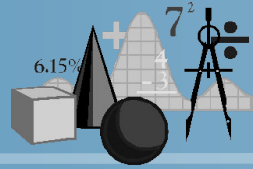


# Метрические соотношения в окружности: свойства секущих, касательных, хорд.



# №1. Выпишите номера верных утверждений:



1. В подобных треугольниках стороны равны.
2. Треугольники подобны по двум углам.
3. Отношения сходственных сторон подобных треугольников равны коэффициенту подобия.
4. Отношение площадей подобных треугольников равно коэффициенту подобия.
5. Все квадраты подобны.
6. Все треугольники подобны.
7. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
8. Для доказательства подобия треугольников достаточно найти две пары пропорциональных сторон у этих треугольников.

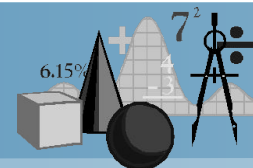


# Актуализация знаний



- 1) Какой угол называется вписанным?
- 2) Сформулируйте теорему о вписанном угле.
- 3) Какими являются вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу?
- 4) Какова градусная мера вписанного угла, опирающегося на диаметр окружности?
- 5) Какой угол называется центральным углом окружности?





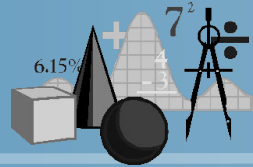
**Теорема Птолемея.** *Произведение диагоналей вписанного в окружность четырехугольника равно сумме произведений его противоположащих сторон.*



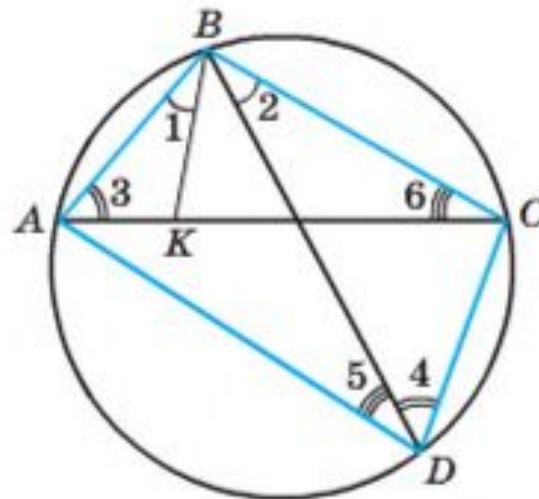
**Клавдий Птолемей**  
(ок. 100 — ок. 178)

Древнегреческий математик и астроном. Автор геоцентрической модели мира. Разработал математическую теорию движения планет, позволяющую вычислять их положение. Создал прообраз современной системы координат.





*Доказательство.* На рисунке 158 изображен вписанный в окружность четырехугольник  $ABCD$ . Докажем, что  $AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AC$ .

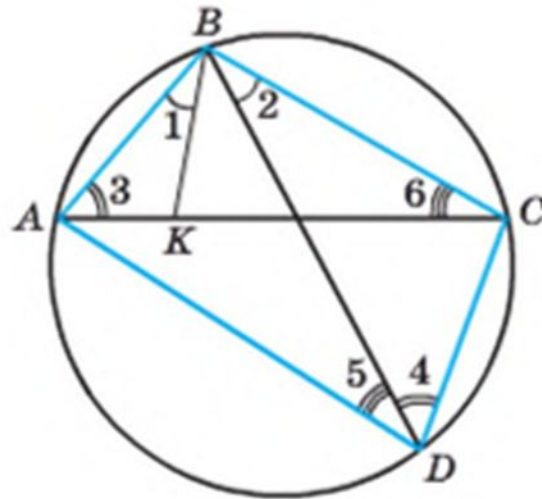
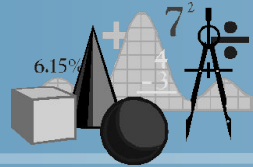


