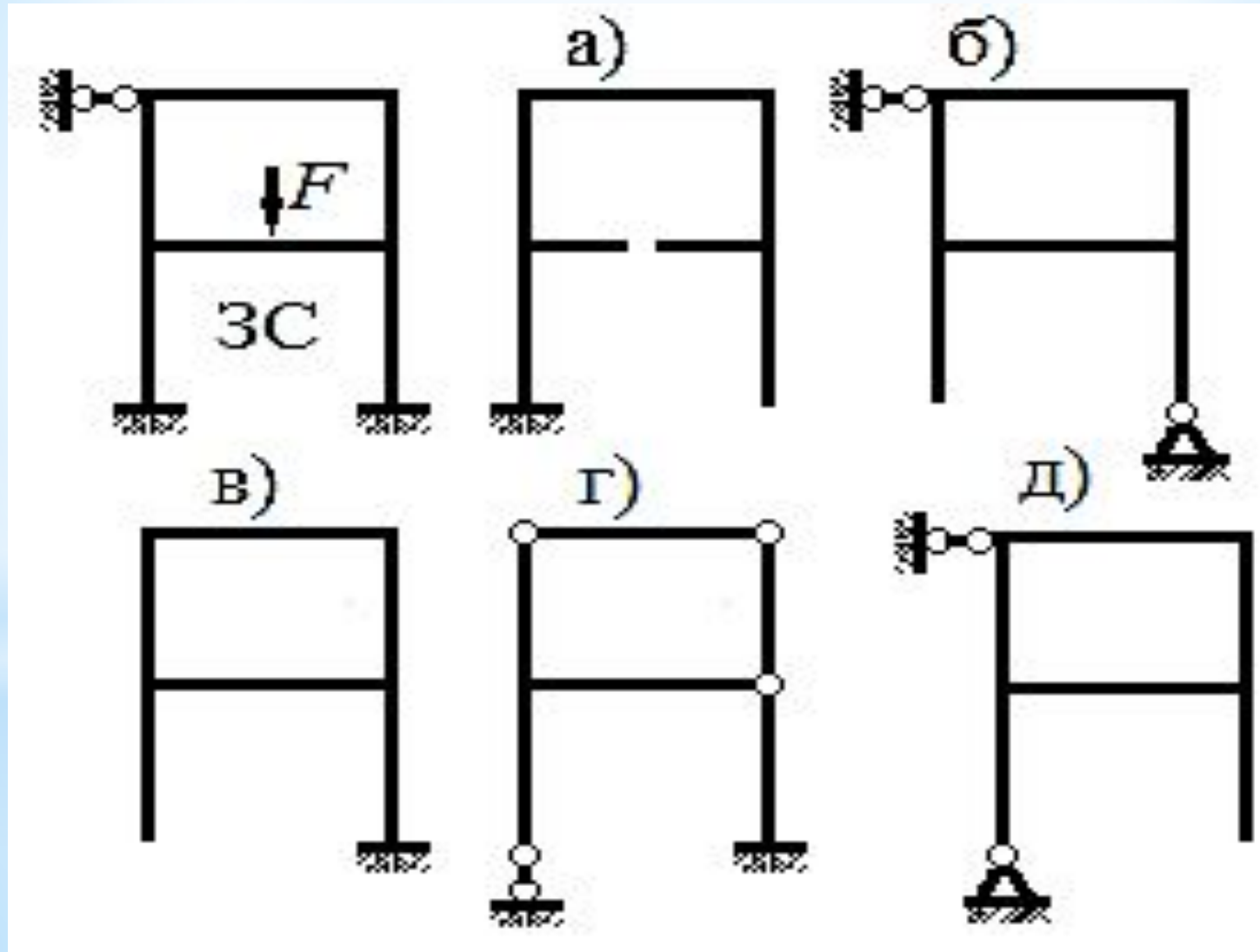


Схема (е) геометрически изменяема и для дальнейшего расчета непригодна.

Для рамы (ЗС) можно предложить основные системы а), б), в), г), д),
 которые получены путем отбрасывания семи дополнительных связей в
 различных комбинациях:

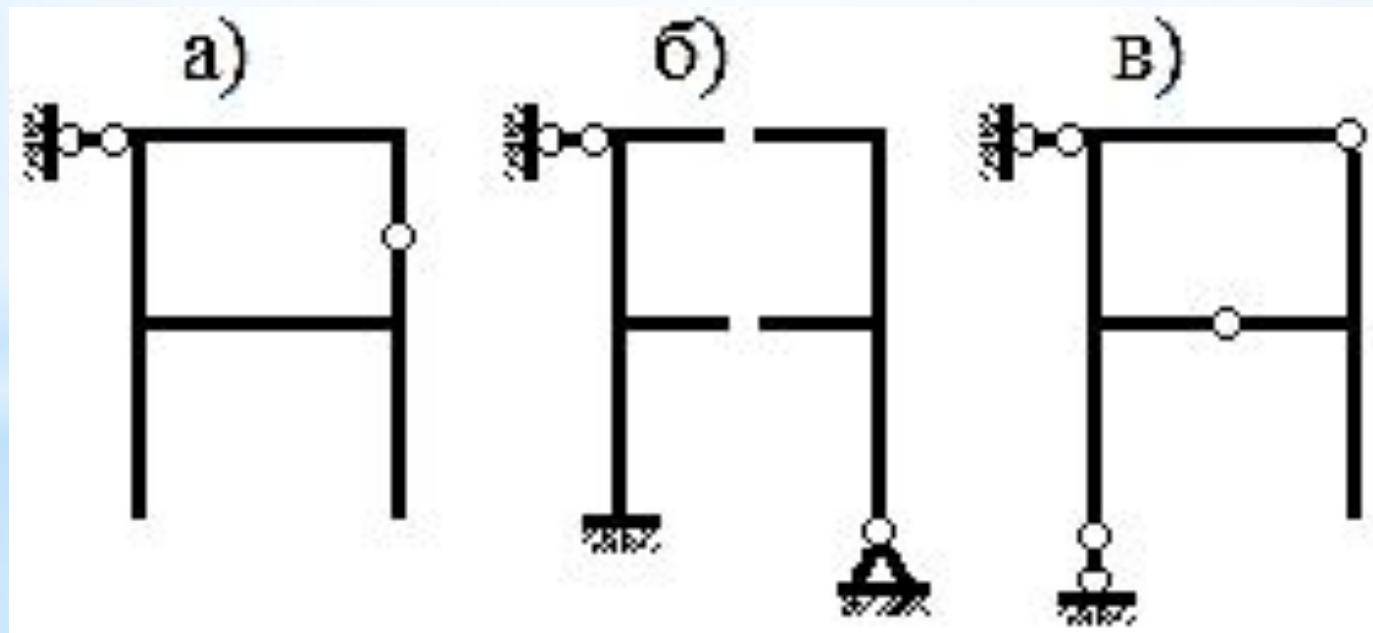
$$Л = 7 + 18 - 18 = 7.$$



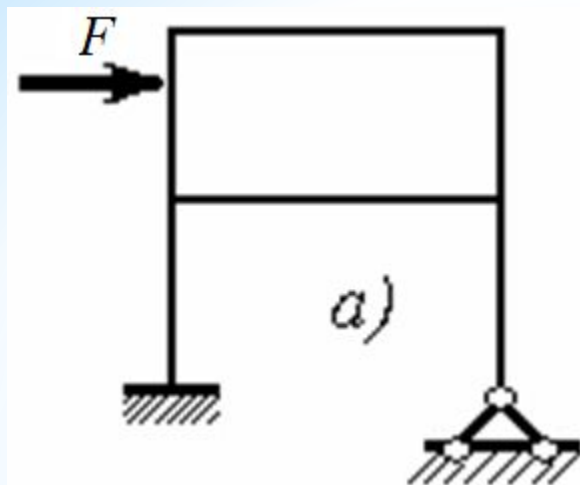
Три примера для той же рамы, в которой также отброшено семь связей, однако *сделано это неправильно*, так как оставшиеся связи не обеспечивают:

кинематической неизменяемости системы (а, б);