**Рис. 158**

На диагонали  $AC$  отметим точку  $K$  так, что  $\angle 1 = \angle 2$ . Углы 3 и 4 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Следовательно, треугольники  $ABK$  и  $DBC$  подобны по первому признаку подобия треугольников. Отсюда  $\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{DC}$ , то есть

$$AB \cdot DC = BD \cdot AK. \quad (1)$$





Поскольку  $\angle 1 = \angle 2$ , то  $\angle ABD = \angle KBC$ . Углы 5 и 6 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу. Поэтому  $\triangle KBC \sim \triangle ABD$ . Отсюда  $\frac{BC}{BD} = \frac{KC}{AD}$ , то есть

$$BC \cdot AD = BD \cdot KC. \quad (2)$$

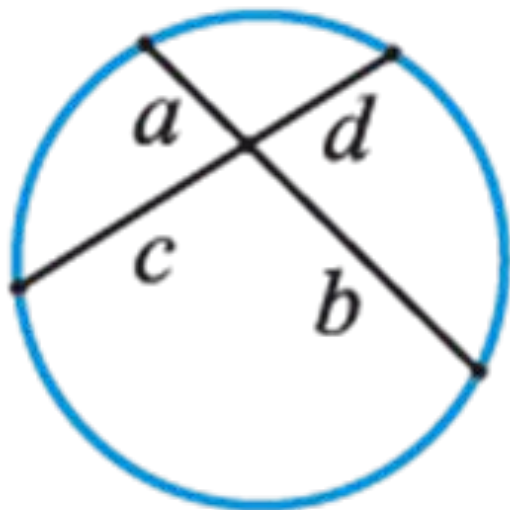
Сложив равенства (1) и (2), получаем:

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AK + BD \cdot KC, \text{ то есть}$$

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD (AK + KC) = BD \cdot AC. \quad \blacktriangle$$



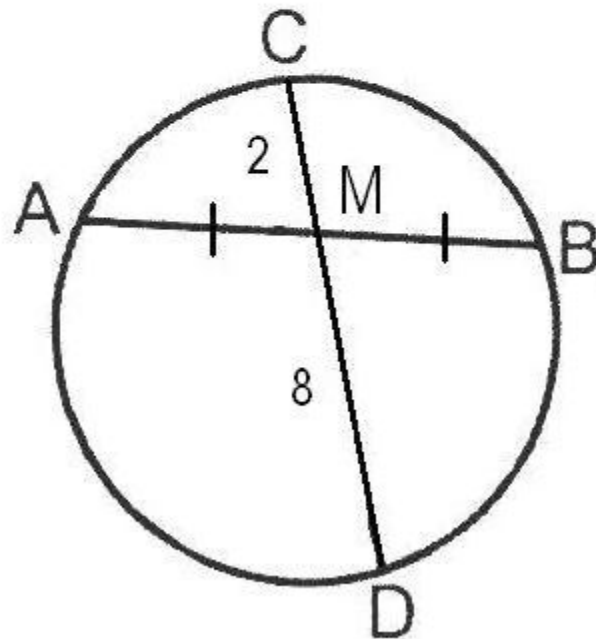
# Теорема о произведении отрезков пересекающихся хорд



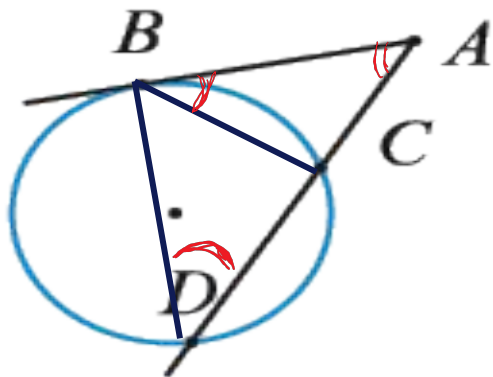
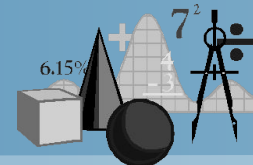
Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды:

$$a \cdot b = c \cdot d$$





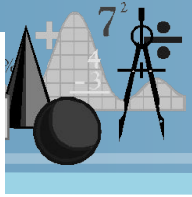
# Свойство касательной и секущей



Если из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая, то квадрат длины касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть:

$$AB^2 = AC \cdot AD$$

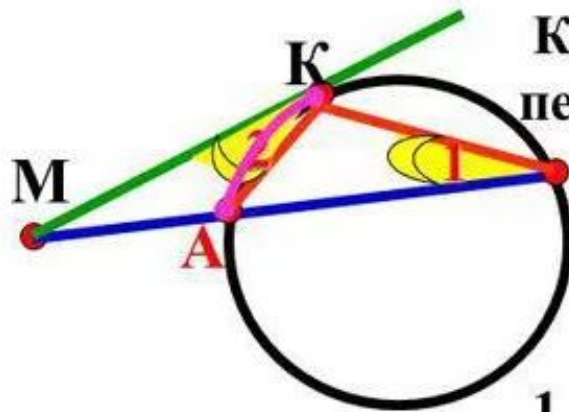




## Теорема о квадрате отрезка касательной

Произведение секущей на её внешнюю часть равно  
квадрату отрезка касательной

Дано:  $MB$  – секущая,  $MK$  – касательная,  
 $M$  – точка вне окружности,  
 $K$  – точка касания,  $A$  и  $B$  точки  
пересечения окружности и секущей  $MB$