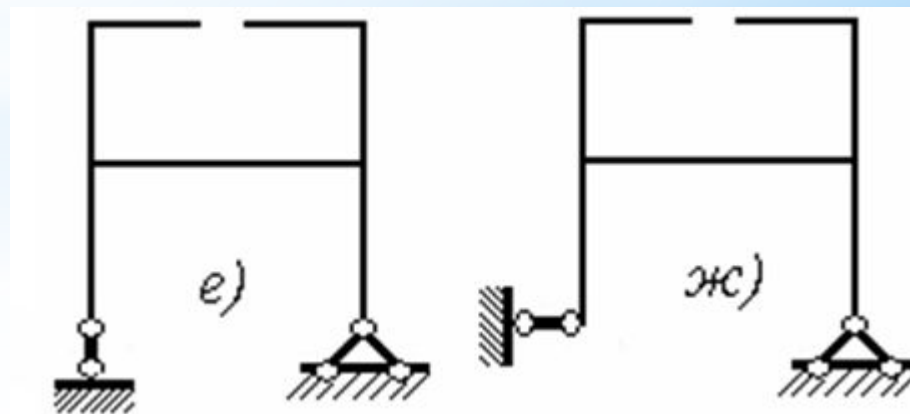
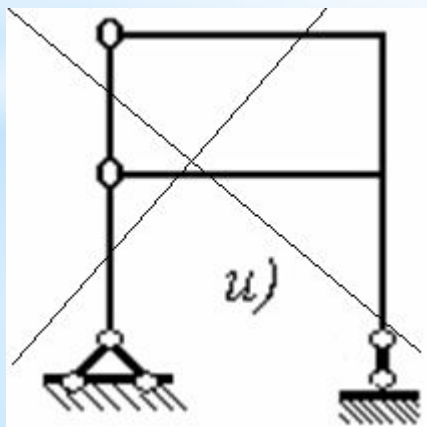
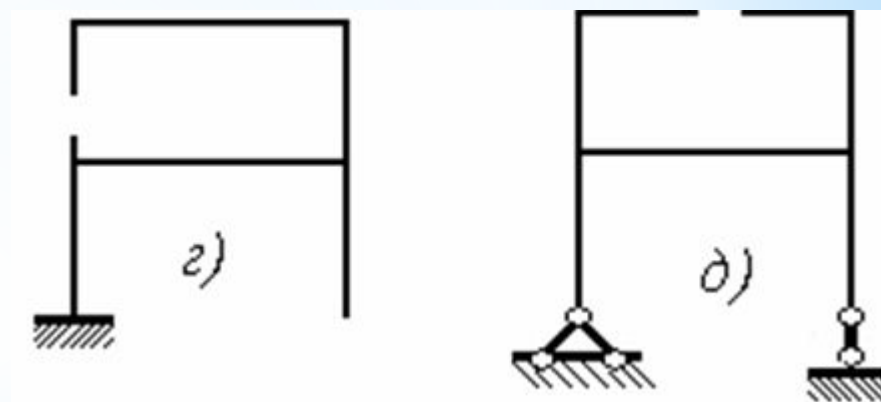
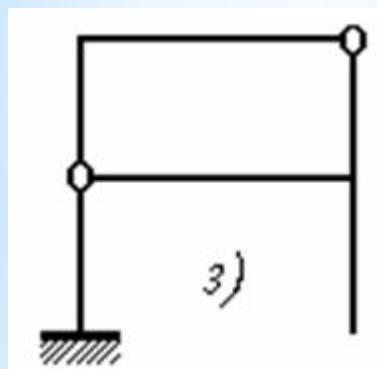
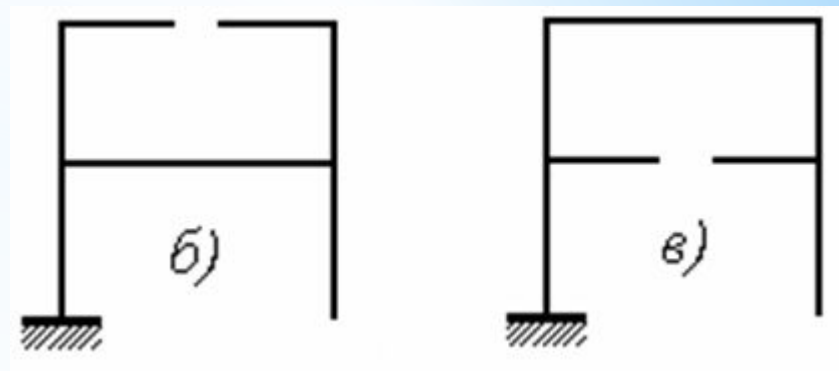
статической определимости во всех узлах, – с другой (в).



Для рамы



основные системы:



Возможные способы удаления лишних связей, что и определяет вид основной системы:

1. Отбрасывание лишних связей осуществляется полным удалением некоторых опор или их заменой опорами с меньшим числом связей. *Реакции, действующие в направлениях отброшенных связей, являются лишними неизвестными.*
2. Постановка шарниров в промежуточных сечениях стержней позволяет в каждом таком сечении установить связь, соответствующую изгибающему моменту. *Эти моменты являются лишними неизвестными.*
3. Рассечение стержня устраняет *три* связи, соответствующие внутренним усилиям M , Q , N .

18.4.3 Эквивалентная система.

Устранение каких-либо связей не изменяет внутренние усилия и деформации системы, если к ней приложить дополнительные силы и моменты, представляющие собой реакции отброшенных связей.

Значит, если к основной системе приложить заданную нагрузку и реакции удаленных связей, то основная и заданная системы станут *эквивалентными*.

Основную систему с приложенными к ней лишними неизвестными $X_1, X_2, \dots, X_n$ и внешней нагрузкой F называют *эквивалентной системой* при условии, что её действительные перемещения согласуются с наложенными на исходную систему связями.

Каждой основной системе будет соответствовать своя эквивалентная система.

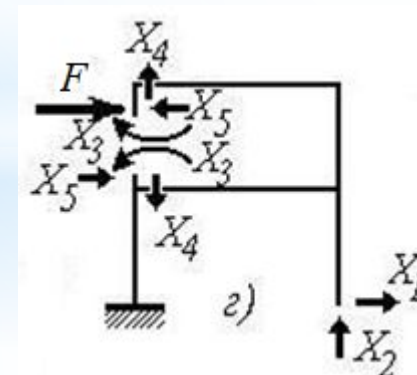
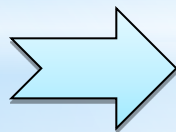
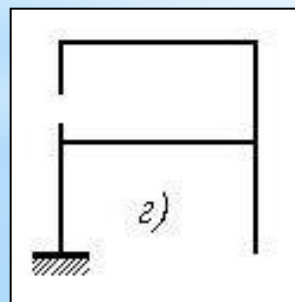
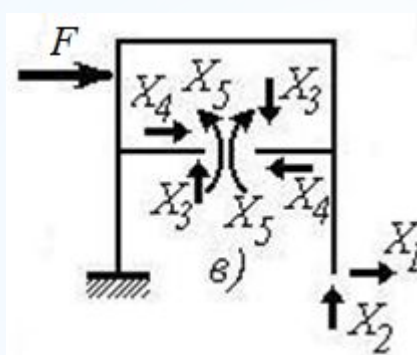
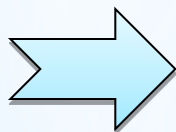
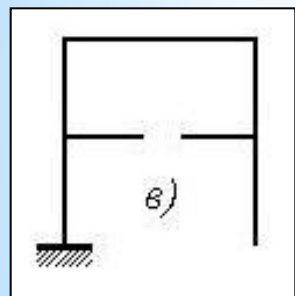
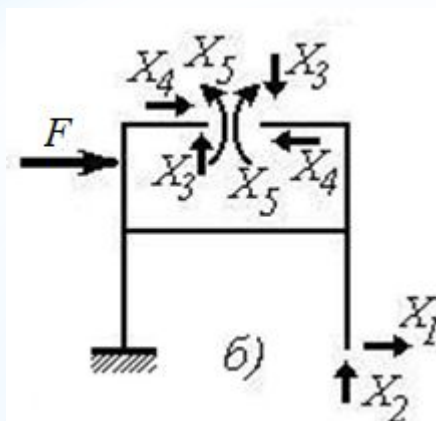
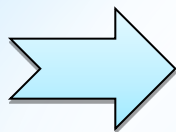
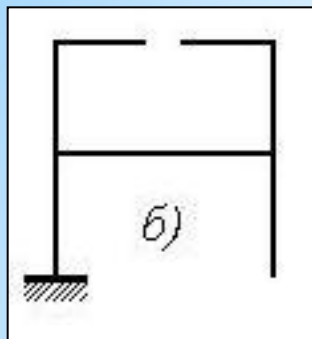
При составлении эквивалентной системы:

1) в выбранной основной системе усилия направляют произвольно:

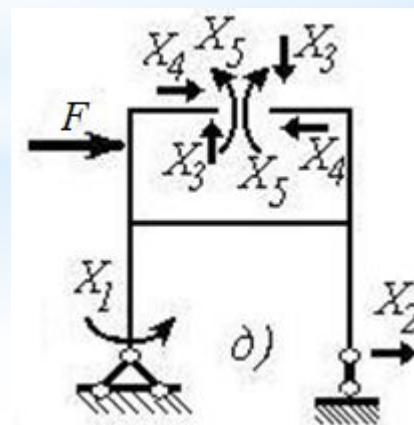
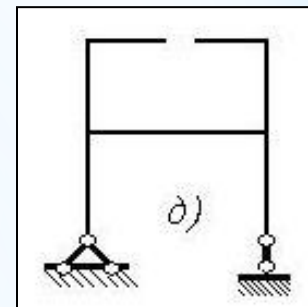
- **вверх или вниз;**
- **вправо или влево;**
- **по ходу или против хода часовой стрелки.**

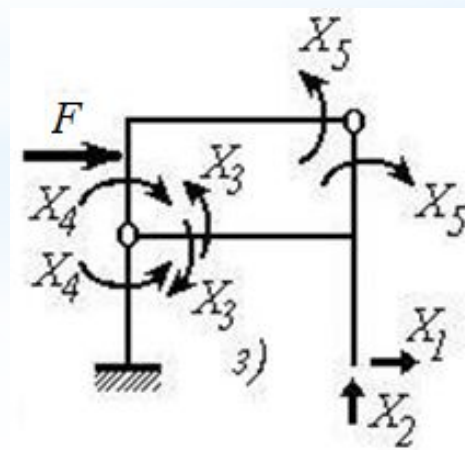
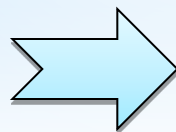
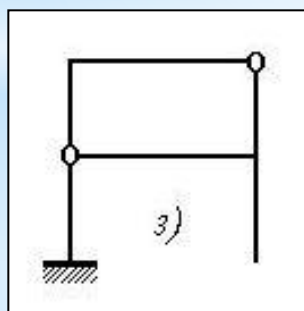
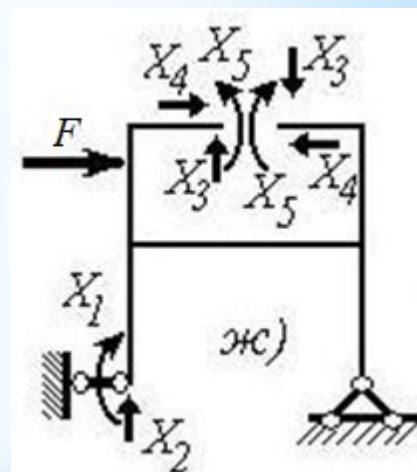
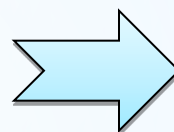
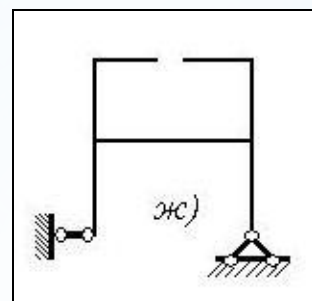
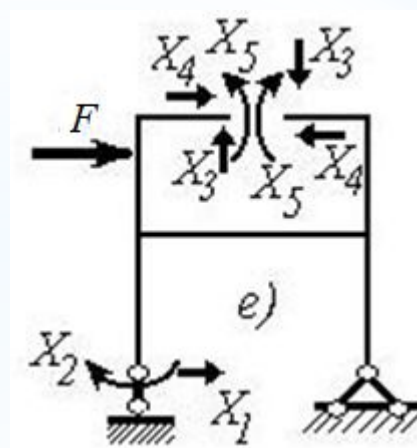
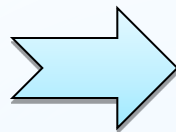
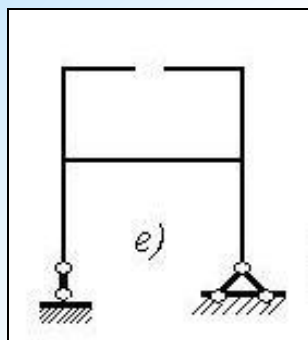
2) неизвестные усилия обозначают $X_1, X_2, X_3, \dots, X_i$,
где i – номер силового фактора.