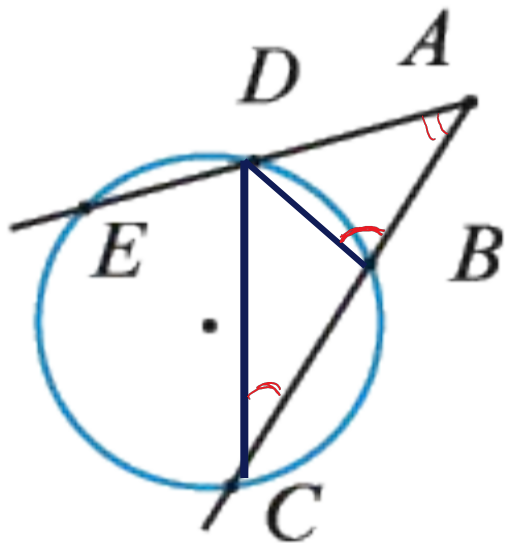
**В Доказать:**  $MB \cdot MA = MK^2$

Доказательство: (если нужно,  
используйте рекомендации)

1. Проведите хорды  $AK$  и  $KB$
2. Сделайте заключение об углах 1 и 2.
3. Сделайте заключение о  $\triangle MBK$  и  $\triangle MKA$ .
4. Запишите пропорцию, которая следует из подобия  $\triangle MBK$  и  $\triangle MKA$ .
5. Запишите равенство, используя основное свойство пропорции; сравните его с тем, что надо было доказать



# Свойство секущих проведенных из одной точки



Если из точки, лежащей вне окружности, проведены две секущие, то произведение одной секущей на её внешнюю часть равно произведению другой секущей на её внешнюю часть:

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE$$



**Задача 4.** Из точки вне окружности проведена секущая, пересекающая окружность в точках, удаленных от данной точки на 12 см и 20 см. Расстояние от этой точки до центра равно 17 см. Найти радиус окружности.

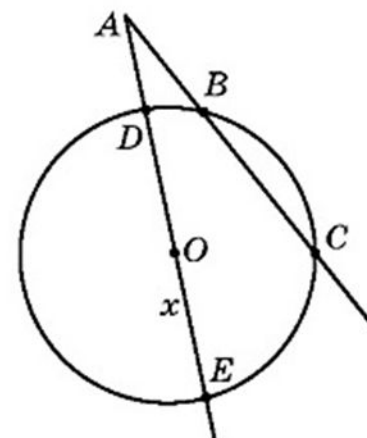


Рис. 7.288

**Задача 5.** Из точки вне окружности проведена секущая, внутренняя и внешняя часть которой относятся как 5 : 4. Найти длину всей секущей, если касательная, проведенная из этой же точки к окружности, равна 12 см.

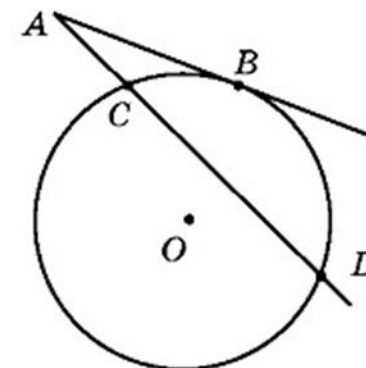
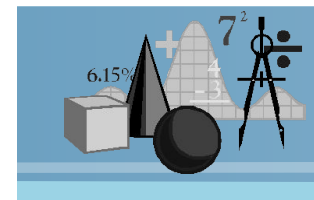


Рис. 7.289





**Задача 4.** Из точки вне окружности проведена секущая, пересекающая окружность в точках, удаленных от данной точки на 12 см и 20 см. Расстояние от этой точки до центра равно 17 см. Найти радиус окружности.

*Решение:*

Пусть из точки  $A$  провели секущую так, что  $AB = 12$  см,  $AC = 20$  см (рис. 7.288).

$AO = 17$ . Пусть  $OE = x$ , тогда  $AD = 17 - x$ ,  $AE = 17 + x$ .