3) число этих неизвестных должно соответствовать степени статической неопределимости стержневой системы, причем **направления этих связей X_i являются взаимными.**



Для статически
неопределимой заданной
рамы (см. №35):





18.4.5 Канонические уравнения метода сил.

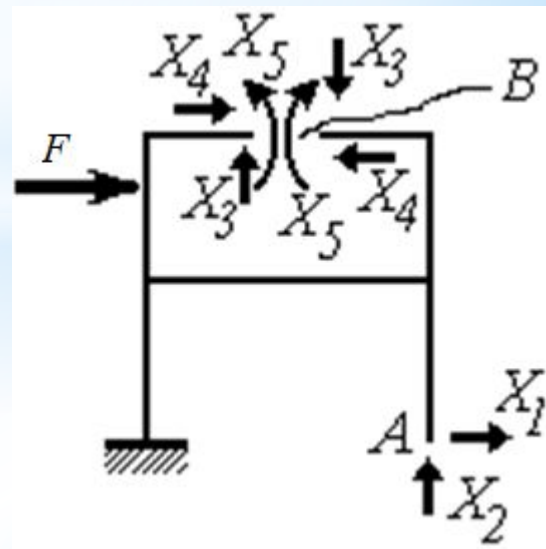
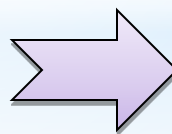
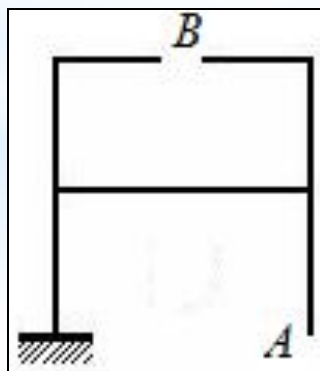
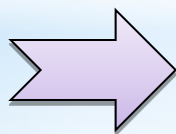
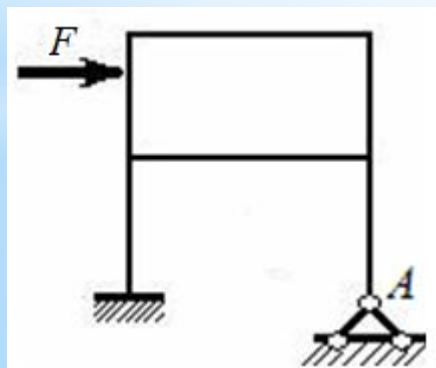
В заданной системе по направлениям имеющихся жестких связей, в том числе и тех связей, которые отброшены при переходе к основной системе, перемещений быть не может.

Поэтому и *в основной системе перемещения по направлениям отброшенных связей должны равняться нулю.*

Для этого реакции отброшенных связей должны иметь строго определенные значения.

Рассмотрим изображенную на слайде №35 стержневую систему:
5 раз статически неопределимую раму.
Выберем для нее основную систему и изобразим соответствующую
ей эквивалентную систему.

* В заданной схеме линейные перемещения (горизонтальное и вертикальное) на опоре A и линейные и угловое перемещения в сечении B на верхнем ригеле запрещены. Но они же разрешены в основной системе. Известные усилия, показанные в эквивалентной системе, по величине и направлению должны обеспечить равенство нулю указанных перемещений.



Взаимное смещение точек системы условимся обозначать следующим образом:

$$\Delta_{iX_j}; \quad \Delta_{iP} \quad (18.2)$$

первый индекс - указывает **направление**, по которому определяется перемещение;

второй индекс - указывает **причину**, вызвавшую это перемещение.

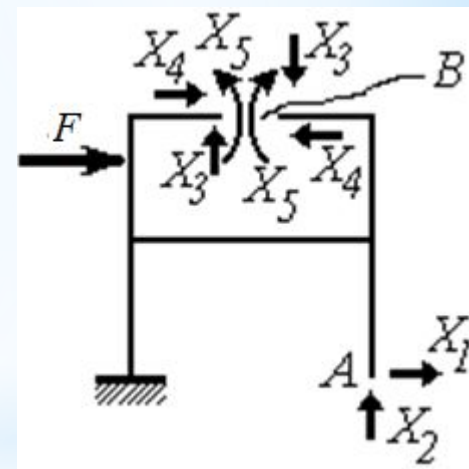
i - направление перемещения (направление неизвестных сил **$X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$**);

X_j - сила (причина), вызвавшая перемещение (неизвестные силы **$X_1, X_2, \dots, X_j, \dots, X_i, \dots, X_n$**);

F - любая система внешних нагрузок.

* В точках **A** и **B** перемещения будут определяться действием всех сил, приложенных к системе – как внешних нагрузок (**P**), так и неизвестных усилий (**X_i**). При этом, в соответствии с особенностями расчетной схемы, эти **перемещения должны быть равны нулю**. Запишем, пользуясь обозначением (11.2), систему уравнений

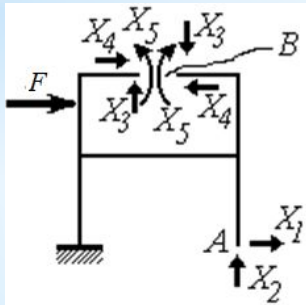
$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1(X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_n, P) = 0; \\ \Delta_2(X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_n, P) = 0; \\ \Delta_3(X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_n, P) = 0; \\ \Delta_4(X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_n, P) = 0; \\ \Delta_5(X_1, X_2, X_3, \dots, X_i, \dots, X_n, P) = 0. \end{array} \right. \quad (18.3)$$



В этих формулах индексы 1, 2, 3, ..., *i*, ..., *n* - номера неизвестных сил.

Используя принцип независимости действия сил, для любого количества неизвестных (n) можно записать:

[illegible]

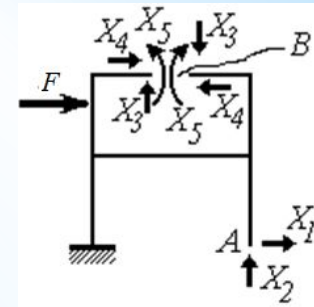


(18.4)

Введем обозначения:

δ_{ij} - **единичное перемещение** по направлению единичной силы $\overline{X_i} = 1$

от действия единичной силы $\overline{X_i} = 1$



δ_{ij} - **единичное перемещение** по направлению единичной силы $\overline{X_i} = 1$
от действия единичной силы $\overline{X_j} = 1$

$\Delta_{1P}, \Delta_{2P}, \Delta_{3P}, \dots, \Delta_{iP}, \dots, \Delta_{nP}$

- перемещения по направлению единичных сил

$\overline{X_1}, \overline{X_2}, \overline{X_3}, \dots, \overline{X_i}, \dots, \overline{X_n}$

от действия системы внешних сил P .

Известно, что перемещения пропорциональны действующим силам.

Тогда $\Delta_{1X_1} = \delta_{11} X_1; \dots; \Delta_{1X_i} = \delta_{1i} X_i; \dots; \Delta_{1X_n} = \delta_{1n} X_n$

Обобщая, имеем $\Delta_{iX_j} = \delta_{ij} X_j$ (18.5)

Учитывая (18.5) перепишем (18.4) и получаем:

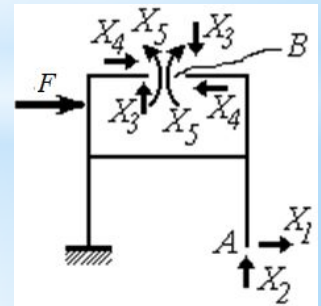
КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СИЛ

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + ... + \delta_{1i}X_i + ... + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + ... + \delta_{2i}X_i + ... + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} = 0; \\ (18.6) \\ \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + ... + \delta_{ii}X_i + ... + \delta_{in}X_n + \Delta_{iP} = 0; \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + ... + \delta_{ni}X_i + ... + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} = 0. \end{array} \right.$$

$$\delta_{12} = \delta_{21}; \dots; \delta_{ij} = \delta_{ji}; \dots \delta_{in} = \delta_{ni} \text{ – побочные коэффициенты уравнений}$$

(по теореме Максвелла их значения попарно равны),

$\Delta_{1P}, \Delta_{2P}, \dots, \Delta_{iP}, \dots, \Delta_{nP}$ - свободные члены уравнений.