По теореме о двух секущих:  $AD \cdot AE = AB \cdot AC$ .  
 $(17 + x)(17 - x) = 12 \cdot 20$ ;  $x = 23$ .

*Ответ:* 23 см.

**Задача 5.** Из точки вне окружности проведена секущая, внутренняя и внешняя часть которой относятся как 5 : 4. Найти длину всей секущей, если касательная, проведенная из этой же точки к окружности, равна 12 см.

*Решение:*

Из точки  $A$  проведена касательная  $AB = 12$  см и секущая  $AD$ , причем  $CD : AC = 5 : 4$  (рис. 7.289).

Тогда  $CD = 5x$ ,  $AC = 4x$ ,  $AD = 9x$ . Учитывая, что  $AB^2 = AC \cdot AD$ , получим:

$$4x \cdot 9x = 12^2; 36x^2 = 144;$$

$$x = 2. AD = 2 \cdot 9 = 18.$$

*Ответ:* 18 см.

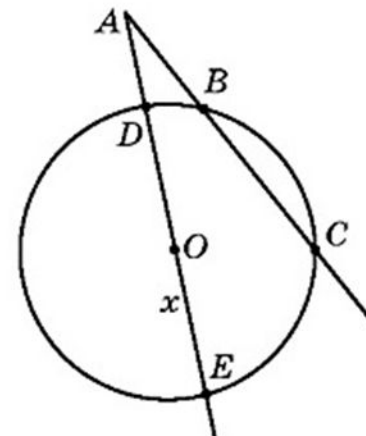


Рис. 7.288

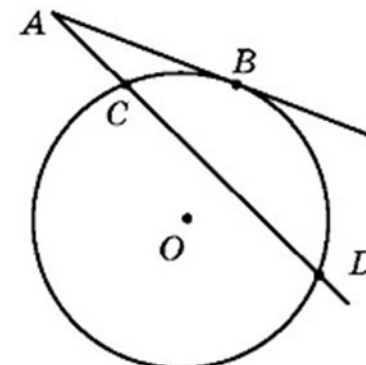
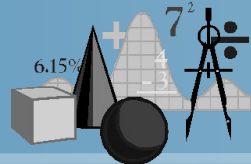


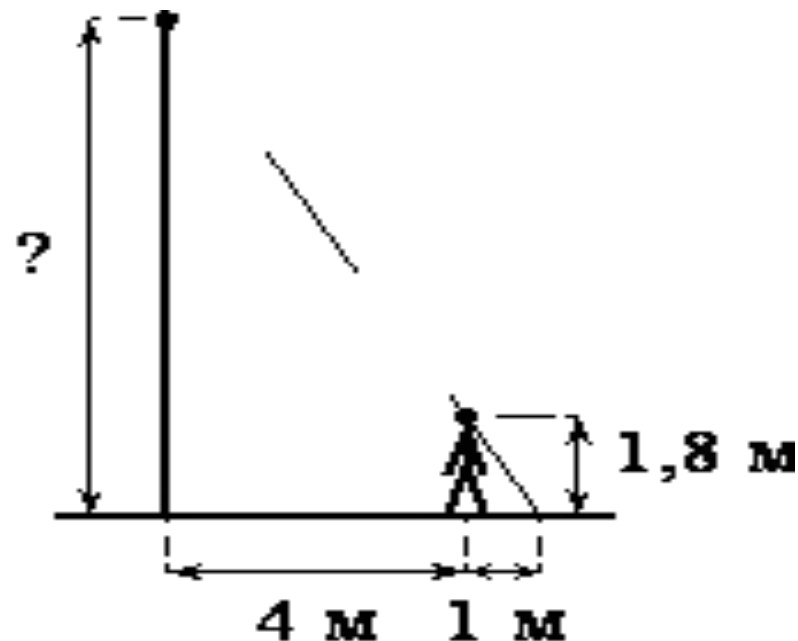
Рис. 7.289

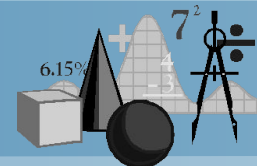




**№8.**

Человек, рост которого равен 1,8 м, стоит на расстоянии 4 м от уличного фонаря. При этом длина тени человека равна 1 м. Определите высоту фонаря (в метрах).





**№7.** На рисунке изображён колодец с «журавлём». Короткое плечо имеет длину 4 м, а длинное плечо — 6 м. На сколько метров опустится конец длинного плеча, когда конец короткого поднимется на 1 м?