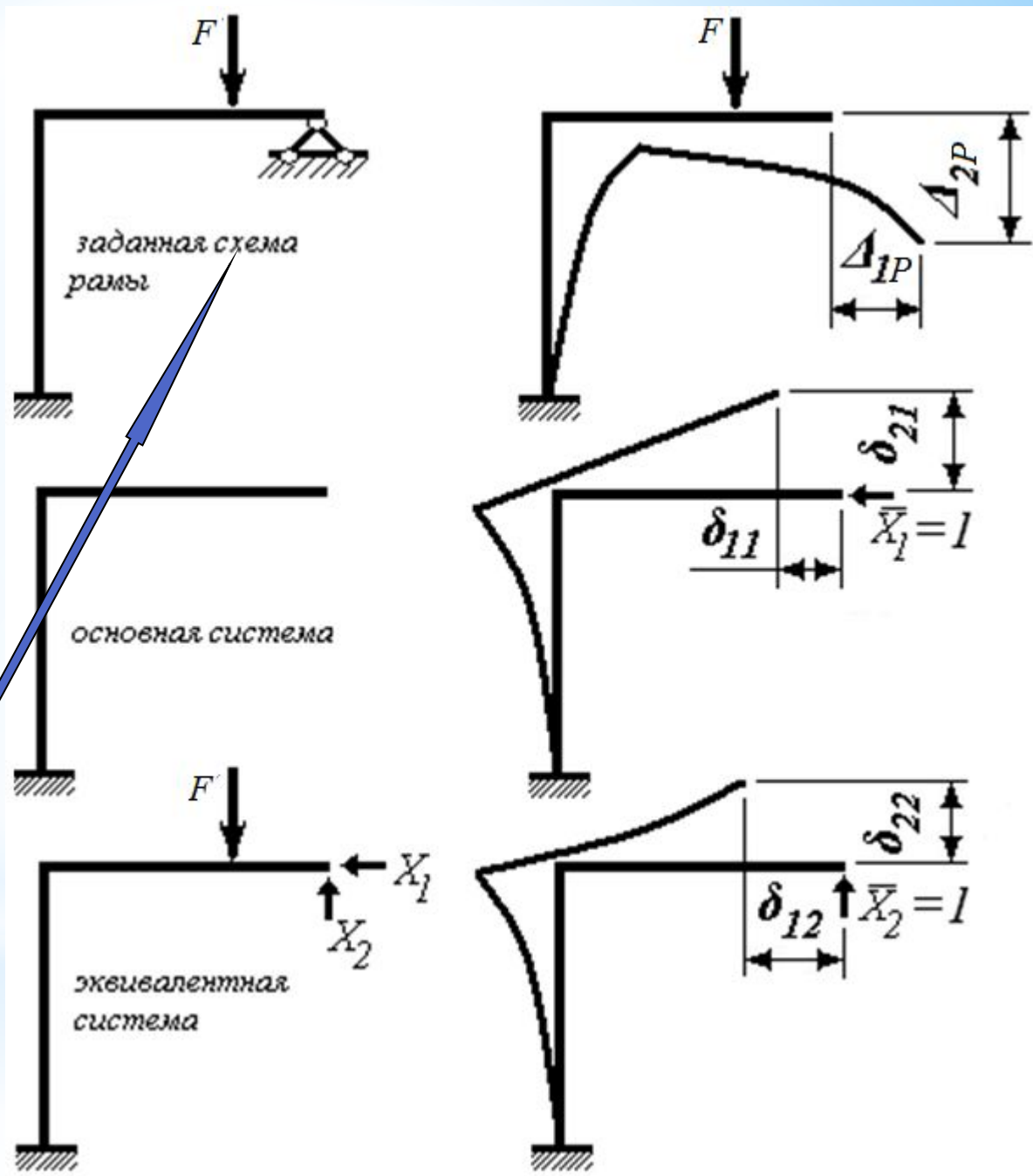
Количество записываемых канонических уравнений метода сил соответствует количеству «лишних» неизвестных (степени статической неопределимости). Остается определить коэффициенты уравнений и, решив систему уравнений, найти значения и направления неизвестных:

$$X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$$

Для понимания геометрического смысла коэффициентов уравнений рассмотрим два раза статически неопределимую раму.



На рисунке
графически
 показаны
 перемещения
 точки рамы, в
 которой
 отброшены связи:
 это шарнирно
 подвижная опора.



Коэффициенты уравнений определяются методом Мора, чаще перемножением эпюр по способу Верещагина.

При определении коэффициентов канонических уравнений методом перемножения эпюр (по Верещагину):

1. Строим единичные эпюры изгибающих моментов. Единичные эпюры строятся для основной системы **от каждого «лишнего» неизвестного**, т.е. в основной системе поочередно прикладываются неизвестные, равные единице, определяются реакции и строятся единичные эпюры:

$$\overline{X}_1 = 1, \overline{X}_2 = 1, \dots, \overline{X}_i = 1, \dots, \overline{X}_n = 1$$

Единичных эпюр, должно быть столько, какова степень статической неопределимости рамы.

Получим единичные эпюры изгибающих моментов

$$\overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_i, \dots, \overline{M}_n$$

2. Строим грузовую эпюру изгибающих моментов.

Эта эпюра также строится для основной системы. В этой системе прикладываются все внешние нагрузки (силы, моменты, распределенные нагрузки), которые имеются на заданной схеме, определяются опорные реакции и строится грузовая эпюра M_p .

3. Перемножаем эпюры по способу Верещагина.

Находим значения коэффициентов канонических уравнений перемножением соответствующих эпюр.

Главные коэффициенты: единичные эпюры перемножаются «сами на себя»

$$\overline{M}_1 \times \overline{M}_1; \dots; \overline{M}_i \times \overline{M}_i; \dots; \overline{M}_n \times \overline{M}_n$$

В качестве
грузовой
рассматривается
та же единичная
эпюра.

$$\delta_{11} = \sum \frac{\omega_1 M_1^c}{EI}; \dots;$$
$$\delta_{ii} = \sum \frac{\omega_i M_i^c}{EI}; \dots; \delta_{nn} = \sum \frac{\omega_n M_n^c}{EI}$$

Побочные коэффициенты: перемножаются между собой единичные эпюры, т.е. одна из единичных эпюр условно считается грузовой

$$\overline{M}_1 \times \overline{M}_2; \dots; \overline{M}_2 \times \overline{M}_3; \dots; \overline{M}_i \times \overline{M}_n$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \frac{\omega_1 \overline{M}_2^C}{EI} = \sum \frac{\omega_2 \overline{M}_1^C}{EI}; \dots;$$

$$\delta_{in} = \delta_{ni} = \sum \frac{\omega_i \overline{M}_n^C}{EI} = \sum \frac{\omega_n \overline{M}_i^C}{EI}$$

Свободные члены:

перемножаются грузовая эпюра,
поочередно, на единичные

$$M_P \times \overline{M}_1; \dots; M_P \times \overline{M}_i$$

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{\omega_P \overline{M}_1^C}{EI};$$

$$\Delta_{iP} = \sum \frac{\omega_P \overline{M}_i^C}{EI}; \dots; \Delta_{nP} = \sum \frac{\omega_P \overline{M}_n^C}{EI}$$

4. Подставляем значения вычисленных коэффициентов в систему канонических уравнений, решаем ее и определяем значения неизвестных усилий:

$$X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$$

Если значения некоторых неизвестных получаем со знаком МИНУС, это значит, что действительное направление их обратно по отношению к принятому в эквивалентной системе.

Желательно при продолжении решения (при построении окончательных эпюр) поменять направление этих неизвестных на положительное.

5. Стоят «исправленные эпюры»: ординаты единичных эпюр $\overline{M}_i$ умножают на значения X_i

6. В эквивалентной системе вместо неизвестных усилий прикладываем их значения (в положительном направлении), определяем опорные реакции и строим эпюры **M, Q, N** .

ПРОЩЕ: геометрически складывают ординаты грузовой эпюры с соответствующими ординатами «исправленных эпюр».

7. Проводится проверка правильности расчетов (методика проверки будет рассмотрена ниже).

18.5 РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМНЫХ СИСТЕМ

Рациональный выбор основной системы

Основная система может быть любой, но трудоемкость расчетов будет различной. Поэтому:

а) учитывая, что в процессе решения нужно строить и перемножать эпюры, лучше выбирать такой вариант основной системы, для которого легче эти эпюры строить;

б) протяженность эпюр и их очертания должны быть, по возможности, простыми;

в) для некоторых схем рам возможно использование свойств симметрии и кососимметрии:



ПРОВЕРКА ПРАВИЛЬНОСТИ РАСЧЕТОВ

Проверка должна проводиться на всех этапах решения:

- правильность выбора основной системы;
- соответствие эквивалентной системы выбранной основной системе;
- правильность определения реакций во всех расчетных схемах;
- правильность построения эпюр: единичных и грузовой эпюр изгибающих моментов;
- правильность определения коэффициентов канонических уравнений;
- правильность решения системы уравнений;
- правильность построения окончательных эпюр M , Q , N .

Объективным подтверждением правильности решения задачи, является так называемая ДЕФОРМАЦИОННАЯ ПРОВЕРКА.

Деформационная проверка заключается в том, что исполнитель расчета должен убедиться в том, что ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ ЛЮБОЙ ИЗ ОТБРОШЕННЫХ СВЯЗЕЙ равны нулю (возможная погрешность в расчете - 5%).

Для этого окончательную эпюру изгибающих моментов перемножают поочередно на каждую из единичных эпюр.

И желательно на те единичные эпюры, которые не использовались в расчете, т.е. для другой основной системы.

Более надежной является проверка, которая проводится путем сравнения некоторых сумм коэффициентов уравнений (полученных в расчете) и результатов перемножения эпюр.

Дополнительно строят суммарную единичную эпюру $\overline{M}_S$.

Ее легко построить графически, суммировав единичные эпюры

$$\overline{M}_i : \overline{M}_S = \sum \overline{M}_i.$$

А) построчная

проверка заключается

в сравнении сумм

коэффициентов по

строкам с

результатом

перемножения

суммарной единичной

эпюры с каждой из

единичных:

$$\sum \delta_{1S} = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \dots + \delta_{1n} = \overline{M}_S \times \overline{M}_1;$$

$$\sum \delta_{2S} = \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \dots + \delta_{2n} = \overline{M}_S \times \overline{M}_2;$$

$$\sum \delta_{iS} = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \delta_{i3} + \dots + \delta_{in} = \overline{M}_S \times \overline{M}_i;$$

$$\sum \delta_{nS} = \delta_{n1} + \delta_{n2} + \delta_{n3} + \dots + \delta_{nn} = \overline{M}_S \times \overline{M}_n;$$

$$\sum \Delta_{iP} = \Delta_{1P} + \Delta_{2P} + \dots + \Delta_{nP} = \overline{M}_S \times M_P.$$

Б) универсальная проверка заключается в сравнении суммы всех главных δ_{ii} и побочных δ_{ij} коэффициентов с результатом перемножения суммарной единичной эпюры самой на себя:

$$\begin{aligned}\sum \delta_{ij} &= (\delta_{11} + \delta_{22} + \dots + \delta_{ii} + \dots + \delta_{nn}) + \\ &+ 2(\delta_{12} + \delta_{13} + \dots + \delta_{1n} + \delta_{23} + \delta_{24} + \dots + \delta_{2n} + \dots) = \\ &= \overline{M}_S \times \overline{M}_S.\end{aligned}$$